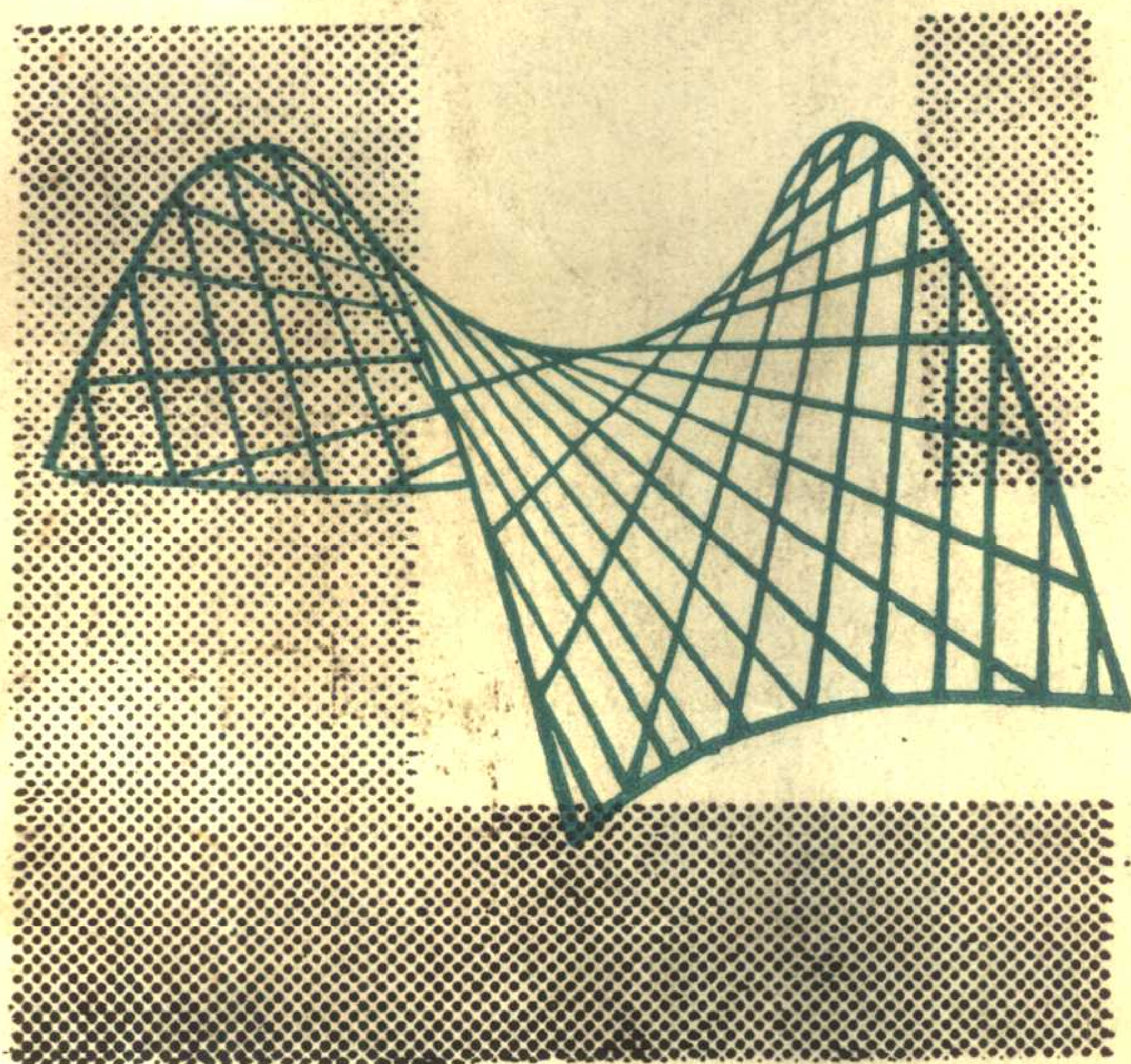
高等学校试用教材

流体力学与流体机械

屠大燕　主编

●中国建筑工业出版社





高 等 学 校 试 用 教 材

流体力学与流体机械

屠大燕　刘鹤年　马祥琯　钟济华　合编
屠大燕　主编

中国建筑工业出版社

（京）新登字035号

本书是高等工业院校供热通风及空调工程专业和燃气工程专业本科教材，也可供其它相近的专业及有关工程技术人员参考。

全书共十六章。前十二章为流体力学部分，主要内容有：流体静力学、流体运动的有限体分析和微元分析、量纲分析和相似原理、流动阻力和能量损失、不可压缩流体的管道流动、理想不可压缩流体平面无旋流动、边界层理论基础与绕流运动、紊流射流和紊流扩散、一元气体动力学基础等。后四章为流体机械部分，主要内容是：离心式泵与风机的叶轮理论和设备性能、泵与风机的相似律和运行调节等。

本书的体系与我国工业院校多年沿用的体系相比有新风格。编写过程中注重基本理论与基本概念的阐述，力求思路清晰，物理概念明确，各章附有习题，并有部分习题答案。

高等学校试用教材

流体力学与流体机械

屠大燕　刘鹤年　马祥琯　钟济华　合编

屠大燕　主编

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）

新华书店总店科技发行所发行

北京市顺义县燕华印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：24 字数：581千字

1994年6月第一版　1994年6月第一次印刷

印数：1—5,400册　定价：11.10元

ISBN7—112—02183—9/TU·1675

（7203）

前　言

本书是为高等工业院校供热通风及空调工程专业和燃气工程专业写的“流体力学与流体机械”本科教材，也可用于其他相近的专业。它是在多年教学实践的基础上，吸收了国内外新出版的有关教材的优点写成的。

本书的编写体系，同我国工科院校多年沿用的体系相比，有较大的变动。主要是：

（1）把从物体机械运动的普遍规律出发建立的一般形式的基本方程组作为总纲，用它来统帅流体力学的全部内容，其他的方程和原理基本上都是这些基本方程在不同条件下的简化和应用。这样编排的目的是要使读者对流体力学所要解决的问题和解决的思路先有一个总的了解。在此基础上再讨论各局部问题，不仅使内容具有更强的系统性，也有助于理解各部分内容的特点及其相互关系。此外，立足于一般形式的基本方程分析具体问题，就能站得高看得远，考虑问题深入、全面。

（2）所有的欧拉型基本方程一律采用以输运公式为主要手段的控制体分析法来推导。对同一种类型的方程，根据他们的共性采用同一种方法来分析，既可使推导简化，又便于读者能更好地理解用欧拉法描述流体运动的特点。

（3）将基本方程分为积分形式的和微分形式的两类，指明积分形式的方程用于解决有限体积流体控制面上的流动参数关系问题，微分形式的方程可用来解决流动参数在流场内的分布问题。读者明确认识到这一点，对培养能力是有益的。

（4）在基本方程中适当地介绍了能量方程。不可压缩流体恒定总流的能量方程（伯诺里方程）是由积分形式的一般能量方程导出的。这一方面使它的名称与来源一致，加强了条理性，另一方面也能使读者进一步提高对能量方程和动量方程的区别与联系的认识。在可压缩流体的流动中，能量方程是不能忽视的，尤其是当涉及到有摩擦的流动时，更是如此。

（5）流体机械部分在体系上分为叶轮理论、设备性能、运行与调节、其他常用（非离心式）泵与风机四章阐述，加强了基础理论和系统性。

此外，本书还加强了一些具体应用的内容，例如动量方程的应用、势流叠加原理的应用等。

本书由哈尔滨建筑工程学院屠大燕主编，具体编写分工如下：第一、二、三章，钟济华；第四、五、九、十、十二章，屠大燕；第六、七、八章，刘鹤年；第十一章，钟济华、屠大燕；第十三、十四、十五、十六章，马祥琯。

本书由衡阳工学院汪兴华教授主审。清华大学彦启森教授、湖南大学陈在康教授曾对书稿提出宝贵意见，编者谨向他们表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，不妥之处在所难免，恳请批评指正。

目 录

第一章 绪　论

§ 1-1　流体力学的研究对象和任务

流体力学是研究流体的机械运动规律，以及运用这些规律解决实际工程问题的一门学科。从上述定义可知，流体力学的研究对象就是流体。流体包括液体和气体。因此，研究流体运动规律的学科可分为两支：以液体为主要研究对象的水力学、流体力学和以气体为主要研究对象的空气动力学、气体动力学。由于液体与气体既有共性，又有各自的特性，所以这几门学科既有一些共同的基本理论，又有各自的专门问题与方法。

流体区别于固体的基本特征是流体有流动性。所谓流动性就是流体在静止时不能承受剪切力的性质。当有剪切力作用于流体时，流体便产生连续的变形，也就是流体质点之间产生相对运动。流体也不能承受拉力，它只能承受压力。流动性使小范围内液体的自由表面保持水平，这是众所周知的自然现象。流动性使流体的运动具有下列特点：

第一，流体没有固定的形状，它的形状是由约束它的边界形状所决定的。不同的边界必将产生不同的流动。因此，与流体接触的周围物体的形状和性质（也就是边界条件）对流体的运动有着直接的影响。

第二，流体的运动又和流体的变形联系在一起。当流体运动时其内部各质点之间有着复杂的相对运动。所以流体的运动又是和它的物理力学性质有密切的关系。物理性质不同的流体，即使其边界条件相同也会产生不同的流动。

自然界中出现的各种流动虽然千变万化，各有不同。但是，无论现象多么复杂，每个具体的流动，都是由流体本身的物理性质（这是内因）和流动所在的外界条件(这是外因)这两个因素所决定的。流体力学中所要探讨的运动规律，实质上就是要研究流体的物理性质和流动的边界条件对流体运动所产生的作用和影响。

不仅流体的运动如此，自然界中一切物体的运动也都是决定于其内因和外因，只是形式有所不同而已。如果我们不从事物内部的矛盾关系上，以及这事物与它事物的相互联系和相互影响上去研究事物的发展变化，那就不可能真正了解事物发展变化的必要条件和根据，也就不可能求得事物运动的规律。

质量守恒定律和能量守恒定律是自然界中一切物质运动都必须遵循的普遍规律。流体作为物质的一种形态，必然也服从这些规律。另外，流体力学是研究流体宏观机械运动的学科。而牛顿的力学定律，以及根据它导出的动量定理、动量矩定理、动能定理等，都是物体宏观机械运动应遵循的一般规律。因此，流体力学中的基本规律实质上就是将上述的普遍规律和一般规律应用于流体上，并考虑流体有流动性的特点而得到的。

不同物质形态的物体，具有不同的物理力学性质，因而它们的运动又都各有其特殊性，各自遵循不同的规律。所以力学的各个分支又各有其独特的理论体系。但是，当不同物质形态的特性不能显示其区别时，不同形态的物体在运动规律上的差别也就消失了。例

如，液体和气体是有差别的：气体易于压缩，液体不易压缩；气体一定充满容纳它的空间，没有自由表面；液体可以不充满容器，有自由表面。因此一般情况下液体和气体的运动规律不完全相同。但是当气体的速度远比音速小时，气流的密度变化很小，气体的压缩性实际上可以忽略（例如在标准状态下如果气流速度不超过60m/s，则不考虑压缩性所引起的相对误差不大于1％）。这样，对于不可压缩流体得出的运动规律，完全适用于气体。无数事实证明以上结论的正确性。

流体的连续介质模型：众所周知，任何物体都是由不断运动着的分子组成的，分子之间有空隙。所以从微观角度看，流体并不是一种连续分布的物质。但是工程实践中要求流体力学解决的问题，一般都具有较大的尺寸，而分子之间的距离（例如$1cm^3$的空气含有2.7×10^{19}个分子）同工程尺寸比较是极其微小的。因此，流体力学可以不去研究微观的分子运动，而只研究流体表现出来的平均力学性质就行了。由于流体力学研究的是流体的宏观机械运动，所以在流体力学中可以把流体看成是由无数流体微团（或称质点）充满的、内部无空隙的连续体，或称为**连续介质**。这就是流体的连续介质假设(或模型)。这里所说的流体微团，是指这样小的一团流体，它的大小和流动的任何特征尺寸相比是微不足道的（可看作一个点），但比分子间距离又大得多。每个微团含有为数众多的分子，从而使我们能用统计平均方法来考察流体的宏观物理量（如压强、速度、密度、温度等），以及它们的变化。

引入了连续介质这个假设，就可不考虑复杂的分子运动，而只考虑流体在外力作用下的机械运动。同时还可进一步认为：表征流体运动和性质的各物理量在空间是连续分布的，从而把连续函数的概念引入到流体力学中来。这样，就可以利用数学分析这一有力的工具来研究流体的运动规律。

并不是任何情况都可将流体看作为连续介质的。例如在研究高空飞行问题时，空气非常稀薄，流体分子间距离与工程尺寸相比不是微不足道的了，那时就不能再把空气看作是连续介质了。

流体力学虽然主要研究流体的机械运动，但自然界的一切事物都是相互联系的，单纯的机械运动是不存在的，尤其是气体的机械运动，总是和热运动分不开的，流体力学只不过着重从机械运动的角度来研究而已。

流体力学在工程建设和工业生产中的应用非常广泛。例如重工业中的冶金、电力、采掘等工业，轻工业中的化工、纺织、造纸工业，交通运输业中的飞机、船舶设计，以及农田灌溉、水利建设、河道整治等工程中，无不有大量的流体力学问题需要去解决。在土建工程和环境工程中，如给水排水、供热通风、燃气供应等工程，都要对水或其他流体进行净化或加热等处理，以及通过管道或渠道输送给用户或车间，在其设备和系统的设计、运行管理及施工中也会遇到一系列的流体力学问题需要解决。在评价废水、废气对环境污染的影响，设计铁路或公路的桥梁、路基排水、隧洞通风等设施时，也需要用到很多流体力学的知识。因此，流体力学是土建、环境工程类大多数专业教学计划中的一门重要的专业基础课。上述各专业的科技人员必须很好地掌握流体力学的基础知识，才能作好各自的岗位工作，为人民服务。

§ 1-2 流体力学的发展简史

流体力学与其他学科一样，是人类在生产实践和与自然作斗争中逐渐发展起来的。流体力学形成和发展的历史可分四个阶段。

第一阶段　流体力学形成的萌芽阶段（16世纪以前的时期）。

水和空气是人类在生活和生产中接触频繁的物质。远在原始社会，人类已开始利用河、湖作为交通的途径。随着氏族社会由渔猎逐渐发展到以农业为经济基础的时代，为了保证农业生产，人类开始了与洪水作斗争和利用水的活动。当时在防洪、灌溉、排水和水力的利用等方面，出现了不少原始的工程和创造。随着生产力的不断发展，这些工程的规模在不断扩大，复杂程度也在不断提高，显示了当时人类对水流的性质已有初步的认识。不过，这些知识往往都停留在直接经验阶段，还缺乏科学的概括，因而未能总结成系统的理论。

最早的流体力学理论是公元前250年左右由希腊哲学家阿基米德（Archimedes 287—212B.C.）提出的《论浮体》，它至今仍是流体静力学的一个重要的组成部分。但此后长达17世纪之久，流体力学未见有重大的进展。当时正是封建生产方式在世界范围内占统治地位的时期。由于封建制度的统治和神权思想的束缚，生产力发展缓慢，自然科学的发展受到了很大的限制。直到15世纪后期，在由意大利开始的文艺复兴时期，流体力学发展的停留局面才被打破。公元1500年意大利物理学家和艺术家达·芬奇(Da Vinci 1452～1519)提出了《论水的运动和水的测量》一文，并导出了不可压缩流体的质量守恒方程。可惜他的著作到19、20世纪才被发现，因此对推动流体力学的发展未能起到重大的作用。

总的看来，在16世纪以前，近代的自然科学还未形成。人类对自然界的认识，还只是一些直观的轮廓，以及和哲学混在一起的观念。流体力学还没有具备发展成一门独立科学的条件。但是人类在长期生产实践中积累的丰富经验，却为流体力学的发展打下了感性认识的基础。

第二阶段　流体力学奠定了作为一门独立科学的基础阶段（由16世纪中叶到18世纪中叶）。

中世纪后期，资本主义生产关系在封建社会内部生产力发展的基础上逐渐成长起来。尤其是地理大发现以后，欧洲资产阶级开始了掠夺殖民地的活动，同时也给新兴资产阶级开辟了海外市场，因而带来了欧洲工商业和航海事业的空前繁荣。随着生产力的发展和技术的进步迫切需要发展自然科学。在这种形势下，流体力学也迅速地发展起来。

由16世纪末叶到17世纪中叶是这一阶段的前期。在这时期，由于人们还未找到力和运动之间的普遍联系，尚未发现数学分析的方法，所以当时的一些成就都偏重于流体静力学方面。

由17世纪中叶到18世纪中叶是这一阶段的后期。1687年牛顿（I.Newton 1642～1727)提出了著名的力学定律，奠定了物质机械运动的理论基础。大致同时创立的微积分原理，也为流体力学的发展提供了必要的条件。1738年瑞士物理学家伯诺里（D.Bernoulli 1700～1782）在他写的《水动力学》一书中首次系统地阐明了水动力学的一些基本概念，并用能量原理解决了一些流动问题。1755年瑞士数学家欧拉（L.Euler 1707～1783）在

他的著作《流体运动的一般原理》中建立了理想流体运动微分方程式。他首先应用数学分析方法研究流体力学问题，为理论流体力学的发展开辟了新的道路。这些成就为流体动力学奠定了基础。

第三阶段　流体力学沿着古典流体力学和水力学两条道路发展的阶段（由18世纪中叶到19世纪末）。

欧拉提出的不考虑流体内部摩擦阻力的理想流体，是一种经过简化的抽象的流体。只有在摩擦阻力很小的流动中，由这个方程求得的解答才能较好地符合实际。否则，理论得到的结果甚至可能是荒谬的。到19世纪，急剧发展的工程技术又向流体力学提出了许多用理想流体无法解决的问题。在这种情况下，1826年法国工程师纳维埃（L.M.H.Navier 1785～1836）首先提出了考虑流体内部摩擦阻力的粘性流体运动微分方程。此后，很多人致力于研究该微分方程的数学解答。这些研究大大丰富了流体力学的内容，逐渐形成现在的所谓古典流体力学。

粘性流体运动微分方程虽然考虑了摩擦阻力，但它的形式比较复杂，只有在极简单的情况下才能求得解答。但是，当时迅速发展的生产又向流体力学提出了一系列问题，要求解决。于是人们不得不求助于实验，以便根据工程总结与模型试验来解决工程技术问题。水力学就是这样逐渐形成的。水力学是在伯诺里成就的基础上，利用大量的实验资料，来解决那些在古典流体力学中无法解决的问题的。

在当时条件下，流体力学沿着古典流体力学和实用水力学两个方向发展，是为了适应生产发展的需要，因而是必然的。这也大大推动了实验技术的发展。但后来这一对孪生的学科却处于严重分离状态。这种理论和实践的脱节，在这个阶段的后期阻碍了流体力学的发展。

第四阶段　发展成为近代流体力学的阶段（由19世纪末到现在）。

19世纪是资本主义工业发展的重要阶段。由英国开始的工业革命，到19世纪末在欧美等资本主义国家已接近完成。资本主义大机器生产的建立不仅引起生产上的大革命，同时也要求科学技术的巨大进步，以适应生产发展的需要。但是，在此以前的自然科学界都处在形而上学观点和方法的束缚之中。古典流体力学与水力学的长期分离也正是这种观点的反映。到19世纪，由于生产的发展，人们开始与更广泛的自然现象接触。逐渐发现自然界的事物是发展变化的，不同事物之间是互相联系和可以转化的，因而开始用发展变化的眼光来考察问题。19世纪70年代，恩格斯（F.Engels 1820～1895）写了《自然辩证法》，大大地帮助了自然科学从形而上学和唯心主义的束缚中解放出来，为自然科学的迅速发展奠定了坚实的基础。

在上述的历史背景下，从19世纪后期开始，流体力学以空前的速度蓬勃地发展起来。流体力学在这一阶段的发展有以下两个特点：

（1）理论与实验密切结合，大大促进了流体力学的发展速度。

19世纪后期，以数学分析为主要研究工具的古典流体力学和以实验为主要研究方法的实用水力学有了互相接近的趋势。英国人雷诺（O.Reynolds 1842～1912）于1882年首先阐明的相似原理，大大提高了对实测资料进行理论概括的能力，从而加速了理论与实验的结合。雷诺以后，实验技术有了很大提高，实验的作用也有所扩大。研究流体运动的实验室（水力学实验室和空气动力学实验室）陆续建立。水力学实验由以现场进行的实物观

测为主，逐渐发展为实物观测与模型试验并重。实验的目的也不像先前那样局限于解决工程具体问题，同时还加强了对基本理论的验证和基本规律的寻求。理论和实验的密切结合，是近代流体力学迅速发展的重要因素。

（2）理论与生产实践的密切联系，使流体力学的研究领域不断扩大，出现了很多新的分支。

这一阶段的最重要特点还在于理论与生产实践的紧密联系。流体力学逐渐广泛地应用于生产实践。在生产实践的推动下，大大丰富了流体力学的内容。流体力学的研究领域不断扩大，出现了许多新的分支。

近代流体力学的发展，首先是和本世纪航空事业的蓬勃兴起分不开的。例如平面势流理论、机翼理论、螺旋桨理论和附面层理论等，都是在航空事业的推动下发展起来的。其中德国人普朗特（L.Prandtl 1875～1953）于1904年首先提出的附面层理论，对进一步推动流体力学与生产实践的联系起了重大的作用。其他如与多方面问题有关的紊流理论，与高速飞行和涡轮机制造有关的气体动力学理论等，本世纪以来都获得了巨大的成就。40年代以来，由于超高速飞行、火箭技术、原子能利用、电子计算机等尖端技术以及其他新兴工业的发展，给流体力学提出了许多新的课题，大大开拓了流体力学的研究领域，促使一些流体力学新分支的诞生，如电磁流体力学、化学流体力学、计算流体力学、非牛顿流体力学、多相流体力学等。这些新分支一般都具有边缘科学的性质。流体力学正越来越多地和其它有关的科学结合，这正是人们的认识由简单到复杂，逐渐认识到物质的不同运动形式之间的相互联系和转化关系的结果。

我国在防止水害和运用水利方面有着悠久的历史。早在公元前的秦朝，就兴修了著名的都江堰。这一灌溉系统经历了二千多年，至今仍在发挥效益。东汉初杜诗制造了水排，就是利用山溪水流驱动鼓风机，用于炼铁。这可以说是近代水力机械的先驱。古代计时工具——铜壶滴漏的出现，说明当时对孔口出流的规律已有了定量的认识。只是由于西方国家进入资本主义社会后，我国在这一长时期内仍处于封建统治之下，阻碍了生产及科学技术的发展，致使我国在流体力学发展成为一门严密的学科的关键时期，未能作出应有的贡献。

中华人民共和国成立以来，生产建设取得了巨大成就，科学技术发展空前繁荣。结合电站、灌溉、造船、航运、石油开采、城市建设、环境保护……等工程和工业建设的需要，人们对流体力学进行了大量的理论和实验研究，获得了很多重要的成果。现在国内外已有不少华夏子孙，以其在流体力学方面的卓越成就，跻身于当今世界著名学者之列。随着我国社会主义现代化建设事业的进一步发展，党的改革开放政策的进一步贯彻落实，我国的流体力学工作者必将为流体力学的发展作出更大的贡献。我们也寄希望于本书的青年读者。

§ 1-3 作用于流体上的力

研究流体运动的规律必然要从分析作用于流体上的力着手。若在所研究的流体中任取一小块流体A，并把它作为隔离体来看。外界作用于这块流体上的力按其作用方式不同只有这样两类：表面力和质量力。

表面力　周围流体通过直接接触而作用于A表面上的力称为表面力。由于表面力分布在A表面上，所以表面力要用应力来度量。如图1-1，在A的表面上任选一a点，在其周围取一包含a点在内的微元面积$\varDelta A$。以$\varDelta F_s$表示作用在$\varDelta A$上的表面力，$\varDelta F_s$通常与$\varDelta A$斜交。

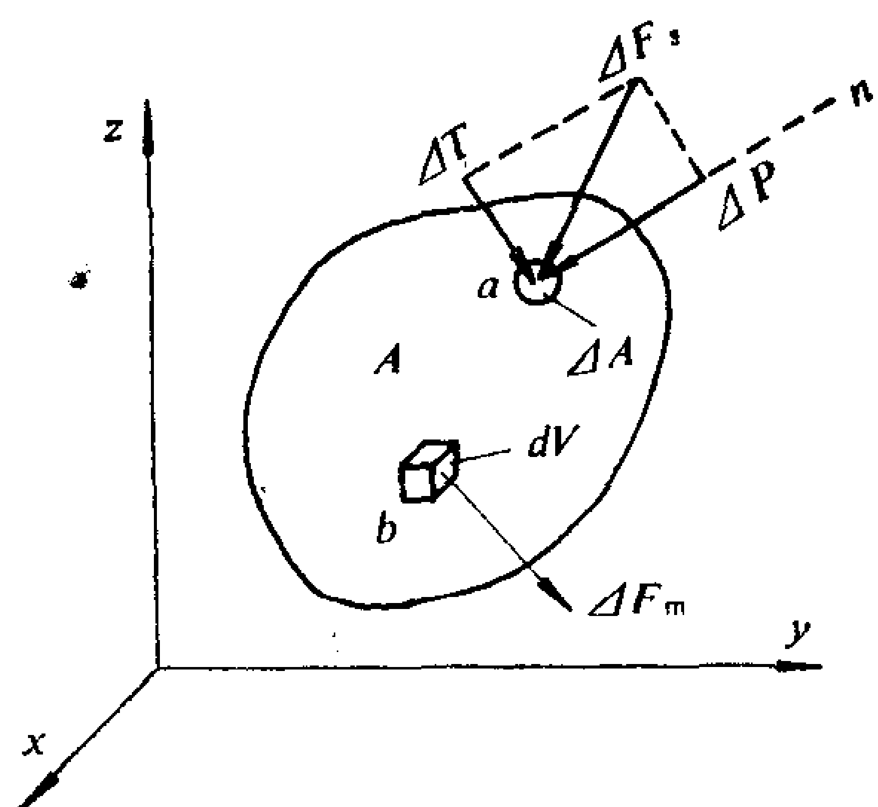


图 1-1　表面力和质量力

流体力学中为了今后研究方便，一般把$\varDelta F_s$分解为两个分力：沿$\varDelta A$法线方向的$\varDelta P$和沿切线方向的$\varDelta T$。由于流体不能承受拉力，$\varDelta P$一定指向$\varDelta A$的内法线方向。故一般称$\varDelta P$为压力，而$\varDelta T$为切向力。比值$\varDelta P/\varDelta A=\bar{p}$是度量$\varDelta A$面上压力强度的量，称为$\varDelta A$上的平均压强。如表面力均匀分布在作用面上，则$\bar{p}$与$\varDelta A$的大小及位置无关。但一般情况下表面力是不均匀分布的，$\bar{p}$值将随$\varDelta A$的大小和位置而变。为了精确表示a点的压力强度，可将$\varDelta A$缩小到趋近于零，这样，比值$\varDelta P/\varDelta A$的极限即能准确地度量a点的压力强度。故以

$$p=\lim_{\varDelta A\to 0}\frac{\varDelta P}{\varDelta A} \tag{1-1}$$

来定义流体中某一点的压力强度，p简称为压强。

同理，当$\varDelta A$趋近于零时，比值$\varDelta T/\varDelta A$的极限即为度量a点切向力强度的量。所以

$$\tau=\lim_{\varDelta A\to 0}\frac{\varDelta T}{\varDelta A} \tag{1-2}$$

作为流体中某一点切向力强度的定义。τ简称为切应力

在国际单位制（SI）中，力的单位用牛顿（N），面积的单位用平方米（m^2），所以压强或切应力的单位用帕斯卡($1Pa=1N/m^2$)。在工程单位制中，力用公斤力(kgf)，面积用平方厘米（cm^2），压强或切应力的常用单位为kgf/cm^2。

质量力　作用在所取流体A的每个质点上，并与A的质量成正比。这种力称为质量力。重力就是最常见的质量力。又如流体作加速运动时，根据达朗伯尔(D'Alembert)原理虚加于流体质点上的惯性力，也是质量力。

作用于流体上的质量力通常用单位质量力来度量。如在A中围绕b点取一微元体积$\varDelta V$，作用于其上的质量力为$\varDelta\vec{F}_m$。则作用b处单位质量上的质量力为：

$$\vec{f}=\lim_{\varDelta V\to 0}\frac{\varDelta\vec{F}_m}{\rho\varDelta V}$$

对于均质流体，因质量与体积成正比，所以质量力也称为体积力。均质流体的单位质量力为：

$$\vec{f}=\frac{\vec{F}_m}{\rho V} \tag{1-3}$$

式中$\vec{F}_m$为作用于流体A上的质量力，ρ为流体密度，V为流体A的体积。

在笛卡尔坐标系中，单位质量为$\vec{f}$在三个坐标轴方向的分量f_x、f_y、f_z分别为

$$f_x=\frac{F_{mx}}{\rho V},\quad f_y=\frac{F_{my}}{\rho V},\quad f_z=\frac{F_{mz}}{\rho V} \tag{1-4}$$

单位质量力及其分量的单位是m/s^2，与加速度的单位相同。

第二章　流体的主要物理性质

既然自然界中的各种流动都是由流体本身的物理性质和流体所在的外界条件所决定的，在研究流体运动规律之前，有必要先介绍影响流体机械运动的主要物理性质。它们是流体的密度、重度、压缩性和膨胀性、粘滞性、表面张力。

§ 2-1　流体的密度和重度

流体和其他物体一样，具有质量和重量。质量的存在使流体运动时具有惯性；而重量则使流体有从高处流向低处的趋势。

单位体积流体所具有的质量称为密度，通常用ρ表示。如均质流体的体积为V，质量为M，则其密度为

$$\rho = \frac{M}{V} \tag{2-1}$$

对于非均质流体，各点的密度不同。要确定空间某点流体的密度，可在该点周围取一微元体积$\varDelta V$，若它的质量为$\varDelta M$，则该点的密度为

$$\rho = \lim_{\varDelta V \to 0} \frac{\varDelta M}{\varDelta V} = \frac{dM}{dV} \tag{2-2}$$

单位体积流体所具有的重量称为重度，通常用γ表示。如体积为V的均质流体的重量为G，则该流体的重度为

$$\gamma = \frac{G}{V} \tag{2-3}$$

非均质流体的重度为

$$\gamma = \lim_{\varDelta V \to 0} \frac{\varDelta G}{\varDelta V} = \frac{dG}{dV} \tag{2-4}$$

在国际单位制中，密度的单位为kg/m^3、重度的单位为N/m^3。在工程单位制中，密度的单位为$kgf \cdot s^2/m^4$，重度的单位为kgf/m^3。

由于重量等于质量乘以重力加速度g，所以密度和重度有下列关系：

$$\gamma = \rho g \tag{2-5}$$

物理学中将物体的密度ρ（或重度γ）与4℃时蒸馏水的密度ρ_w（或重度γ_w）之比称为比重S，即

$$S = \frac{\rho}{\rho_w} = \frac{\gamma}{\gamma_w} \tag{2-6}$$

显然，4℃时水的比重为1；而水银的比重一般采用$S_{汞} = 13.6$。比重是一个无量纲量，切勿与重度混淆。

表2-1中给出了几种常用流体的密度和重度。其中下列数值在今后算题时经常用到，

常用流体的密度和重度 **表 2-1**

流体名称	温度 (°C)	密度 (kg/m³)	重度 (N/m³)
蒸馏水	4	1000	9807
海水	15	1020～1030	10000～10100
普通汽油	15	700～750	6860～7350
石油	15	880～890	8630～8730
润滑油	15	890～920	8730～9030
酒精	15	790～800	7750～7840
水银	0	13600	133400
熔化生铁	1200	7000	68600
空气	0	1.293	12.68
氧	0	1.429	14.02
氮	0	1.251	12.28
氢	0	0.0899	0.881
一氧化碳	0	1.25	12.27
二氧化碳	0	1.976	19.40
二氧化硫	0	2.927	29.1
水蒸汽	0*	0.804	7.88

* 为便于计算推算到0°C。

初学者牢记它们将是有益的。

常温下水的密度和重度一般采用：

SI制 $\rho_w = 1000\text{kg/m}^3$，$\gamma_w = 9807\text{N/m}^3$

工程单位制 $\rho_w = 102\text{kgf}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4$，$\gamma_w = 1000\text{kgf/m}^3$

标准大气压下290°K干空气的密度和重度在SI制为 $\rho_a = 1.20\text{kg/m}^3$，$\gamma_a = 11.77\text{N/m}^3$。

§ 2-2 流体的压缩性和膨胀性

一般说来，流体的密度和重度随温度和压强的改变而变化，这是由于流体内部分子间距离改变引起的。温度升高可使流体分子间距增大，体积膨胀，密度变小；压强增加可使流体分子间距减小，体积压缩，密度变大。但气体和液体其压缩性和膨胀性差别很大。液体的压缩性和膨胀性都很小，除少数特殊情况外，通常把液体当作为不可压缩流体，即认为其密度或重度不随温度和压强而变。气体的压缩性和膨胀性比液体大得多，无论是温度还是压强，对气体密度的影响一般都应予考虑，所以通常将气体视为可压缩流体，认为气体的密度（或重度）是温度和压强的函数。

一、液体的压缩性和膨胀性

液体的压缩性通常用**压缩系数**β_p来表示。它的定义是：当压强增加一个单位时液体体积的相对减小值。设V为液体原有体积，如压强增加dp后，体积减小dV，则压缩系数为

$$\beta_p = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp} \qquad (2\text{-}7)$$

β_p的单位是压强单位的倒数，即m^2/N。由于压强增大时液体体积必然减小，式中dV/dp

永为负值，故于右侧加一负号，以保持β_p为正。

流体被压缩前后，其质量ρV没有改变。因而$d(\rho V)=\rho dV+Vd\rho=0$或$\frac{dV}{V}=-\frac{d\rho}{\rho}$。故压缩系数也可写成

$$\beta_p=\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dp} \qquad (2-8)$$

流体受压后体积缩小，但压强撤除后还能恢复到原有状态，故压缩性也可用弹性模量E来表示。压缩系数的倒数即为弹性模量：

$$E=\frac{1}{\beta_p}=-V\frac{dp}{dV}=\rho\frac{dp}{d\rho} \qquad (2-9)$$

显然，E的单位与压强的单位相同，即N/m^2。表2-2列举了水在0℃时不同压强下的压缩系数。表中压强单位为工程大气压的符号（$1at=98070N/m^2$）。

水的压缩系数　　表 2-2

压　强(at)	5	10	20	40	80
$\beta_p\times10^9(m^2/N)$	0.538	0.536	0.531	0.528	0.515

液体的膨胀性一般用体积膨胀系数β_t来表示。它的定义是在一定压强下温度增高1℃时体积的相对变化，即

$$\beta_t=\frac{1}{V}\frac{dV}{dT} \qquad (2-10)$$

表2-3给出了一个大气压下不同温度时水的膨胀系数。

水的膨胀系数　　表 2-3

温　度(℃)	1～10	10～20	40～50	60～70	90～100
$\beta_t\times10^4(1/℃)$	0.14	0.15	0.42	0.55	0.72

可见，水的压缩性和膨胀性都很小。压强升高一个大气压，水的体积减小率约为二万分之一。所以一般情况下，水的压缩性和膨胀性可以忽略不计。但是，压缩性或膨胀性的大或小是相对的，对于不同问题其影响有所不同。例如水管阀门突然关闭时所发生的水击现象，就必须考虑水的密度随压强的变化；又如自然循环的热水采暖系统，也必须考虑水的重度随温度的变化，否则就无法解释一些现象并进行计算。

为了便于应用，表2-4中列举了一个大气压下水在不同温度时的重度和密度。

二、气体的压缩性和膨胀性

完全气体的状态方程表达了一般情况下气体的密度随温度与压强而变的函数关系

$$\frac{p}{\rho}=RT \qquad (2-11)$$

式中p为气体的绝对压强（N/m^2）；ρ为气体的密度（kg/m^3）；T为气体的绝对温度

水的重度和密度　　表 2-4

温度 (°C)	重度 (kN/m^3)①	密度 (kg/m^3)	温度 (°C)	重度 (kN/m^3)	密度 (kg/m^3)
0	9.806	999.9	35	9.749	994.1
1	9.806	999.9	40	9.731	992.2
2	9.807	1000.0	45	9.710	990.2
3	9.807	1000.0	50	9.690	988.1
4	9.807	1000.0	55	9.657	985.7
5	9.807	1000.0	60	9.645	983.2
6	9.807	1000.0	65	9.617	980.6
7	9.806	999.9	70	9.590	977.8
8	9.806	999.9	75	9.561	974.9
9	9.805	999.8	80	9.529	971.8
10	9.804	999.7	85	9.500	968.7
15	9.798	999.1	90	9.467	965.3
20	9.789	998.2	95	9.433	961.9
25	9.778	997.1	100	9.399	958.4
30	9.764	995.7		—	—

①在国际单位制中常将10^3写为千用符号k表示。

（K）；R为气体常数。在标准状态下

$$R=8314/m \quad (J/kg\cdot K) \tag{2-12}$$

m为气体的分子量。空气的气体常数为$R=287J/kg\cdot K$。

在中等压强范围内，对于空气及其它不易液化的气体，（2-11）式相当准确。只有在非常低的温度和非常高的压强下，气体接近液化状态时，该式才会出现较大的误差。

表2-5列举了大气压下不同温度时空气的重度和密度。

标准大气压下空气的重度和密度　　表 2-5

温度 (°C)	重度 (N/m^3)	密度 (kg/m^3)	温度 (°C)	重度 (N/m^3)	密度 (kg/m^3)
0	12.70	1.293	40	11.05	1.128
5	12.47	1.270	50	10.72	1.093
10	12.24	1.248	60	10.40	1.060
15	12.02	1.226	70	10.10	1.029
20	11.80	1.205	80	9.81	1.000
25	11.62	1.185	90	9.55	0.973
30	11.43	1.165	100	9.30	0.947
35	11.23	1.146		—	—

若要分别寻求密度单独随压强或温度变化的函数关系，则还需要补充一个与气体的变化过程有关的方程。

等温过程：气体状态变化过程中温度保持不变，即T＝常数。由（2-11）式可得

$$\frac{p}{\rho}=\text{常数} \tag{2-13}$$

由（2-13）式可求得等温过程中气体的弹性模量和压缩系数。微分（2-13）式得

$\frac{dp}{d\rho}=\frac{p}{\rho}$，因此有

$$E=\rho\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{T=\text{const}}=p \qquad (2\text{-}14)$$

$$\beta_p=\frac{1}{E}=\frac{1}{p}$$

即等温过程中气体的弹性模量就等于它的压强。

绝热过程：气体状态变化时与外界没有热交换的过程称为绝热过程。绝热过程中压强和密度的变化遵循下列过程方程

$$p/\rho^k=\text{常数} \qquad (2\text{-}15)$$

式中k为绝热指数，它是定压比热C_p与定容比热C_v的比值，即$k=C_p/C_v$。对于空气$k=1.40$。微分（2-15）式得$\frac{dp}{d\rho}=k\frac{p}{\rho}$，因此有

$$E=\rho\frac{dp}{d\rho}=kp \quad \text{或}\beta_p=1/kp \qquad (2\text{-}16)$$

可见，绝热过程中气体的弹性模量为其压强的k倍。

等压过程：气体状态变化过程中压强保持不变，即$p=$常数。将$\rho=M/V$代入状态方程（2-11）式中，得$pV=RMT$。式中p、M、R都是常数，故微分此式后得$\frac{dV}{dT}=\frac{RM}{p}=\frac{V}{T}$，代入体积膨胀系数式中：

$$\beta_t=\frac{1}{V}\frac{dV}{dT}=\frac{1}{T} \qquad (2\text{-}17)$$

即在等压过程中气体的体积膨胀系数为其温度的倒数。

§2-3 流体的粘性

一、粘性的作用

虽然静止流体不能承受任何切力，但是，当流体运动时，如其内部出现相对运动，则各质点之间会产生切向的内摩擦力以抵抗其相对运动。流体的这种性质称为粘性。产生的内摩擦力也称为粘滞力。

现举例说明流体的粘性。假设在原先速度呈均匀分布的平行流动中，沿流动方向放入一块很薄的平板（见图2-1）。当流体沿平板流过时，紧挨着平板的一层流体，将粘附在平板上不再运动。而和它相邻的一层流体，在惯性的作用下有保持其原有运动的趋势。假如流体没有粘性，第二层流体将以原有的速度运动。但实际流体都是有或大或小的粘性的，因此当两层流体出现相对运动时，它们之间就会产生内摩擦力，阻滞第二层流体的运动，使其速度减慢下来。当第二层流体的速度减小后，它和第三层流体之间又会出现相对运动，因而这两层流体之间也会产生内摩擦力，使第三层流体的速度也减慢下来。

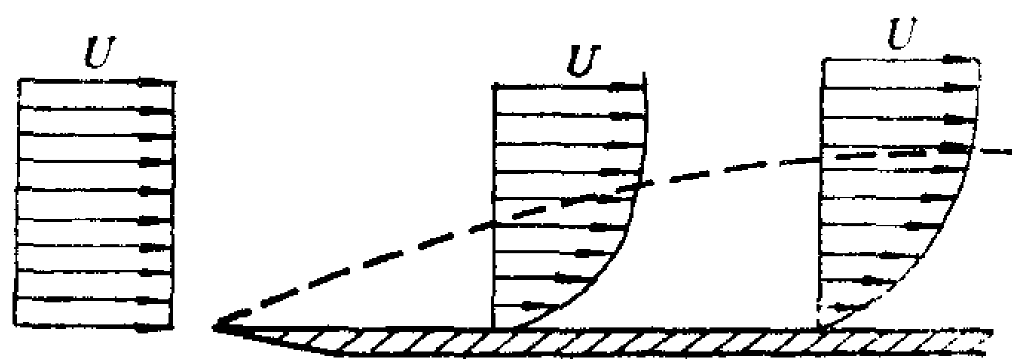


图 2-1 粘性的作用

如此一层一层地影响下去，原则上将使整个流体内部都出现相对运动，都会有内摩擦力作用。

由此可见，流体沿固体壁面运动时所受到的流动阻力，实际上不是流体与固体之间出现的摩擦力，而是流体内部各流层之间产生的摩擦力，故称为内摩擦力。固体壁面的存在只是引起流动阻力的外部条件，流体有粘性才是产生流动阻力的内在原因。如果流体没有粘性，流动时就不会出现阻力。

内摩擦力总是成对出现的。运动较快的流层带动较慢的流层，因而施加在较慢流层上的是与流速方向一致的摩擦力；运动较慢的流层阻滞较快的流层，施加在较快流层上的是与流速方向相反的力。这两个摩擦力大小相等方向相反。

粘性是流体在运动过程中使其出现阻力、产生机械能损失的根源。粘性的存在也给流体运动规律的分析带来很多困难。所以它是对流体运动有重要影响的一个属性。

二、牛顿内摩擦定律

内摩擦力怎样确定？牛顿于1687年提出了一个假说。他指出，处于相对运动的两层相邻流体之间的内摩擦力T：

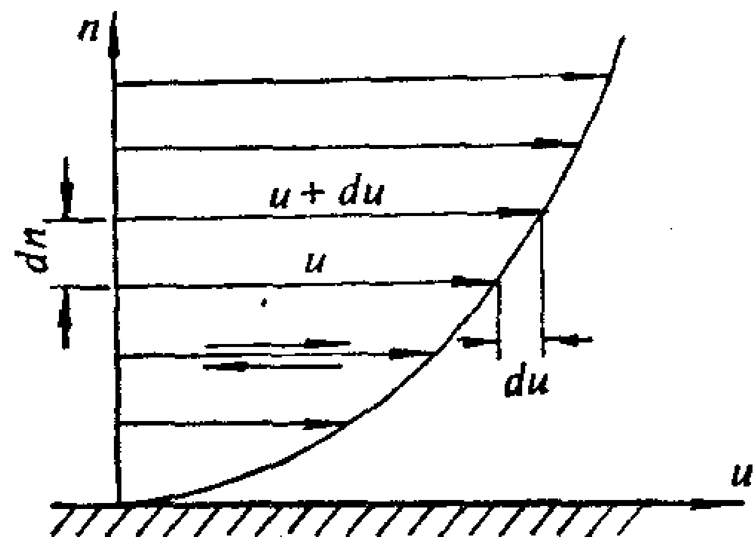


图 2-2　速度梯度与切应力

1）与作用面法线方向的速度梯度du/dn成正比；

2）与作用面的面积A成正比；

3）与流体的物理性质有关。

速度梯度du/dn是表达流层之间相对速度大小的量。速度的变化是连续的。同一流速分布，相邻两层的速度差du随所取流层厚度dn的不同而变化（见图2-2）。所以只有用速度梯度才能正确地反映流层间的相对运动情况。

牛顿的假说已为后来的无数实验所证明，因此我们现在称它为牛顿内摩擦定律。

牛顿内摩擦定律可以用下列关系式来表示：

$$T=\mu A\frac{du}{dn} \tag{2-18}$$

式中μ是比例常数，在A和$\frac{du}{dn}$相同的条件下，粘性越大的流体，其内摩擦力T越大，因而μ也越大。故可以用μ来度量流体的粘性。μ称为动力粘性系数，或称为动力粘度。

单位面积上的摩擦力τ为

$$\tau=\frac{T}{A}=\mu\frac{du}{dn} \tag{2-19}$$

由于τ的量纲为$ML^{-1}T^{-2}$，因而μ的量纲为：

$$[\mu]=[\tau]\Big/\left[\frac{du}{dn}\right]=ML^{-1}T^{-2}/T^{-1}=ML^{-1}T^{-1}$$

在国际单位制中，μ的单位为kg/m·s，亦即N·s/m²或Pa·s。在绝对单位制（CGS制）中μ的单位用泊P（Poise）或厘泊cP（Centipoise），$1P=1dyne\cdot s/cm^2=0.1Pa\cdot s$，$1cP=0.01P=10^{-3}Pa\cdot s$。

在分析粘性流体的运动规律时，动力粘度μ和密度ρ经常同时出现，流体力学中习惯于把它们组成一个量，用ν来表示，称为运动粘性系数或运动粘度。

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{2-20}$$

ν的量纲是L^2T^{-1}，ν的单位在SI制和工程单位制中都是m^2/s，在CGS制中为cm^2/s，$1cm^2/s$又称为斯St（Stokes）。如ν值较小，可用厘斯cSt（Centistokes）。1cSt = 0.01St。

速度梯度$\frac{du}{dn}$不仅表达了流层之间的相对运动，它还反映了流体微团的剪切变形速度（也称角变形速率）。如在图2-3所示的流动中，在厚为dn的流层内取一矩形微元流体。由于沿n方向各点的速度不同，经dt时间后，该流体微团不仅有位置的移动，还伴随着形状的改变。由原来的矩形变成了平行四边形。也就是产生了剪切变形（也称角变形）。流体微团的剪切变形速度可用单位时间内矩形微团的内角变化$d\theta/dt$来度量。由图2-3可见

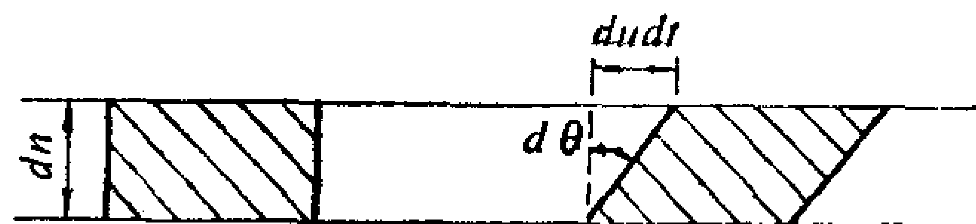


图 2-3　流体微团的剪切变形

$$tg(d\theta) = dudt/dn$$

因dt为微分时段，$d\theta$为微量，故可认为$tg(d\theta) \approx d\theta$，由此可得角变形速率为$\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dn}$，因而牛顿内摩擦定律也可写成

$$\tau = \mu \frac{d\theta}{dt} \tag{2-21}$$

上式表明，流体由粘性引起的内摩擦力与剪切变形速度（或角变形速率）成正比。所以流体的粘性可认为是抵抗剪切变形的特性。

并非所有的流体都是符合牛顿内摩擦定律的。符合牛顿内摩擦定律的流体称为牛顿流体，不符合的称为非牛顿流体。多数分子结构简单的液体（如水、酒精、汽油、水银等）和一般气体都是牛顿流体。牛顿流体的τ与$\frac{d\theta}{dt}$之间呈直线关系。非牛顿流体的种类很多，按其流变特性可分为三类：塑性流体、拟塑性流体和膨胀型流体。图2-4中绘出了它们的内摩擦力与剪切变形速度的关系曲线，这种曲线叫做流变曲线。它反映了不同种类的流体在流变特性上的差别。在温度和压强不变的条件下，牛顿流体的动力粘度不随剪切变形速度而变，μ为常数。塑性流体具有初始屈服应力τ_0，当施加的切应力低于τ_0时，塑性流体的内部不发生相对运动，其性质像固体。只有当切应力大于τ_0时，塑性流体才开始流动。油漆、油脂、牙膏、污泥浆、温度较低的含蜡原油等都是塑性流体。拟塑性流体的动力粘度随$\frac{d\theta}{dt}$的增大而减小。高分子化合物溶液、水泥浆、乳状液等为拟塑性流体。膨胀型流体的动力粘度随$\frac{d\theta}{dt}$的增大而增大，这类流体较少见，如浓糖溶液，浓淀粉糊等是。非牛顿流体在工业和工程上的用途日益广泛。现已形成一门新兴学科——非牛顿流体力学。本书只讨论牛顿流体。

三、温度对粘度的影响

一般说来，流体的粘度取决于温度和压强。但实验证明，如压强变化范围不特别大，则压强对μ的影响很小，可以忽略。即认为μ仅与温度有关。

实验结果表明，液体的μ随温度的升高而减小；气体的μ则随温度的升高而加大。其原因须从分子的微观运动来说明。概括地说，流体的内摩擦力是由分子间的吸引力和分子热运动导致的动量交换这两个因素综合作用的结果。但两者在液体和气体中所起的作用是不同的。液体中分子间的吸引力是主要的，气体中分子热运动起主要作用。当温度升高时，分子间距增大，吸引力减小；另一方面，分子热运动增强，动量交换加剧。因而液体的粘度减小，气体的粘度增大。

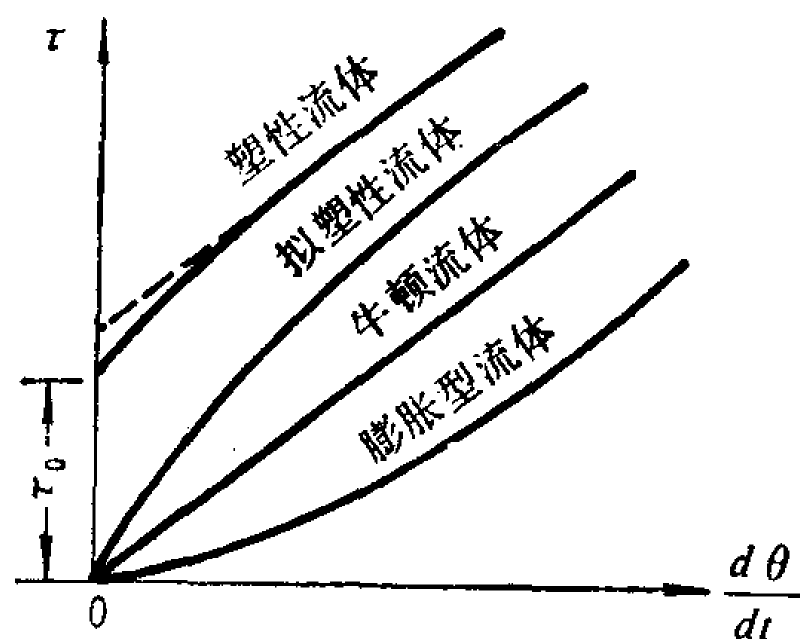


图 2-4　几种流体的流变曲线

在实际计算中，往往查阅手册中各种流体的粘温曲线，或用经验公式计算粘度。本书因限于篇幅，仅介绍水与空气的粘度。表2-6中给出了常压下不同温度时淡水的动力粘度和运动粘度。表2-7中给出了一个大气压下不同温度时空气的μ和ν。

常压下水的粘度　　表 2-6

t (℃)	μ (10^{-3}Pa·s)	ν (10^{-6}m²/s)	t (℃)	μ (10^{-3}Pa·s)	ν (10^{-6}m²/s)
0	1.792	1.792	40	0.654	0.659
5	1.519	1.519	45	0.597	0.603
10	1.310	1.310	50	0.549	0.556
15	1.145	1.146	60	0.469	0.478
20	1.009	1.011	70	0.406	0.415
25	0.895	0.897	80	0.357	0.367
30	0.800	0.803	90	0.317	0.328
35	0.721	0.725	100	0.284	0.296

一个大气压下空气的粘度　　表 2-7

t (℃)	μ (10^{-5}Pa·s)	ν (10^{-6}m²/s)	t (℃)	μ (10^{-5}Pa·s)	ν (10^{-6}m²/s)
0	1.72	13.7	90	2.16	22.9
10	1.78	14.7	100	2.18	23.6
20	1.83	15.7	120	2.28	26.2
30	1.87	16.6	140	2.36	28.5
40	1.92	17.6	160	2.42	30.6
50	1.96	18.6	180	2.51	33.2
60	2.01	19.6	200	2.59	35.8
70	2.04	20.5	250	2.80	42.8
80	2.10	21.7	300	2.98	49.9

四、理想流体

粘性是流动产生阻力的内在原因，它对流体的运动有重要的影响。但是，粘性只有在流体运动时才能显示出来。处于静止状态的流体，粘性不表现有任何作用。

粘性的存在，往往给流体运动规律的研究带来极大的困难。为了简化理论分析，流体力学中提出了理想流体的概念。所谓理想流体就是一种假想的无粘性的流体。当然，这种流体实际上是不存在的，它只是一个想像的物理模型。不计粘性后，对流体运动的分析就

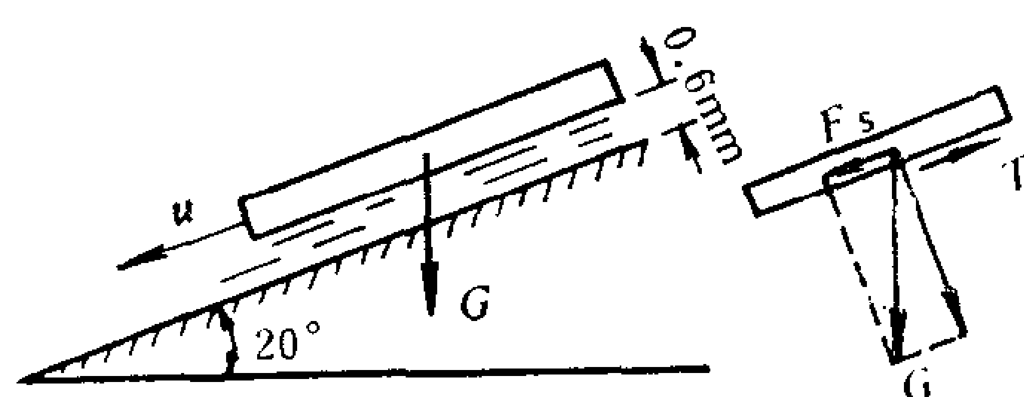
可大大简化，从而能得出一些理论分析的结果。在有些粘性影响不大的流动中，这些结果就能较好地符合实际。如果粘性的影响不能忽略，则可以通过实验加以修正，这样就能比较容易地解决一些实际问题，这也是流体力学中处理复杂问题的一种方法。

理想流体不同于实际流体的流动特点在于：1）质点之间没有切应力作用；2）在固体表面上流体速度可不等于固体表面的速度，亦即流体可以出现“滑移”；3）质点之间没有热的传输，由分子运动论可知，动力粘度μ与热传导系数λ之间存在下列关系：

$$\lambda = \frac{C_v \mu}{m} \tag{2-22}$$

式中C_v是定容比热，m是分子量，对于理想流体，$\mu = 0$，因而$\lambda = 0$。就是说，无粘性流体必然是无热传导的流体；4）流体在固体表面上温度可以不等于固体表面的温度，亦即温度可以出现“突跃”。

【例 2-1】 有一底面积为$60 \times 40 cm^2$的木板，质量为5kg，沿一与水平面成20°角的斜面下滑。油层厚度为0.6mm。如以等速度0.84m/s下滑时，求油的动力粘度μ。



例 2-1图

【解】 木板沿斜面等速下滑，作用在木板上的重力G在斜面方向的分力为F_s应与阻力T平衡。即

$$T = F_s = G\sin 20° = 5 \times 9.81 \times 0.342 = 16.78N$$

根据牛顿内摩擦定律 $T = \mu A \frac{du}{dn}$。油层厚度很薄，可以认为木板与斜面间速度按直线分布，

$$\frac{du}{dn} = \frac{0.84 - 0}{0.0006} = 1400 \ 1/s$$

因此 $$\mu = T \Big/ \left(A \frac{du}{dn} \right) = \frac{16.78}{0.6 \times 0.4 \times 1400} = 0.05 N \cdot s/m^2$$

§ 2-4 液体的表面张力和毛细管现象

一、液体的表面张力

液体虽然不能承受张力，但因其表层分子受指向液体内部的分子力作用，具有尽量缩小表面的趋势，这种收缩趋势的力称为表面张力。

表面张力的作用，使液体表面好象一张均匀受力的弹性薄膜，因而液面上能承受微小的张力。表面张力的存在也会对液体的运动发生影响。例如消防水流的密集与分散，贴附射流的形成，都同表面张力有关。

表面张力的大小，可用液体表面上单位长度所受的张力即表面张力系数σ来度量，其单位按国际单位制为牛顿/米（N/m）。σ的数值随液体的种类、温度和表面接触情况的不同而变。表2-8给出了在一个标准大气压下，水和空气接触的表面张力系数σ随温度的变化值。表2-9给出了几种常见液体的表面张力系数σ。

水的表面张力系数　　表 2-8

温度(℃)	0	10	20	30	40	60	80	100
$\sigma(10^{-3}N/m)$	75.6	74.2	72.8	71.2	69.2	66.2	62.6	58.9

几种常见液体的 σ（20℃与空气接触）　　表 2-9

液体名称	酒精	煤油	苯	原油	润滑油	水	水银
$\sigma(10^{-3}N/m)$	22.3	27	28.9	30	36	72.8	465

二、毛细管现象

表面张力的数值不大，对一般工程流体力学问题，可以忽略不计。但是当内径较小的玻璃管插入液体中时，表面张力会使管中液面上升或下降一个高度，如图2-5所示。这样，用细玻璃管作为仪器测量水位或压强时会产生误差。为了估计这种误差，必须计算一下毛细管现象中上升或下降的液柱高度。

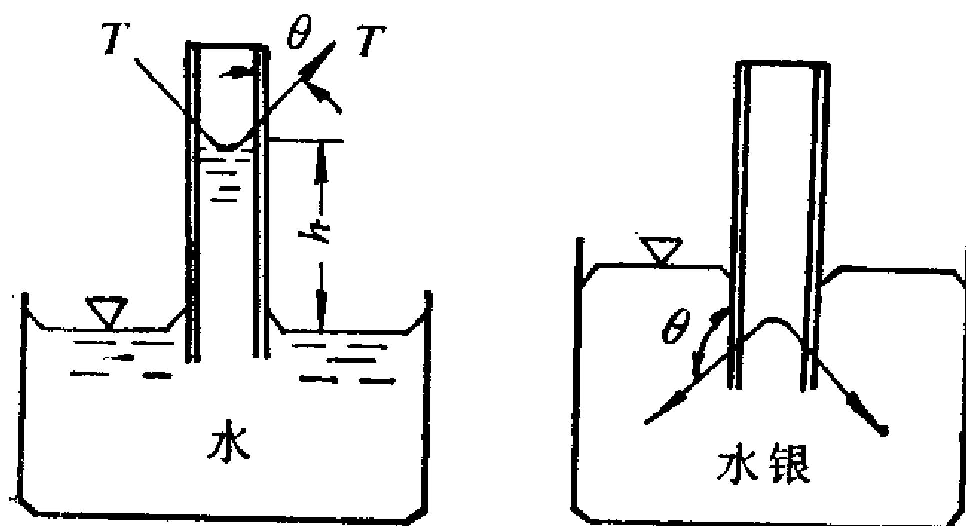


图 2-5　毛细管现象

以图2-5为例，当表面张力与上升液柱重量相等时，液柱就自然平衡。此时有

$$\pi d\sigma\cos\theta=\rho g\frac{\pi d^2}{4}h$$

$$\therefore\ h=\frac{4\sigma\cos\theta}{\rho gd}=\frac{4\sigma\cos\theta}{\gamma d} \qquad (2\text{-}23)$$

实验表明，20℃的水与玻璃的接触角$\theta=0°$，水银与玻璃的接触角$\theta\approx139°$，再由表2-9查得20℃时水的表面张力系数$\sigma=0.073$N/m，水银的$\sigma=0.465$N/m，由表2-1查得水和水银的重度分别为$\gamma_{水}=9790$N/m³和$\gamma_{汞}=133400$N/m³，代入（2-22）式，可得近似公式：

水在玻璃管中的上升高度

$$h=\frac{30}{d}\text{mm} \qquad (2\text{-}24)$$

水银在玻璃管中的下降高度

$$h=\frac{10}{d}\text{mm} \qquad (2\text{-}25)$$

式中玻璃管内径d均以mm计。

由上述公式可见，玻璃管内径d越小，毛细管现象引起的误差越大。所以在实验室中测压管通常用不小于$d=10$mm的玻璃管以减小误差。

习　题

2-1　已知体积为500L（升）的水银，质量为6795kg，试求水银的密度、重度和比重。

2-2　已知水的密度$\rho=1000$kg/m³，求它的重度。若有这种水2L，它的质量和重量各为多少？

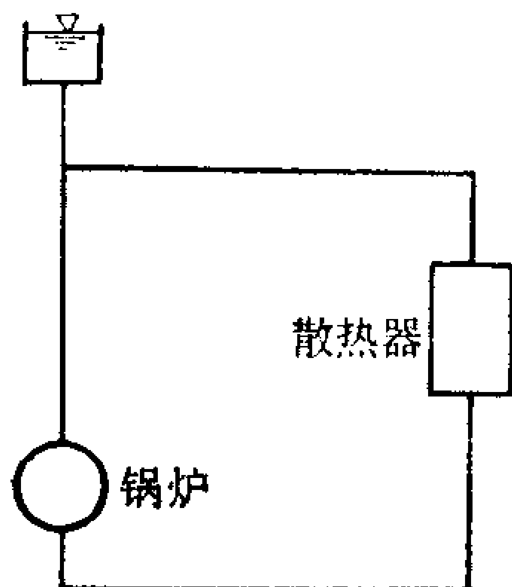
2-3　图示为一水暖系统，为了防止水温升高时体积膨胀将水管胀裂，在系统顶部设一膨胀水箱，

使水有膨胀的余地。若系统内水的总体积为$8m^3$，加温前后温差为50°C，在其温度范围内水的膨胀系数为$\beta_t = 0.0009$ 1/°C，求膨胀水箱的最小容积。

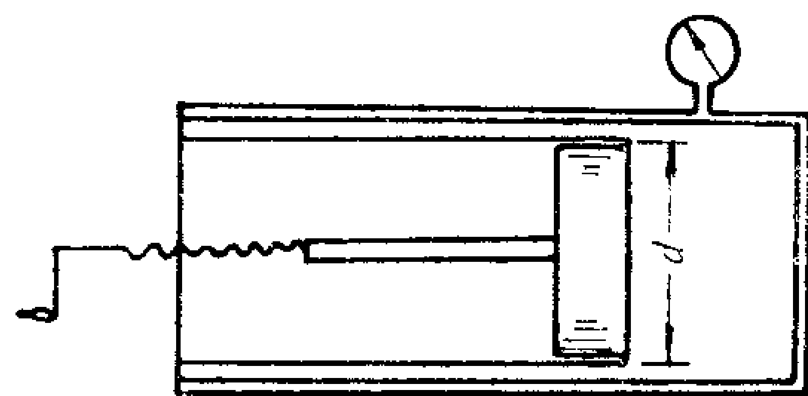
2-4 某封闭容器内空气的压强从101325Pa提高到6×101325Pa，温度则由20°C升高到78°C，问该空气的体积将为原有体积的多少百分比？

2-5 海水在海面附近的密度为$1025kg/m^3$，在海面下8km处的压强为81.7MPa，设海水的平均弹性模量为2340MPa，试求该深度处海水的密度（$1MPa = 1\times10^6Pa$）。

2-6 图示为压力表校正器。器内充满压缩系数为$\beta_p = 4.75\times10^{-10}$1/Pa的油液，器内压强为$10^5$Pa时油液的体积为200mL。现用手轮丝杆和活塞加压，活塞直径为1cm，丝杆螺距为2mm，当压强升高至20MPa时，问需将手轮摇多少转？



题 2-3图



题 2-6图

2-7 某液体的动力粘度为$0.005N\cdot s/m^2$，其比重为0.85，试求其运动粘度。

2-8 某气体的重度为$11.5N/m^3$，运动粘度为$0.157cm^2/s$，试求其动力粘度（用国际单位制）。

2-9 直径为2.5cm的管中，有温度为20°C的空气在流动。在距管壁1mm处空气流速为3cm/s，试求：

1）管壁处的切应力；

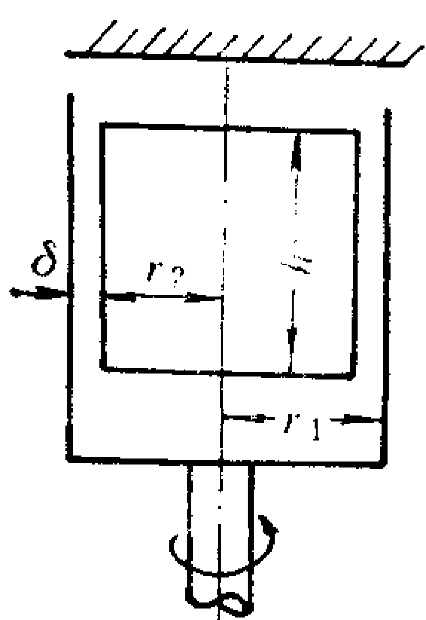
2）单位管长的粘性阻力。

2-10 有一$30\times50cm^2$的矩形平板，浮在油面上，其水平运动的速度为10cm/s，油层厚度$\delta = 10$ mm，油的动力粘度$\mu = 0.09807Pa\cdot s$，求平板所受的阻力。

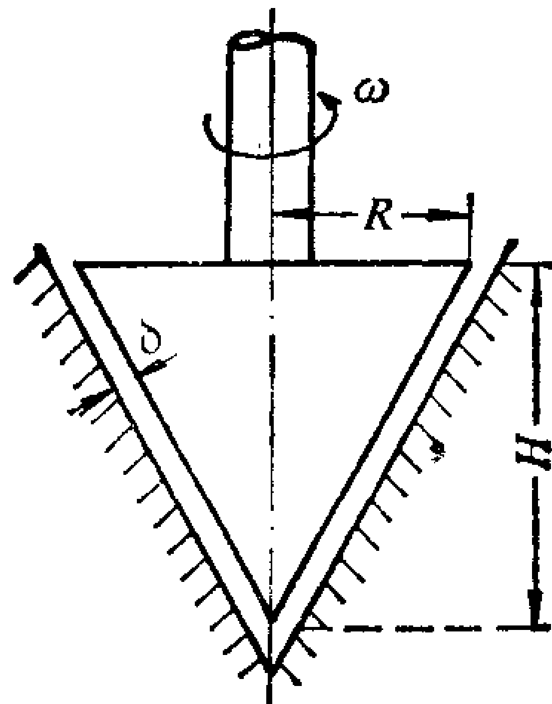
2-11 图示为一转筒粘度计，它由内外两同心圆筒组成，外筒以角速度nr/min转动，通过两筒间的液体将力矩传至内筒。内筒挂在一金属丝下，该丝所受扭矩M可由其转角来测定。若两筒间的间隙$\delta = r_2 - r_1$，底部对内筒的影响不计，试证明动力粘度μ的计算公式为

$$\mu = 15M\delta/[\pi^2 r_1^2 r_2 hn]$$

2-12 一圆锥体绕其中心轴作等角速度$\omega = 16$ 1/s旋转，锥体与固定壁面间的距离$\delta = 1mm$，用$\mu = 0.1Pa\cdot s$的润滑油充满间隙，锥体半径$R = 0.3m$，高$H = 0.5m$，求作用于圆锥体的阻力矩。



题 2-11图



题 2-12图

2-13 在实验室中如果用内径0.6cm和1.2cm的玻璃管作测压管，管中水位由于毛细管现象而引起的上升高度各为多少？

第三章 流 体 静 力 学

这一章将讨论流体在静止状态下的平衡规律及其应用。流体静力学的基本问题是求压强的问题。因此本章的主要内容是阐述静止流体中应力的性质、压强的分布规律，以及作用面上总压力的计算方法。

§3-1 静止流体中应力的性质

静止流体内的应力具有下列两个重要的性质。

第一，静止流体内的应力一定垂直指向作用面。亦即应力的方向与作用面的内法线方向相同。前一章关于粘性的讨论中已知，流体的内摩擦力（即切应力）与作用面法线方向的速度梯度成正比。静止流体内各点的速度为零，因而沿各方向的速度梯度亦为零，所以没有切向应力。

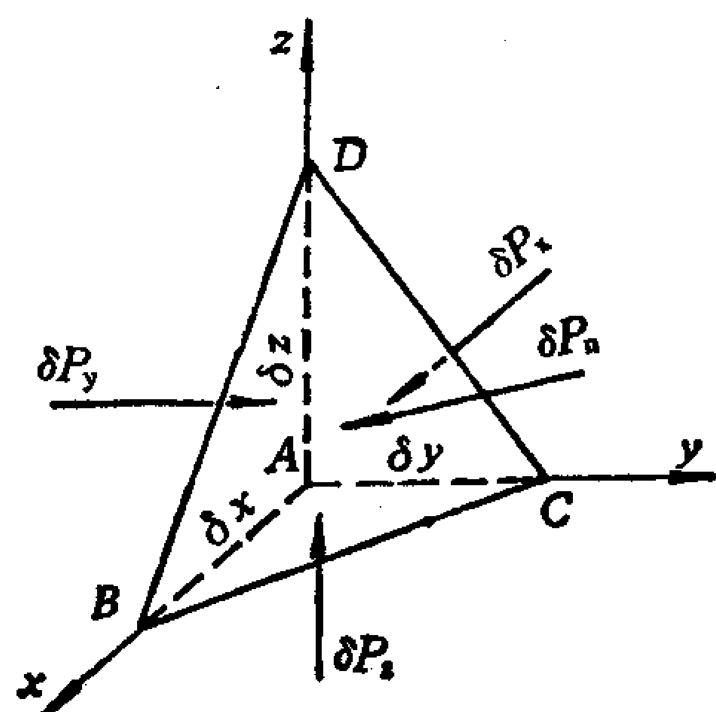


图 3-1 静止流体中的微元四面体

第二，任一点上各方向的流体静压强大小相等，与作用面的方位无关。

为了证明这个特性，在静止流体内部任一点A附近取一微小四面体（见图3-1），它的三个棱边分别取x、y、z三个坐标轴，长度分别为δx、δy、δz。因四面体处于静止状态，作用于其上的外力应是平衡的。由于静止流体中没有切应力，作用在四个面上的表面力只有垂直于各作用面的压力δP_x、δP_y、δP_z和δP_n。设作用在该四面体上的质量力为δF_m。写出x方向的外力平衡方程

$$\delta P_x - \delta P_n \cos(n,\ x) + \delta F_{mx} = 0$$

式中n为斜平面BCD的外法线方向，δF_{mx}为质量力在x方向的分量。

用$\triangle ACD$的面积δA_x除上式

$$\frac{\delta P_x}{\delta A_x} - \frac{\delta P_n \cos(n,x)}{\delta A_x} + \frac{\delta F_{mx}}{\delta A_x} = 0$$

由于斜平面的面积δA_n与$\cos(n,\ x)$的乘积即为该斜平面在yoz平面上的投影，因此$\delta A_x = \delta A_n \cos(n,\ x)$，而

$$\delta F_{mx} = \frac{1}{3}\rho \delta A_x \delta x f_x$$

f_x为单位质量力在x方向的分量。

将δA_x和δF_{mx}代入上式

$$\frac{\delta P_x}{\delta A_x} - \frac{\delta P_n}{\delta A_n} + \frac{1}{3}\rho \delta x f_x = 0$$

若令四面体向A点收缩成为一点，则δx趋近于零，上式可写成

$$\lim_{\delta A_x \to 0} \frac{\delta P_x}{\delta A_x} - \lim_{\delta A_n \to 0} \frac{\delta P_n}{\delta A_n} = 0$$

即
$$p_x - p_n = 0 \quad 或 \quad p_x = p_n$$

同理可证得
$$p_y = p_n \quad 和 \quad p_z = p_n$$

也就是

$$p_x = p_y = p_z = p_n \tag{3-1}$$

因为A点和n的方向是任选的，所以在静止流体内任一点的压强沿各方向都相等。

静止流体中同一点的压强只有一个值，但不同点的压强一般说来是不一样的，而流体又是一种连续介质，故可认为流体静压强是空间坐标x、y、z的连续函数，即

$$p = f(x、y、z)$$

§ 3-2　流体平衡微分方程及其积分

流体静力学的中心问题是求任一点的压强，也就是寻求静止流体中压强分布规律。由上节知道，作用于静止流体上的力只有质量力和压力。所以只要建立静止流体质量力与压力之间的关系，就可求得压强分布规律。

一、流体平衡微分方程

在静止流体中取一微元平行六面体，如图 3-2 所示。六面体的棱边与坐标轴平行，边长为dx、dy、dz。现来分析作用在这个平行六面体上的力。为简便起见，先讨论沿x方向的力，其它沿y和z方向的力，可仿此方法求得类似的结果。

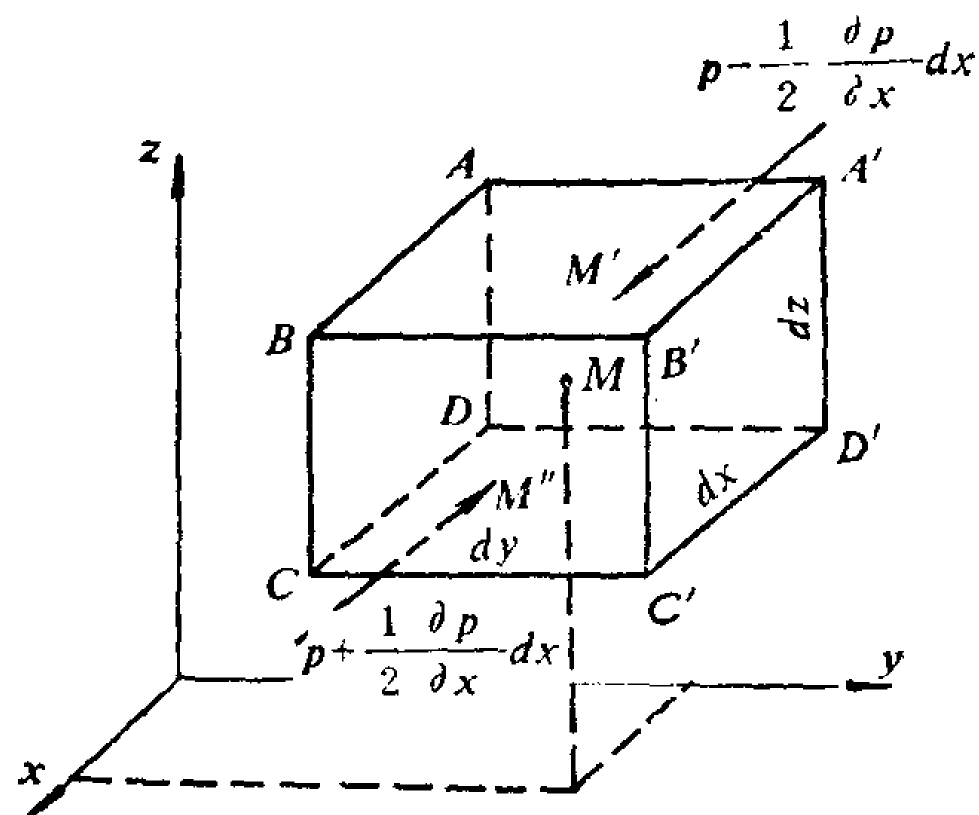


图 3-2　静止流体中的微元六面体

由于静止流体内作用面上没有切向力，因此只有$ADD'A'$和$BCC'B'$两个面上有x方向的表面力，其它四个面上的表面力都垂直于x轴。设平行六面体的中心M点的压强为$p = f(x、y、z)$，作用在$ADD'A'$和$BCC'B'$两个面的中心点M'和M''处的压强分别为

$$p' = f\left(x - \frac{dx}{2},\ y,\ z\right) 和\ p'' = f\left(x + \frac{dx}{2},\ y,\ z\right)$$

将上式用泰勒级数展开，并取到一阶无穷小量，则M'与M''的压强分别为

$$p' = p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx \qquad p'' = p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx$$

又因$ADD'A'$和$BCC'B'$的面积为无穷小，其中心点上的压强可认为就等于该平面上的平均压强，于是周围流体对这两个平面作用的压力分别为

$$\left(p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz \qquad \left(p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{dx}dx\right)dydz$$

已知六面体的质量为$\rho dxdydz$，单位质量力在各坐标轴方向的分量分别为f_x、f_y、f_z，则x方向的质量力为

$$F_{mx}=\rho f_x dxdydz$$

根据平衡条件，作用在静止六面体上的所有外力在各方向的合力都应为零，所以

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz+\rho f_x dxdydz=0$$

用$\rho dxdydz$除上式，这意味着所取微元六面体为单位质量，于是上式简化为

$$f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0 \qquad 或 \qquad f_x=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

同理，在y、z方向可得

$$\left.\begin{aligned} f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0 \qquad & f_y=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0 \qquad & f_z=\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

这就是流体平衡微分方程，是1755年由欧拉（L.Euler）首先导出的，因此又称**欧拉平衡方程**。上式表明，在静止流体中作用于单位质量流体上的质量力和压力彼此平衡。由于单位质量力的分量通常是已知的，代入（3-2）式后积分，即可求得压强p的分布规律。

为了便于积分，将（3-2）式中各式分别乘以dx、dy、dz，然后相加

$$f_x dx+f_y dy+f_z dz=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right)$$

因压强p是坐标的连续函数，故p的全微分为

$$dp=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz$$

于是平衡方程（3-2）式又可表示为

$$dp=\rho(f_x dx+f_y dy+f_z dz) \tag{3-3}$$

二、平衡微分方程在液体情况下的积分

如流体是不可压缩的液体，则可以求得平衡微分方程（3-3）式的积分。但首先要讨论一下液体在平衡状态下质量力所具有的性质。将方程组（3-2）的前两式分别对y和x取偏导数。由于均质液体的密度ρ为常数，故

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y\partial x}=\rho\frac{\partial f_x}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}=\rho\frac{\partial f_y}{\partial x}$$

因函数的二次偏导数与取导的先后次序无关，故有$\frac{\partial f_x}{\partial y}=\frac{\partial f_y}{\partial x}$。用同样方法处理方程组（3-2）中的2、3式和3、1式，即得

$$\frac{\partial f_x}{\partial y}=\frac{\partial f_y}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f_y}{\partial z}=\frac{\partial f_z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f_x}{\partial x}=\frac{\partial f_x}{\partial z} \tag{3-4}$$

由数学分析得知，（3-4）式是表达式$f_x dx+f_y dy+f_z dz$为某一函数$U(x,y,z)$全微分存在的充分必要条件。因此

$$dU=f_x dx+f_y dy+f_z dz=\vec{f}\cdot\vec{dl} \tag{3-5}$$

而函数U的全微分又可写成

$$dU=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz$$

由此可得

$$f_x=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad f_y=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad f_z=\frac{\partial U}{\partial z} \tag{3-6}$$

函数U在三个坐标轴方向的偏导数分别等于单位质量力在各该方向的分量，理论力学中把具有这一性质的力场称为有势力场或保守力场，把函数U称为力函数或势函数。由（3-5）式可见，力函数的全微分dU即为单位质量力$\vec{f}$在空间移动$\vec{dl}$距离所作的功。有势力所作的功与路径无关。

将（3-6）式代入（3-3）式中

$$dp=\rho\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz\right)=\rho dU \tag{3-7}$$

上式表示，满足液体平衡微分方程的质量力必然是有势力。也就是说，只有在有势的质量力作用下，液体才能处于平衡状态。

积分（3-7）式，得

$$p=\rho U+C \tag{3-8}$$

式中积分常数C可由已知条件确定。通常作用于液体上的质量力是已知的，由（3-5）式可求得力函数U，如液体内部或自由液面上某点的压强p_0已知，根据该点坐标求出它的U_0值，再将p_0和U_0代入（3-8）式中，即得积分常数

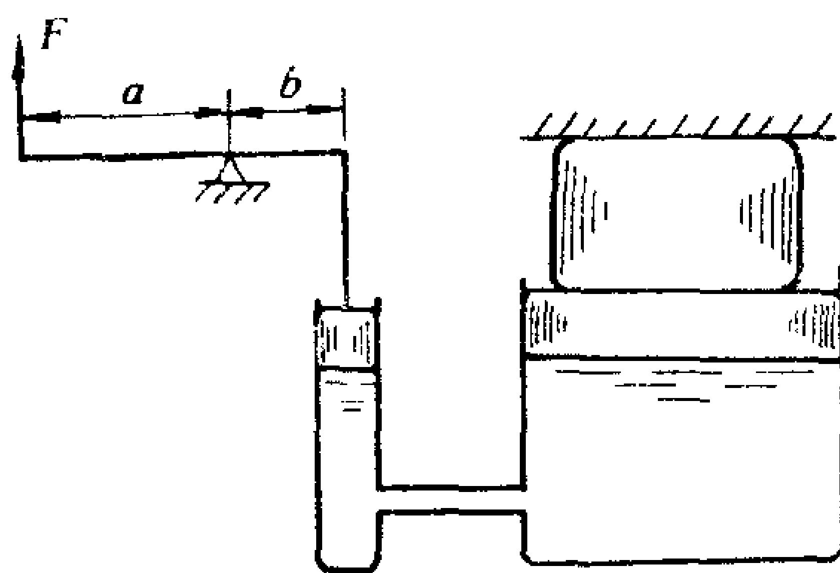
$$C=p_0-\rho U_0$$

代回（3-8）式，即得流体平衡微分方程在液体情况下的积分

$$p=p_0+\rho(U-U_0) \tag{3-9}$$

要得到静止液体中压强的分布规律，不一定要求出力函数。将已知的质量力直接代入（3-3）式，积分后可得到同样结果。但（3-9）式还是有意义的，对它的分析可得到帕斯卡（Pascal）原理。

（3-9）式表明，液体中任一点的压强p由p_0和$\rho(U-U_0)$两项组成，其中$\rho(U-U_0)$项决定于液体的密度和质量力，而与p_0无关。因此，当p_0因某种原因增大或减小时，液体内所有各点的静压强也将增大或减小同样的数值。这就是说，在平衡的不可压缩的液体中，作用在其部分边界面上的压强变化，将等值地传递到液体内部的其它各点，这就是**帕斯卡原理**。工程上使用的水压机、水力起重机、水力储能机等简单的水力机械，就是根据帕斯卡原理工作的。



例 3-1图

【例 3-1】 水压机的小活塞面积$A_1=5\text{cm}^2$，大活塞面积$A_2=1\text{m}^2$，杠杆臂长$a=50$ cm，$b=5$cm，求施力$F=100$N时，大活塞对物体的挤压力P。忽略两活塞的重量及其与活塞缸的摩擦力。

【解】 未施加F力时大活塞对物体没有挤压力，施加F力后，在小活塞与水的接触面上产生的静压强为

$$p=F\frac{a}{b}\frac{1}{A_1}=\frac{100\times0.5}{0.05\times0.0005}=2\times10^6\text{N/m}^2$$

按帕斯卡原理，p将等值地传递到大活塞A_2上，故大活塞对物体的挤压力为

$$P=pA_2=\frac{2\times10^6\times1}{10^3}=2000\text{kN}$$

三、等压面

静止液体中压强相等的各点组成的面称为等压面。例如液体与气体交界的自由表面就是最明显的等压面，其上各点的压强都等于液体表面上的气体压强。静止液体内可以作一系列的等压面，不同的等压面上压强为不同的常数。由于等压面上p等于常数，故$dp=0$，代入（3-3）式，即得等压面的微分方程

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0 \qquad (3\text{-}10)$$

由此可得等压面的两个性质：

1）等压面就是等势面。

在（3-7）式中，因密度ρ为常数，故等压面上$dU=0$，即$U=$常数。质量力势函数等于常数的面叫等势面，所以等压面也是等势面。

2）等压面与质量力处处正交。

等压面微分方程（3-10）式中，f_x、f_y、f_z是单位质量力矢量$\vec{f}$的三个分量，dx、dy、dz是等压面上任取的有向微元线段$\vec{dl}$在三个坐标轴上的投影。因此（3-10）式如用矢量表示为

$$\vec{f} \cdot \vec{dl} = 0$$

只有当两个矢量相互垂直时其点乘积才等于零。这就证明了等压面处处与质量力正交。

如质量力中仅有重力，z轴垂直于水平面且指向上方，则势函数为$U=-gz$。这时的等压面方程为$z=$常数，它代表一个水平面族。我们通常见到的自由液面都是水平面就是证明。如除重力外还有其它质量力作用，则等压面就未必是水平面了。

由流体平衡微分方程（3-2）式可以看出，静止流体内出现压强差仅仅是质量力作用的结果。哪个方向没有质量力作用，那个方向就不会有压强差，因此在与质量力垂直的方向压强必然相等。这样，就从物理概念上理解了等压面与质量力必然正交的原因。

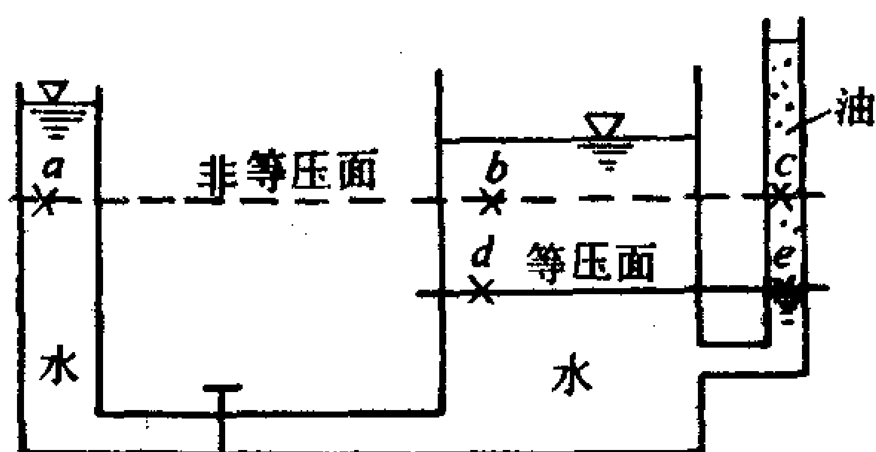


图 3-3　水平面是等压面的条件

不仅气体与液体的交界面是等压面，只有重力作用的两种不相溶液体的交界面也是等压面，其原因读者可根据（3-7）式自己分析。

质量力中只有重力作用的静止液体中，等压面是水平面的结论在液柱式测压计中有着广泛的应用。但要注意，我们在讨论等压面方程时把密度ρ看作是常数，且认为势函数U是空间坐标的连续函数，因此这一结论只适用于容器的连通部分只有同一种液体，并且是连续的情况。例如图3-3所示的容器中，a、b、c三点不满足上述条件，因而虚线不是等压面，$p_a \neq p_b \neq p_c$；而实线是等压面，$p_d = p_e$。

§3-3　重力作用下静止液体的压强分布规律

自然界中最常见的是质量力中只有重力作用的流体。重力作用下静止液体中的压强称为静水压强。本节将主要讨论静水压强的分布规律及其表示方法。这一规律对于可以忽略密度变化的气体也是适用的。

一、静水压强基本方程

流体平衡微分方程是适用于一切平衡流体的普遍规律。根据流体平衡微分方程（3-3）式，不难求得静水压强的分布规律。

在重力作用下的静止液体中设置坐标系，令z轴铅垂向上。于是单位质量力在各坐标轴方向的分量为

$$f_x=0,\quad f_y=0,\quad f_z=-g$$

代入（3-3）式，得

$$dp=-\rho g dz=-\gamma dz$$

在均质液体中，重度γ为常数，上式积分后

$$p=-\gamma z+C \tag{3-11}$$

积分常数C可由边界条件确定，如已知自由液面的坐标为z_0（见图3-4），其上的气体压强为p_0，代入（3-11）式中，得$C=p_0+\gamma z_0$，因此

$$p=p_0+\gamma(z_0-z)$$

令h为所取点的淹没深度，$h=z_0-z$，故上式又可写成

$$p=p_0+\gamma h \tag{3-12}$$

这个方程所表达的就是静止液体中压强的分布规律，通常称它为静水压强基本方程。由该方程可以看出，静水压强p由两部分组成：1）表面压强p_0，它可以是气体作用于液面上的压强，也可以是固体或另一种液体作用于液面上的压强（见图3-5）；2）余压强γh，它是由位于该点以上的液体重量引起的。表面压强通过液体介质等值地传递到各点上，余压强则是随各点的淹没深度不同而改变的。

在（3-12）式中，如令$h=$常数，压强p也是常数，这也说明重力作用下静止液体中的等压面是一族水平面，同时也表明了等压面与质量力相互正交的性质。

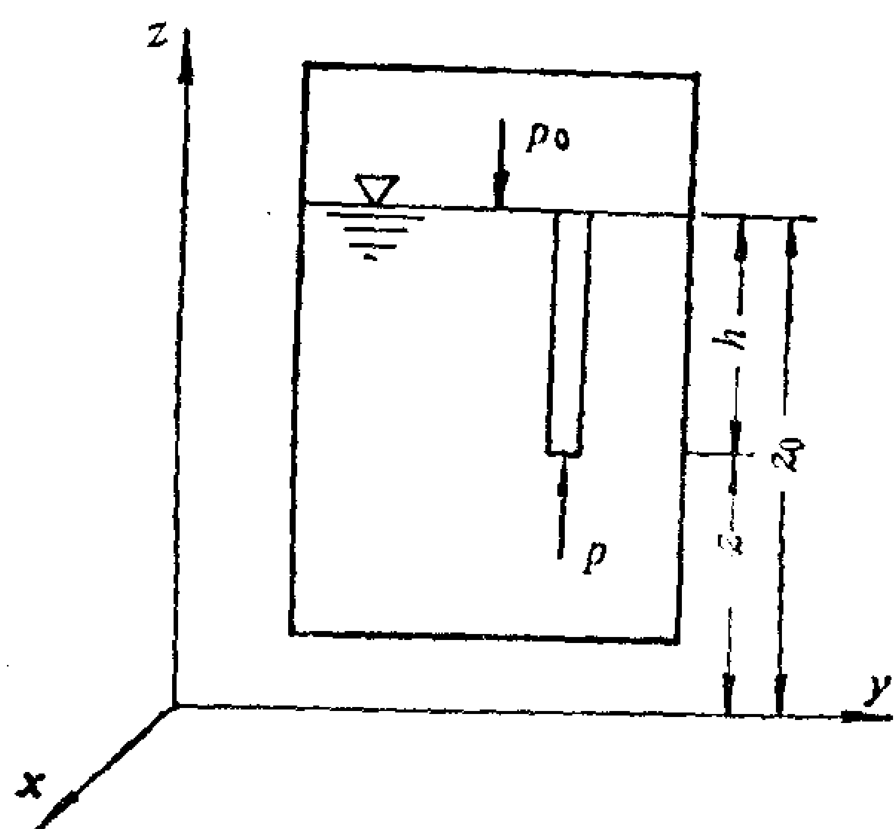


图 3-4 推导静水压强基本方程的简图

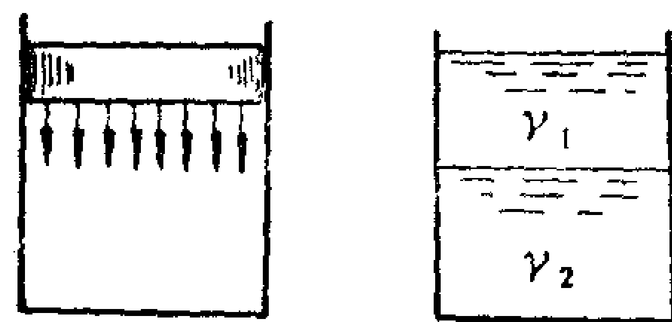


图 3-5 特殊情况的表面压强

二、绝对压强、相对压强和真空度

在工程计算中，由于采用不同的基准来度量，压强可以有两种表示方法：绝对压强；相对压强和真空度。

如以没有气体分子存在的绝对真空作为零点起算的压强称为绝对压强，以p'表示。绝对压强就是流体分子实际作用于作用面上的压强。

如以同高程的当地大气压p_a作为零点起算的压强称为相对压强，以p表示。绝对压强与相对压强之间差一个当地大气压，即

$$p=p'-p_a \tag{3-13}$$

一般工程构筑物或工业设备都处于当地大气压的作用下，如用绝对压强计算流体的作

用，则还应考虑外界大气压的作用。如采用相对压强，则计算比较简便。例如图3-6所示的容器，在计算液体对AB板的作用力，以及确定螺栓的拉力时，如用绝对压强，还必须考虑容器外侧作用的大气压；如采用相对压强，因容器内被扣除的一个大气压与容器外部的大气压正好抵销，所以只要计算容器内部液体对AB板的作用力就行了。这是工程上多采用相对压强的原因。但当涉及到可压缩流体的问题时，因要与热力学方程联立求解，故应采用绝对压强。

工业上使用的各种压力表，其读值一般都是相对压强，所以相对压强也称为表压强。

绝对压强与相对压强的关系可用图3-7来表示。显然，绝对压强永为正值，而相对压强则可能出现负值，如某处（图中的B点）绝对压强小于当地大气压时，该处的相对压强即为负值。工程上一般不习惯用负的相对压强，而是用真空度p_v来度量小于当地大气压的压强。真空度与绝对压强的关系为

$$p_v = p_a - p' \tag{3-14}$$

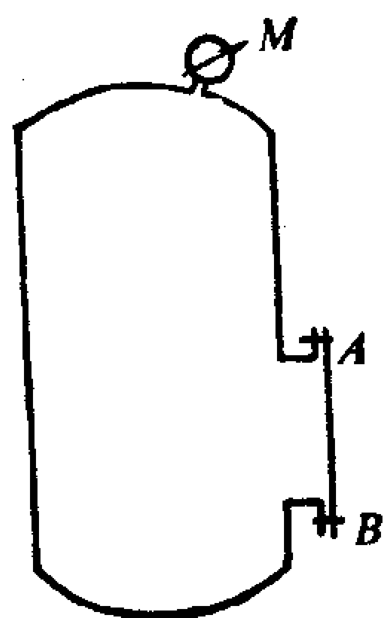


图 3-6 宜采用相对压强计算的实例

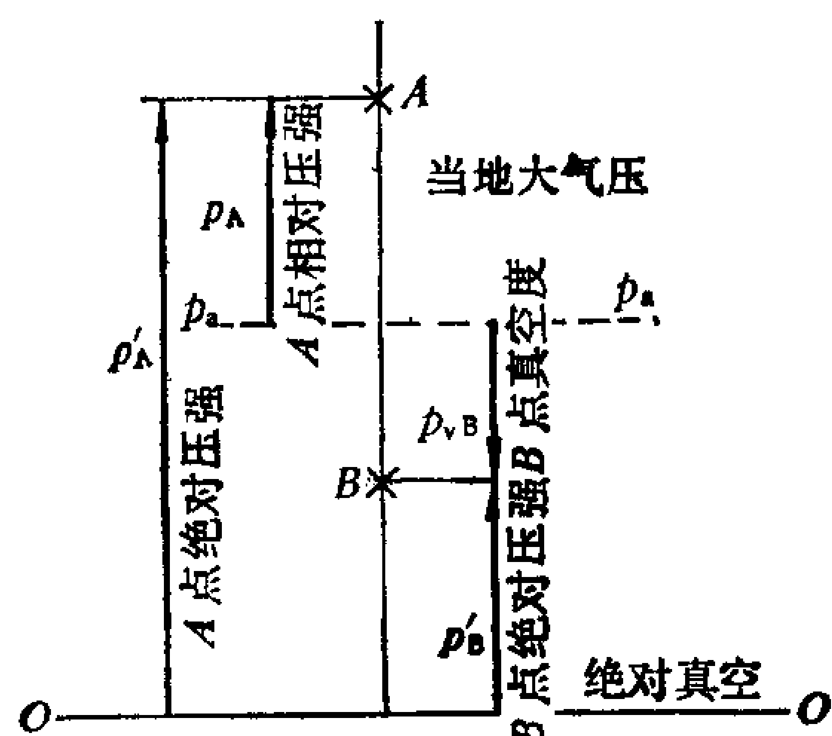


图 3-7 绝对压强和相对压强

比较（3-13）与（3-14）两式，可见真空度p_v是相对压强p的负值，亦即该处绝对压强不足当地大气压的差数，所以真空度亦称负压。流体力学中常把压强小于当地大气压的区域称为出现了"真空"。这里"真空"两字的含义与物理学中不同，并非指"什么也没有"。

绝对压强的最小值为零，此时达到了完全真空，因此理论上真空度的最大值为当地大气压。但实际上当压强下降到液体的饱和蒸汽压时，液体就会迅速汽化，使压强不再降低。所以最大真空度不能超过当地大气压与液体的饱和蒸汽压的差值。

三、测压管高度和真空高度、测压管水头

流体中任一点的相对压强可以用测压管来量测。例如在图3-8所示的容器中，如要量测A点的压强，可在与A点位于同一水平面的容器壁上开一小孔，连上一根上端开口的直立玻璃管。在容器内的压强作用下，液体将沿玻璃管上升至h_A高度。根据静水压强基本方程，从玻璃管内的液体看，A点的相对压强为$p_A = \gamma h_A$，因此$h_A = \dfrac{p_A}{\gamma}$，可见$A$点的相对压强可用玻璃管内的液柱高度来表示。这样的玻璃管称为测压管，测点至测压管内液面的高度称为测压管高度。流体力学中把任一点的测压管高度与该点在基准面上的位置高度之和称为测压管水头。对于图中的A点，其测压管水头为

$$H_{PA}=z_A+\frac{p_A}{\gamma}$$

如以γ除（3-11）式中的各项，移项后得

$$z+\frac{p}{\gamma}=常数 \qquad (3-15)$$

也可写成

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}=z_2+\frac{p_2}{\gamma} \qquad (3-16)$$

这是静水压强基本方程的另一形式。它表示在静止液体中，各点的测压管水头都相等。如在该容器的B点再连一测压管，这根测压管与原测压管的液面将位于同一水平面上。根据这一性质，只要有一根测压管就可测得容器内任一点的相对压强。例如图3-8所示容器内的表面压强即为$p_0=\gamma h_0$。

如容器内出现真空，即相对压强出现负值。则可装一U形测压管，管内液面将如图3-9所示。今要求C点的压强，可量出C点与测压管内液面的高差h_{vc}，根据静水压强基本方程，C点的绝对压强p'_c与h_{vc}的关系为

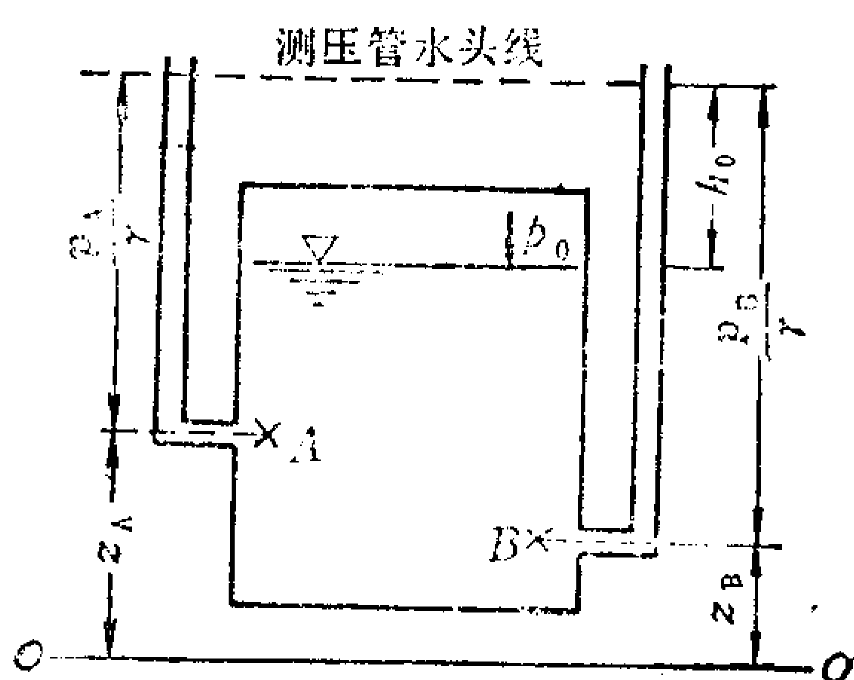


图 3-8 测压管水头

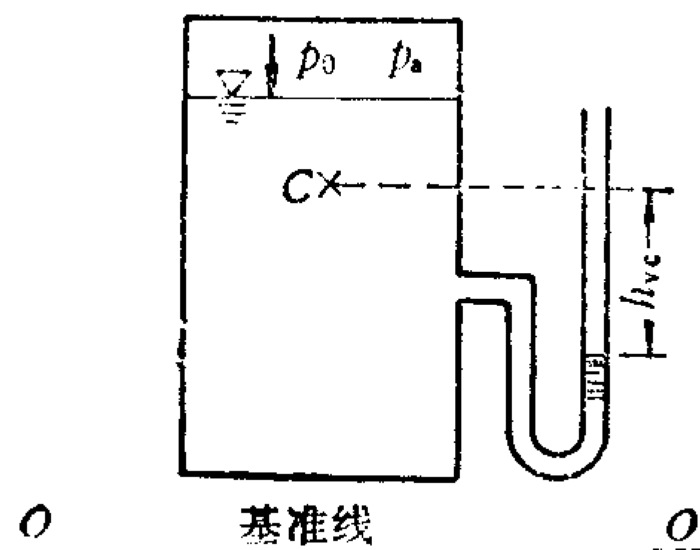


图 3-9 真空高度

$$p'_c+\gamma h_{vc}=p_a$$

$$\therefore \quad h_{vc}=\frac{p_a-p'_c}{\gamma}=\frac{p_{vc}}{\gamma} \qquad (3-17)$$

可见，C点的真空度也可用液柱高度h_{vc}来表示。h_v称为**真空高度**，它与液体重度的乘积即为该点的真空度。

通过各测压管内液面的水平面（或线）称为**测压管水头面（线）**。位于测压管水头面上的各点，其压强都等于当地大气压。容器内在测压管水头面以上的区域为负压区，该区内各点的相对压强都是负值；在测压管水头面以下的区域为正压区，该区内各点的相对压强都是正值。

四、压强的计量单位

工程技术界常用的压强计量单位有三种。

1）应力单位：即根据压强的定义，用单位面积上的力来表示压强的大小。如在国际单位制用Pa（帕，即N/m^2）或kN/m^2；在工程单位制中用kgf/m^2或kgf/cm^2。压强很高时，用Pa数值太大，常用MPa（兆帕，$1MPa=10^6Pa$）或bar（巴，$1bar=10^5Pa$）。

2）液柱单位：前已述及，压强可以用测压管内的液柱高度来表示。将液柱高度乘以

该液体的重度即为压强。常用的液柱高度为水柱高度或汞柱高度。其单位为mH_2O（米水柱）、mmH_2O（毫米水柱）或mmHg（毫米汞柱）。

$$1mH_2O = 9807N/m^2 = 1000kgf/m^2$$
$$1mmH_2O = 9.807N/m^2 = 1kgf/m^2$$
$$1mmHg = 133N/m^2 = 13.6kgf/m^2$$

3）大气压单位：压强的大小也常用大气压的倍数来表示。由于大气压随当地的海拔高程不同和气候的变化而有所差异，作为单位必须给它以定值。国际上规定，一个标准大气压为$p_{atm} = 101325N/m^2$（国际单位制）$= 1.033kgf/cm^2$（工程单位制）。工程上为了计算方便，常采用工程大气压p_{at}。

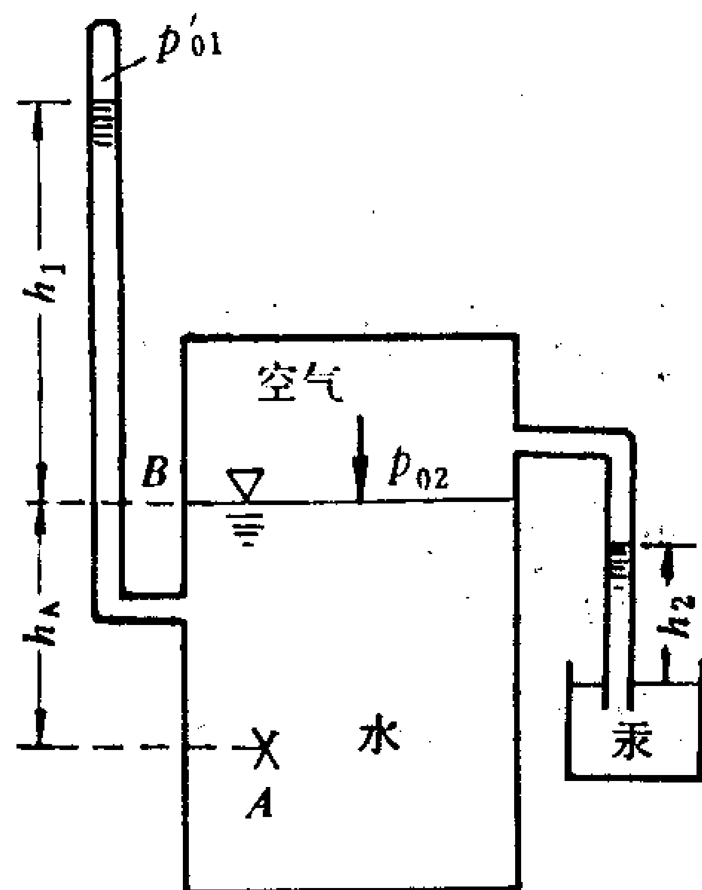
$$1p_{at} = 9.807N/cm^2 = 1kgf/cm^2$$

三种计量单位之间的换算关系是今后计算中经常用到的，读者必须熟练掌握。表3-1中给出了各种压强单位的换算关系，供查对。

压强单位换算表　　表 3-1

压强单位	Pa N/m^2	kPa $10^3N/m^2$	bar $10^5N/m^2$	mmH_2O kgf/m^2	p_{at} $10^4kgf/m^2$	p_{atm} $10332kgf/m^2$	mmHg
换算关系	9.807	9.807×10^{-3}	9.807×10^{-5}	1	10^{-4}	9.678×10^{-5}	0.07356
	98070	98.07	0.9807	10^4	1	0.9678	735.6
	101325	101.325	1.01325	10332	1.0332	1	760
	133.322	0.133322	1.3332×10^{-3}	13.595	1.3595×10^{-3}	1.316×10^{-3}	1

【例 3-2】 如图（例3-2图）所示的容器中，左侧玻璃管顶端封闭，液面上气体的绝对压强为$p'_{01} = 0.75at$（工程大气压），右侧倒装玻璃管内的液体为汞，其重度为γ_p，汞柱高度$h_2 = 120mm$，容器内A点的淹没深度$h_A = 2.0m$，设当地大气压为1at，求：



例 3-2图

1）容器内空气的绝对压强p'_{02}和真空度p_{v2}（以应力单位计）；

2）A点的相对压强p_A；

3）左侧玻璃管内水面高出容器内水面的高度h_1。

【解】 1）求p'_{02}和p_{v2}

气体的重度很小，在高差不大的情况下，余压强引起的压强差很小，可以忽略。因此在小范围内一般认为气体的各点压强相等。本题中可以认为容器右侧汞柱表面的压强即为容器内空气的压强。从右侧玻璃管看，$p'_{02} + \gamma_p h_2 = p_{at}$，

$$\therefore p'_{02} = p_{at} - \gamma_p h_2 = 98070 - 133000\times0.12 = 82110N/m^2$$

容器内空气的真空度为

$$p_{v2} = p_{at} - p'_{02} = 98070 - 82110 = 15960N/m^2$$

或　$$p_{v2} = \gamma_p h_2 = 133000\times0.12 = 15960N/m^2$$

）求p_A

容器内空气的相对压强为其真空度的负值，即$p_{02}=-p_{v2}=-15960\text{N/m}^2$，因而

$$p_A=p_{02}+\gamma h_A=-15960+9807\times2=3654\text{N/m}^2$$

3）求h_1

$$p_{01}=0.75\text{at}=0.75\times98070=73553\text{N/m}^2$$

质量力中只有重力作用时，等压面为水平面，容器中的表面压强与左侧玻璃管内B点的压强相等，故

$$p_{01}'+\gamma h_1=p_{02}'$$

$$h_1=\frac{p_{02}'-p_{01}'}{\gamma}=\frac{82110-73553}{9807}=0.873\text{m}$$

§ 3-4 液 柱 式 测 压 计

测量流体压强的仪器可分为三类：金属式、电测式和液柱式。金属式中压强使金属元件变形，从而测出表压强（即相对压强），它的量程较大。电测式利用传感器将压强化为电阻、电容等电量，便于遥控和自记。液柱式测压计精度较高，量程较小，常用于实验室量测。现介绍几种常见的液柱式测压计。

（1）测压管

它的原理已如前述。为了减小毛细管现象引起的测量误差，测压管内径不得小于5mm。当压强大于3m水柱时，用水作工作液体就很不方便了，可用汞或其它重度较大的液体代替。

（2）U形水银测压计

如图3-10(a)所示，U形管中的工作液体是重度为γ_p的汞。当测量A点压强时，可由等压面1-2列出下式：

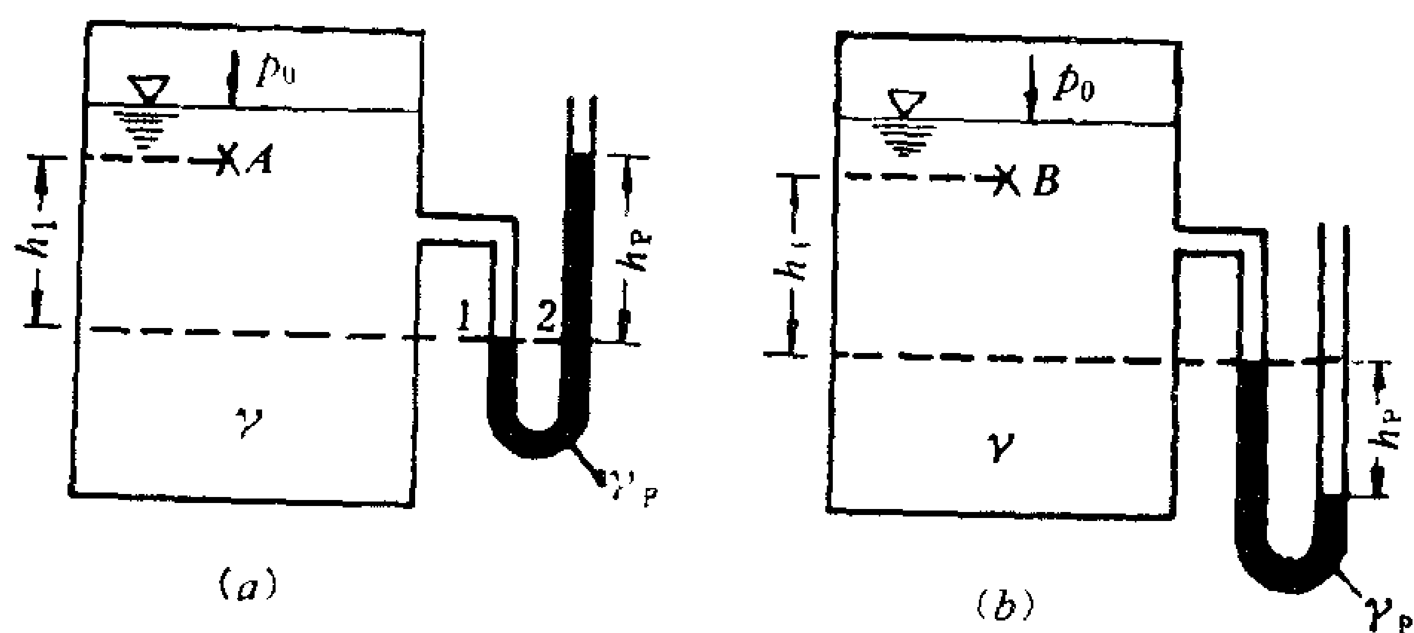


图 3-10 U形水银测压计

左支管

$$p_1'=p_A'+\gamma h_1$$

右支管

$$p_2'=p_a+\gamma_p h_p$$

由此可得A点的绝对压强为

$$p_A'=p_a+\gamma_p h_p-\gamma h_1$$

A点的相对压强为

$$p_A=\gamma_p h_p-\gamma h_1 \qquad (3\text{-}18)$$

如测点B处液体的压强小于大气压，则如图3-10(b)所示，测点的绝对压强为

$$p_B'=p_a-\gamma_p h_p-\gamma h_1$$

该点的真空度为

$$p_{vB}=\gamma_p h_p+\gamma h_1 \qquad (3\text{-}19)$$

（3）杯式水银测压计

图3-11为一杯式水银测压计。左支管上装一杯，杯的断面较大，故右支管中水银面变化时，杯中水银面的变化可忽略。如以杯中水银面作为零点，读出右支管中的读数h_p，即可求出测点的压强。

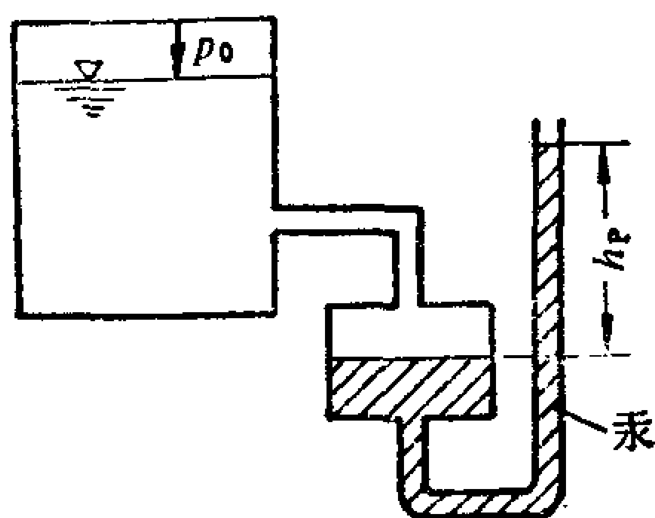


图 3-11　杯式水银测压计

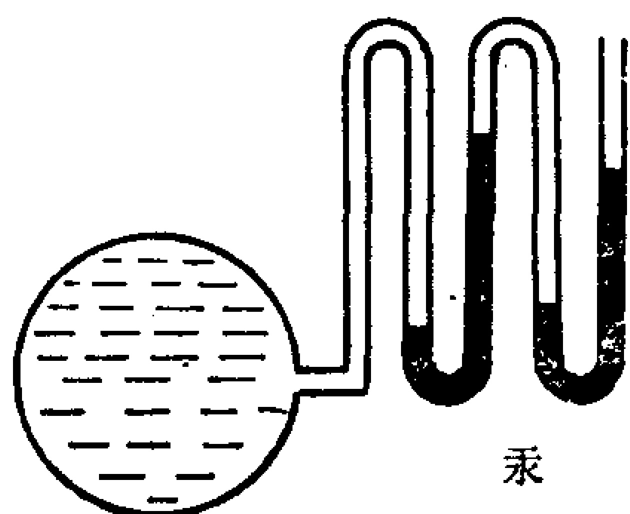


图 3-12　多管水银测压计

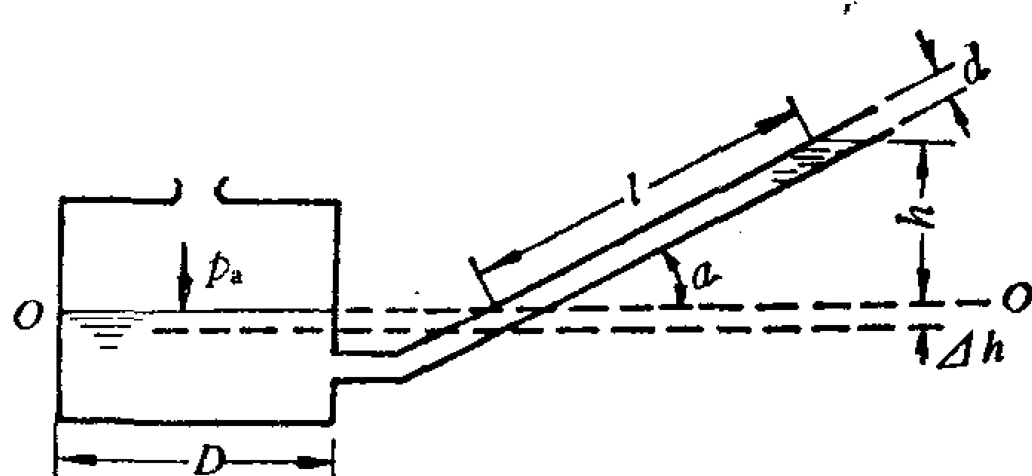


图 3-13　倾斜式微压计

U形水银测压计和杯式水银测压计测量压强的量程约为3～4个大气压。如压强超过这个限度时，可用多管式水银测压计（图3-12）。

（4）微压计

测量较小的压强或压强差的测压计称为**微压计**。图3-13所示为倾斜式微压计，它右边的斜管可以绕轴转动，使倾角α可根据需要改变。如测管和左侧容器的直径分别为d和D，仪器中工作液体的重度为γ，未测压强时容器内液面位于0-0。当待测压强的气体引入容器后，容器中液面下降Δh，管中液面上升h，形成平衡。于是

$$p = p' - p_a = \gamma(h + \Delta h) \qquad (a)$$

从原始液面0-0算起，上下变动的液体体积相等，即$\frac{\pi}{4}D^2\Delta h = \frac{\pi}{4}d^2 l$，故

$$\Delta h = \left(\frac{d}{D}\right)^2 l \qquad (b)$$

将（b）代入（a），即得待测气体的相对压强

$$p = \gamma\left[h + l\left(\frac{d}{D}\right)^2\right] = \gamma l\left[\sin\alpha + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right] \qquad (3\text{-}20)$$

如不计Δh，即认为$\left(\frac{d}{D}\right)^2 \approx 0$，则相对压强为

$$p = \gamma l \sin\alpha \qquad (3\text{-}21)$$

（5）压差计

为了测定两点的压强差，可用压差计。图3-14（a）所示是将两根测压管上端相连而成的压差计。压差计中液面的气体压强可不等于大气压，A、B两点的压强差仍为

$$\Delta p = \gamma \Delta h \qquad (3\text{-}22)$$

如果要测较大的压差，可用水银压差计（如图3-14（b）所示）。其中工作液体为水银，压强差可按下式计算（原理见例3-3）。

$$\Delta p = (\gamma_p - \gamma)\Delta h \qquad (3\text{-}23)$$

如果要测较小的压差，则可用如图3-12（c）所示的压差计。这种压差计的特点是用一种重度γ_0小于被测液体γ的另一种液体（例如油）作为工作液体。这时压强差可按下式计算

$$\Delta p = (\gamma - \gamma_0)\Delta h \qquad (3\text{-}24)$$

若γ_0与γ的值很接近，则Δp虽很小，Δh仍可以较大。

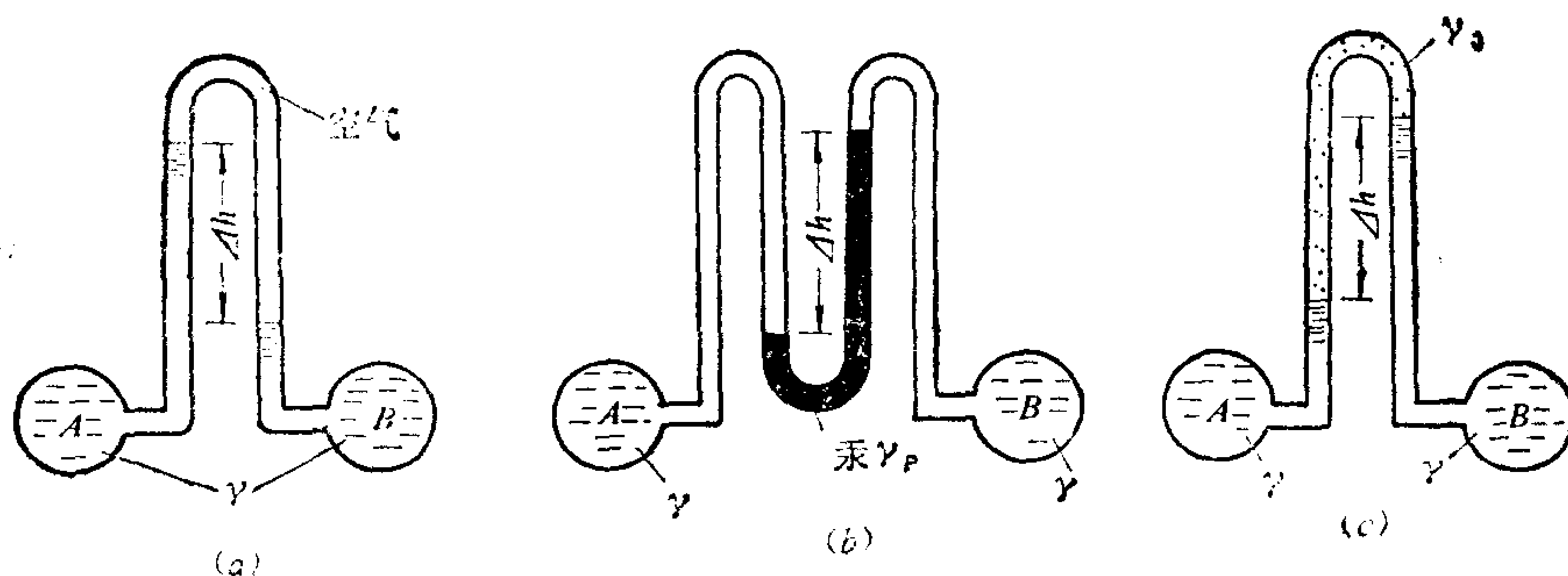


图 3-14 压差计

（6）真空计

用来测量流体真空度的仪器称为真空计。真空计中的工作液体可以是水，也可以是水银或其它不相溶的液体，视需要而定。

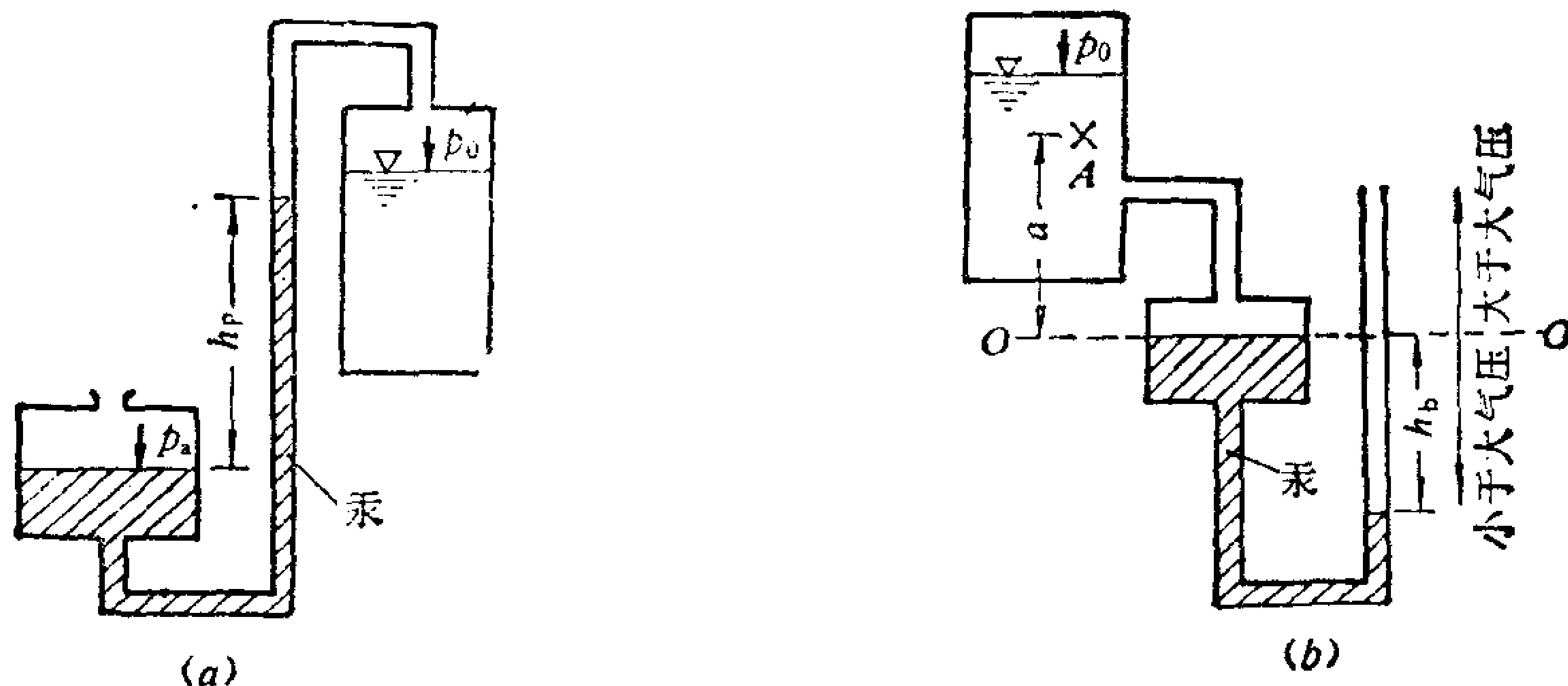


图 3-15 杯式水银真空计

图3-15a所示为一杯式水银真空计，它的工作原理与杯式水银测压计类似。不同之处仅在于将测压计连通测点的一端与通大气的一端互换。如把杯式水银测压计做成图3-15（b）的形式，则既可作测压计用，又可作真空计用。

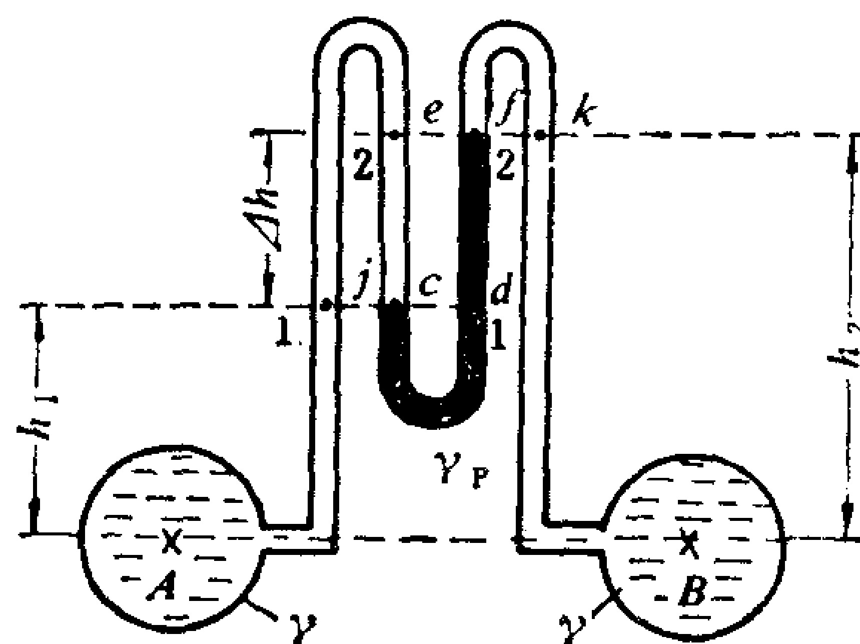
如真空计中液面如图3-15(a)所示的情况，则容器液面的真空度为

$$p_v = \gamma_p h_b \qquad (3\text{-}25)$$

如图3-15(b)所示的情况，则A点液体的真空度为

$$p_{vA} = \gamma_p h_b + \gamma a \qquad (3\text{-}26)$$

【例 3-3】 用U形水银压差计测定A、B两容器的压强差（见例3-3图），连接管内除水银外全部为水所充满。如U形管内水银柱的液面高差为Δh，试求在同一水平面上A、B两点的压强差。



例 3-3图

【解】 要寻求压强差Δp与水银柱液面高差Δh的关系，需对U形管内的等压面进行分析。在两种液体的分界面上引水平面1-1和2-2。由等压面必须满足的条件可知，c、d两点连通的管内是同一种连续的液体——水银，j、c两点连通的管内都是水，故1-1是等压面，$p_j = p_c = p_d$。e、f两点连通的管内有两种液体，故2-2不是等压面，$p_e \neq p_f$，但$p_k = p_f$。

由于A、B两处液体的压强分别为

$$p_A = p_j + \gamma h_1 \qquad p_B = p_k + \gamma h_2$$

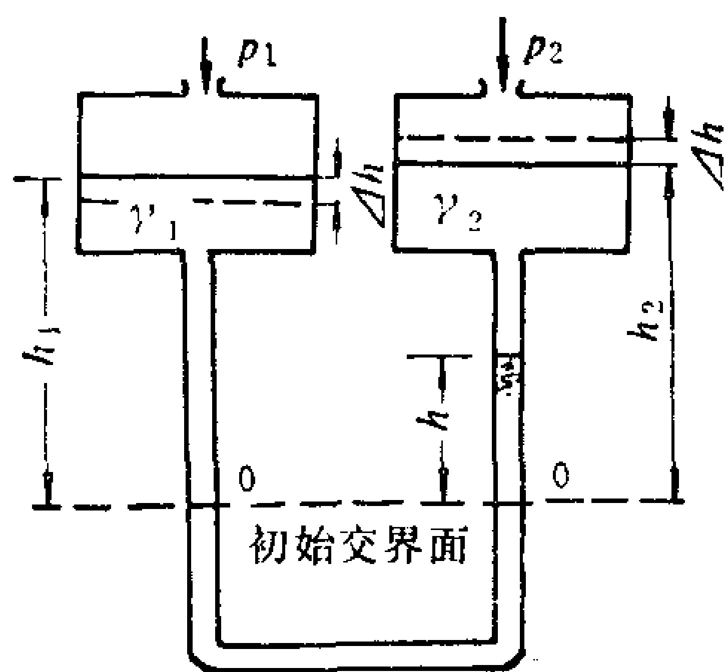
因此
$$\Delta p = p_A - p_B = p_j - p_k - \gamma(h_2 - h_1) = p_d - p_f - \gamma\Delta h$$

但因
$$p_d = p_f + \gamma_p \Delta h$$

$$\therefore\ \Delta p = (\gamma_p - \gamma)\Delta h \qquad (3\text{-}27)$$

【例 3-4】 双杯双液微压计

如图所示，这种微压计是由U形管连接的两个相同圆杯所组成。两杯中分别注入两种互不相混而重度又很接近的工作液体（酒精的水溶液$\gamma_1 = 8530\text{N/m}^3$，煤油$\gamma_2 = 8140\text{N/m}^3$），当两端压强相等时，两种液体的初始交界面在标尺0处。已知U形管直径$d = 5\text{mm}$，杯的直径$D = 50\text{mm}$。试确定交界面升至$h = 280\text{mm}$时的压强差Δp。



例 3-4图

【解】 设两杯中初始液面至初始交界面的距离为h_1和h_2。当U形管中交界面上升h时，左杯液面下降Δh而右杯液面上升Δh。由初始平衡状态可知

$$\gamma_1 h_1 = \gamma_2 h_2 \qquad (a)$$

由于U形管与杯中升降的液体体积相等，可得$\Delta h \times \dfrac{\pi D^2}{4} = h \times \dfrac{\pi d^2}{4}$，从而有

$$\Delta h = \left(\frac{d}{D}\right)^2 h \qquad (b)$$

以变动后U形管中的交界面为基准，分别列出左右两边的静水压强基本方程

$$p_1 + \gamma_1(h_1 - \Delta h - h) = p_2 + \gamma_2(h_2 + \Delta h - h) \qquad (c)$$

移项后将（a）、（b）两式代入，即得

$$\Delta p = p_1 - p_2 = h\left[(\gamma_1 - \gamma_2) + (\gamma_1 + \gamma_2)\left(\frac{d}{D}\right)^2\right] \qquad (3\text{-}28)$$

将已知数据代入，

$$\Delta p = 0.28\left[(8530 - 8140) + (8530 + 8140)\left(\frac{1}{10}\right)^2\right] = 156\text{Pa} = 16\text{mmH}_2\text{O}$$

由本例可见，原来$\Delta p = 16\text{mmH}_2\text{O}$，今用双杯双液微压计可得读数为$h = 280\text{ mm}$，这充分显示出微压计的放大性能。两种液体的重度越接近，U形管与杯的直径比越小，放大的倍数越显著。

§3-5 液体的相对平衡

在§3-2中研究了质量力中只有重力时平衡液体内的压强分布规律。本节将讨论更一般的情形，即在重力与其它质量力同时作用下液体的平衡问题，也就是液体的相对平衡问题。

当盛液体的容器对地面作等加速度运动，此时液体对容器没有相对运动，液体质点之间也没有相对运动，那末我们把坐标系固结在容器上，让它随容器一起运动。液体对该运

动坐标系就是静止的，也就是液体处于相对平衡状态。由理论力学得知，当物体对运动坐标系作相对运动时，牛顿第二定律仍是适用的，不过在分析其作用力时，除实际作用力外，还应加上牵连惯性力和哥氏惯性力。对于液体相对平衡问题，因没有相对速度，哥氏惯性力为零，所以在质量力中还应考虑的只有牵连惯性力。

下面讨论两种相对平衡的情况。

一、等加速直线运动容器中液体的平衡

图3-16为一盛有液体的敞口容器。当它不动时液面为水平的$b'd'$面。如容器以等加速度a沿y方向运动，现来讨论容器内液体的等压面及压强分布。

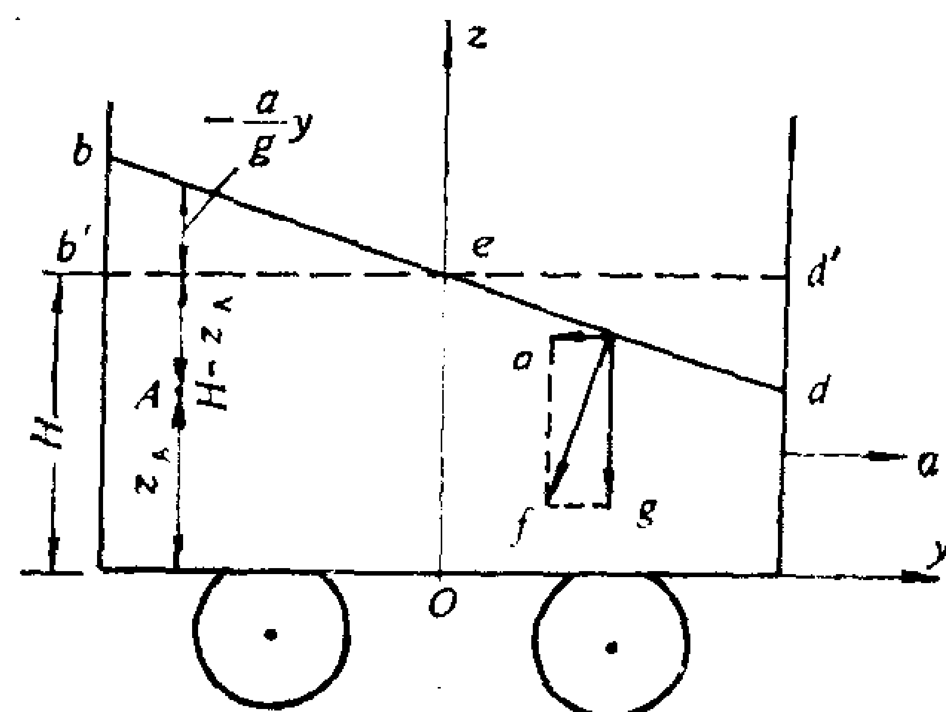


图 3-16 等加速直线运动容器中液体的相对平衡

取运动坐标系如图3-16所示。根据流体平衡微分方程：

$$dp=\rho(f_x dx+f_y dy+f_z dz) \qquad (3\text{-}3)$$

单位质量液体上受到的牵连惯性力为牵连加速度a的负值，因此式中各单位质量力的分量为

$$f_x=0, \qquad f_y=-a, \qquad f_z=-g$$

代入（3-3）式中，并令$\rho=\gamma/g$，

$$dp=-\frac{\gamma}{g}(ady+gdz)$$

积分上式，得

$$p=-\frac{\gamma}{g}(ay+gz)+C \qquad (3\text{-}29)$$

式中C为积分常数。

现在先来讨论等压面。在（3-29）式中令p＝常数，即得等压面方程：

$$z=-\frac{a}{g}y+C' \qquad (3\text{-}30)$$

它表明等压面是一族倾斜的平面，其斜率为$k_1=-\frac{a}{g}$。而质量力作用线的斜率为$k_2=g/a$，两者的乘积为$k_1\cdot k_2=-1$。这说明质量力确实与等压面正交。

如要求自由液面的方程，可引入边界条件求出积分常数C'。考虑到液体不可压缩，液面倾斜前后，e点的位置不变，仍位于液面上。故将e点坐标$y=0$，$z=H$，代入(3-30)式得$C'=H$。由此得自由面方程

$$z_s=H-\frac{a}{g}y_s \qquad (3\text{-}31)$$

式中z_s、y_s为自由面上任一点的坐标。

现来确定液体中的压强分布。由于e点的压强p_0为已知，故将该点的坐标和压强代入（3-29）式，即可求得积分常数C：$C=p_0+\gamma H$，再代回该式，得压强分布规律为

$$p=p_0+\gamma\left[H-z-\frac{a}{g}y\right] \qquad (3\text{-}32)$$

由图3-16中的A点可以看出，上式括号内的$H-z-\frac{a}{g}y$实际上就是待求压强点在液面下的铅垂深度，因此（3-32）式也可表示为$p=p_0+\gamma h$。应该指出，在本问题中所以会得到这个结果，是因为牵连惯性力是水平方向的，沿z方向作用的质量力仍然只有重力。不能就此认为静水压强基本方程是也适用于相对平衡各种情况的通用方程。

二、等角速度旋转运动容器中液体的平衡

图3-17为一盛有液体的圆柱形容器，它绕铅垂轴作等角速度旋转运动。由于液体有粘滞作用，经过一段时间后，容器内的液体质点将以同样的角速度绕轴旋转。这时整个容器内的液体象固体一样和容器一起作旋转运动，即液体与容器之间及液体质点之间没有相对运动，液体对容器来说处于相对平衡状态。这时液面形成一个漏斗形旋转面。将坐标系固结在运动容器上（如图3-17所示），z轴垂直向上与旋转轴相重合。

图 3-17 等角速度旋转容器中液体的相对平衡

现来分析液体质点的受力情况。每一液体质点除受重力之外，还作用有离心惯性力，它的大小为

$$F=\frac{mu^2}{r}=\frac{m}{r}(\omega r)^2=m\omega^2 r$$

式中ω为旋转角速度；r为该点所在位置的半径$r=\sqrt{x^2+y^2}$。单位质量的离心力在x轴和y轴方向的投影为：

$$f_x=\omega^2 r\sin\alpha=\omega^2 x,\qquad f_y=\omega^2 r\cos\alpha=\omega^2 y$$

铅垂方向的单位质量力为$f_z=-g$。将这些单位质量力代入流体平衡微分方程（3-3）中，可得

$$dp=\rho(\omega^2 x dx+\omega^2 y dy-g dz)$$

积分后得

$$p=\rho\left(\frac{\omega^2 x^2}{2}+\frac{\omega^2 y^2}{2}-gz\right)+C=\rho\left(\frac{1}{2}\omega^2 r^2-gz\right)+C \tag{3-33}$$

式中积分常数C可根据边界条件来确定。

在（3-33）式中，令$p=$常数，即得等压面方程

$$z=\frac{\omega^2 r^2}{2g}+C' \tag{3-34}$$

此式表明，等压面是一族以z为轴的旋转抛物面。如要求自由面方程，可根据自由面上的边界条件定出积分常数C'。设自由面顶点的坐标为$r=0$，$z=z_0$代入（3-34）式得$C'=z_0$，故得自由面方程为

$$z_s=z_0+\frac{\omega^2 r_s^2}{2g} \tag{3-35}$$

r_s、z_s为自由面上任一点的坐标。

如容器未旋转时，液体的自由面位于$z = H$处。根据旋转前后液体总体积不变的条件，可求得z_0。由于抛物线旋转体的体积等于同底等高圆柱体体积的一半，因此H必位于z_0和z_R的中间，即$H = \frac{1}{2}(z_0 + z_R)$。$z_R = z_0 + \frac{\omega^2 R^2}{2g}$，为自由面在筒壁处的纵坐标，$R$为容器的内径，由此得

$$z_0 = H - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \tag{3-36}$$

将自由面抛物面顶点的坐标及其压强p_0代入（3-33）式，可得积分常数C，

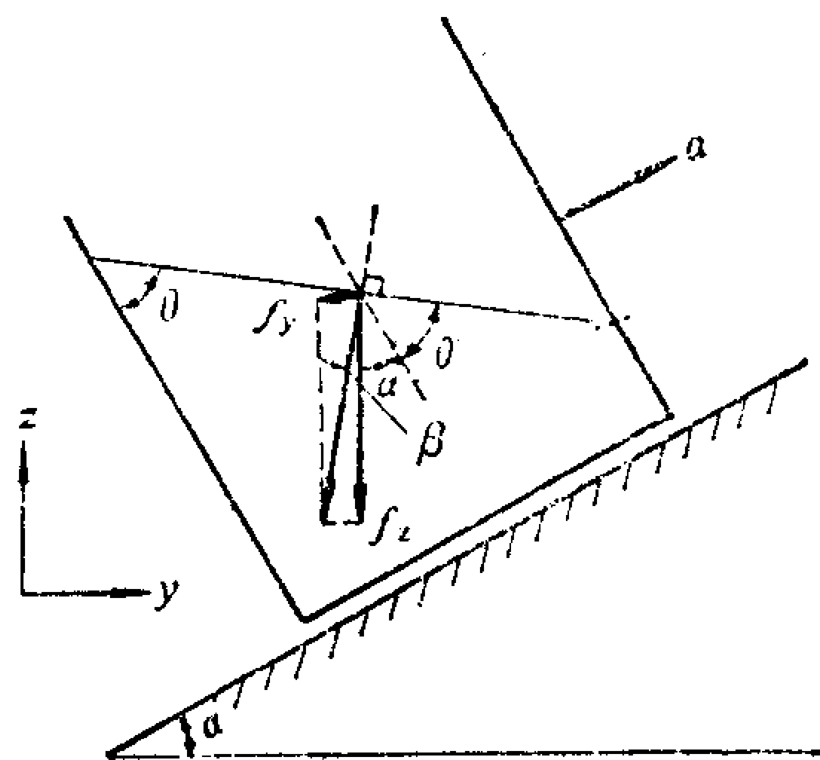
$$C = p_0 + \gamma z_0$$

再代回该式，得容器内液体的压强分布：

$$p = p_0 + \gamma\left[(z_0 - z) + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right] \tag{3-37}$$

由（3-35）式，有$\frac{\omega^2 r^2}{2g} = z_s - z_0$，因此（3-37）式方括号内$(z_0 - z) + \frac{\omega^2 r^2}{2g} = (z_0 - z) + (z_s - z_0)$。从图3-17中的$A$点可以看出，它也是待求压强点在液面下的铅垂深度。由于离心惯性力也是水平方向，所以得到了和情况一相同的结果。

【例 3-5】 有一盛水的矩形敞口容器，沿$\alpha = 30°$的斜面向上作等加速度运动，已知加速度$a = 2\text{m/s}^2$，求液面与壁面的夹角θ。



例 3-5图

【解】 牵连加速度a在y、z轴的分量为

$$a_y = a\cos\alpha = 2 \times 0.866 = 1.732\text{m/s}^2$$

$$a_z = a\sin\alpha = 2 \times 0.5 = 1.0\text{m/s}^2$$

作用在水体上单位质量力的分量为

$$f_y = -a_y = -1.732\text{m/s}^2$$

$$f_z = -g - a_z = -9.81 - 1.0 = -10.81\text{m/s}^2$$

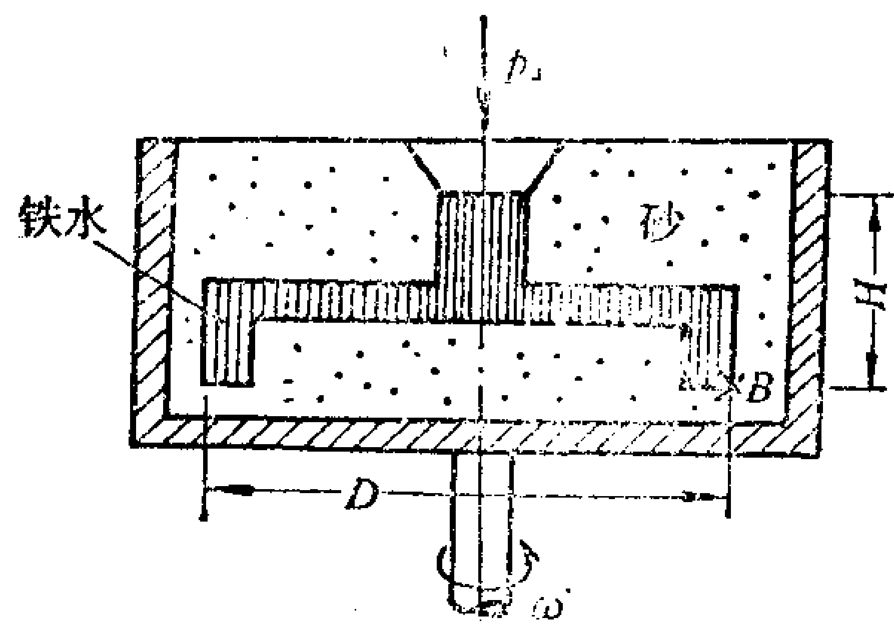
质量力作用线与铅垂线夹角的正切为

$$\tan\beta = f_y/f_z = \frac{1.732}{10.81} = 0.16 \quad 因而\beta = 9.1°$$

由于质量力必然与液面（等压面）正交，故由图可以看出：

$$\theta = 90° - (\alpha + \beta) = 90° - (30° + 9.1°) = 50.9°$$

【例 3-6】 为了提高铸件的质量，用离心铸造车轮。已知铁水重度为70kN/m^3，车轮尺寸$H = 200\text{mm}$，$D = 900\text{mm}$，求转速$n = 600$ r/min时，车轮边缘B处的压强，并与未旋转时的压强比较。



例 3-6图

【解】 等角速旋转容器中的压强分布为

$$p = p_0 + \gamma\left[(z_0 - z) + \frac{\omega^2 r^2}{2g}\right]$$

在本题中p_0为大气压，如用相对压强表示$p_0 = 0$。z_0为转轴处铁水液面的纵坐标，z为B点的纵坐标，因此$z_0 - z = H$。而

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi\times600}{60} = 20\pi\ 1/\mathrm{s}$$

由此可得B点压强

$$p=\gamma\left[H+\frac{\omega^2 r_B^2}{2g}\right]=70\left[0.2+\frac{(20\pi)^2\times(0.45)^2}{2\times9.81}\right]=2866\mathrm{kN/m^2}$$

如不采用离心铸造，B点压强为$p=\gamma H=70\times0.2=14\mathrm{kN/m^2}$，可见采用离心铸造时$B$点压强约为不采用时的200倍。

§3-6 液体作用在平面上的总压力和压力中心

前几节我们已研究了静止液体中的压强分布规律。但在工程实际中有时还需要求出液体对整个受压面的总作用力。在已知静水压强的分布规律后，求总压力的问题实质上是一个求受压面上分布力的合力问题。受压面可以是平面，也可以是曲面，本节先介绍平面上静水总压力的计算，下一节讨论求曲面上的静水总压力问题。

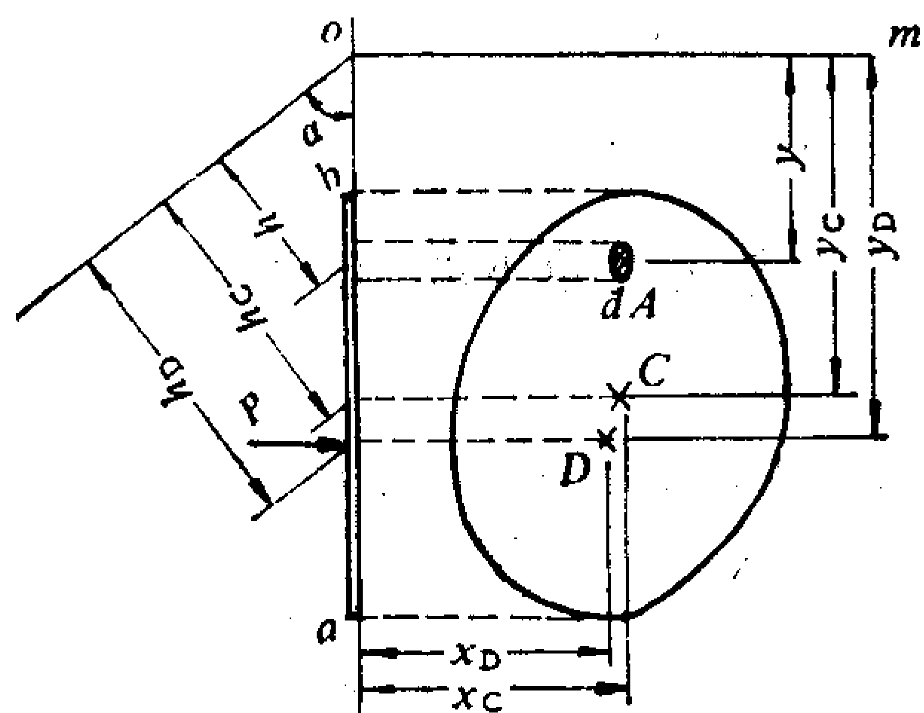


图 3-18 作用在平面上的液体总压力

计算平面上的静水总压力有两种方法：解析法和压强分布图法。下面分别介绍。

一、解析法

（1）确定总压力的大小和方向

设有一任意形状的平面ab，与水平液面成夹角α，液面上压强为大气压p_a，如图3-18所示。平面的延长面与液面交线om设为x轴，ab所在平面上与om垂直的线为y轴。设ab平面的面积为A，形心在C点，C的淹没深度为h_C。

由于流体静压强的方向沿着作用面的内法线方向，所以，作用在平面上各点的液体静压强的方向相同，其合力可按平行力系求和的原理来确定。设在受压平面上任取一微元面积dA，其中心点在液面下的深度为h。采用相对压强来计算，dA上的压强为$p=\gamma h$，则作用在微元面积上的微小总压力为$dP=\gamma h dA$，根据平行力系求和的原理，作用在整个面积A上的总压力P，即为dP沿面积A的积分

$$P=\int_A dP=\int_A p dA=\int_A \gamma h dA=\gamma\sin\alpha\int_A y dA$$

式中$\int_A y dA$为面积A对ox轴的静面矩，它等于面积A与其形心坐标y_C的乘积。如以p_C代表形心C处的静水压强，则

$$P=\gamma\sin\alpha y_C A=\gamma h_C A=p_C A \qquad (3\text{-}38)$$

上式表明：**液体作用于任意形状平面上的总压力的大小，等于该平面的面积与其形心处静水压强的乘积。**

液体总压力的方向，显然是沿着受压面的内法线方向。

（2）确定总压力的作用点——压力中心

总压力的作用点称为**压力中心**，用符号D表之。因为压强和深度成正比，所以压力中心D必然低于形心C。

压力中心D的位置，可根据理论力学中的力矩定理求得：各分力对某一轴的力矩之和等于其合力对同轴的力矩。现在，作用在每个微元面积dA上的微小总压力dP对ox轴力矩之和为

$$\int_A y dP = \int_A \gamma y h dA = \gamma \sin\alpha \int_A y^2 dA = \gamma \sin\alpha I_{xo} \qquad (a)$$

式中 $I_{xo} = \int_A y^2 dA$为受压面的面积对ox轴的惯性矩。

总压力P对ox轴的力矩为

$$P \cdot y_D = \gamma h_C A y_D = \gamma y_C \sin\alpha A y_D \qquad (b)$$

由于合力对某轴之矩等于各分力对同轴力矩之和，因此，

$$\gamma y_C \sin\alpha A y_D = \gamma \sin\alpha I_{xo} \qquad (c)$$

根据惯性矩平行移轴定理，如果面积A对通过它的形心C并与x轴平行的轴的惯性矩为I_{xC}，则$I_{xo} = I_{xC} + y_C^2 A$，代入($c$)式可得：

$$y_D = \frac{I_{xo}}{y_C A} = \frac{I_{xC} + y_C^2 A}{y_C A} = y_C + \frac{I_{xC}}{y_C A} \qquad (3\text{-}39)$$

或写为

$$e = y_D - y_C = \frac{I_{xC}}{y_C A} \qquad (3\text{-}39a)$$

因为$I_{xC}/y_C A$总是正的，说明$y_D - y_C > 0$，也就是压力中心D点总是低于形心C。

常见的图形的面积A、形心距离y_C以及惯性矩I_{xC}，见表3-2。

常见图形的A、y_C及I_{xC}值 表 3-2

几何图形名称	面积 A	形心坐标 y_C	对通过形心轴的惯性矩 I_{xC}
矩形	bh	$\frac{1}{2}h$	$\frac{1}{12}bh^3$
三角形	$\frac{1}{2}bh$	$\frac{2}{3}h$	$\frac{1}{36}bh^3$
梯形	$\frac{h}{2}(a+b)$	$\frac{h}{3} \cdot \frac{(a+2b)}{(a+b)}$	$\frac{h^3}{36}\left[\frac{a^2+4ab+b^2}{a+b}\right]$
圆	$\frac{\pi}{4}d^2$	$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{64}d^4$

续表

几何图形名称	面　　积 A	形心坐标 y_C	对通过形心轴的惯性矩 I_{xC}
半　圆	$\frac{\pi}{8}d^2$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{(9\pi^2-64)}{72\pi}r^4$
椭　圆	$\frac{\pi}{4}bh$	$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi}{64}bh^3$

上面确定了压力中心D与ox轴的距离y_D。根据同样原理，对oy轴取矩，可以得出压力中心D与oy轴的距离x_D，

$$\int_A x dP = \gamma \sin\alpha \int_A xy dA$$

式中$\int_A xy dA$是面积A对x、y轴的惯性积，用符号I_{xyo}表示。从数学上看，它不同于惯性矩，数值可正可负。根据平行移轴定理，$I_{xyo}=I_{xyC}+x_C y_C A$，其中$I_{xyC}$是对通过形心$C$平行于$x$、$y$轴的惯性积。而

$$\int_A x dP = x_D P = x_D A\gamma y_C \sin\alpha$$

因为
$$\gamma\sin\alpha(I_{xyC}+x_C y_C A)=x_D A\gamma y_C \sin\alpha$$

所以
$$x_D=\frac{I_{xyC}}{y_C A}+x_C \tag{3-40}$$

惯性积I_{xyC}是有正有负的，故x_D可能大于或小于x_C。也就是对任意形状的平面来说，压力中心D可能在形心C的这边或那边。在多数工程问题中，受压面ab具有一个纵向对称轴，例如矩形、圆、等腰三角形、等腰梯形、椭圆等，这种情况下可取oy轴通过形心，于是$I_{xyC}=0$，$x_D=x_C$。也就是压力中心位于纵向对称轴上，不需另行计算。

二、压强分布图法

（1）压强分布图的绘制

为了形象地表示受压面上的压强分布，可在其上绘制压强分布图。它是用按一定比例尺确定的直线段长度表示点压强的大小，用线端的箭头表示压强的作用方向。这些垂直指向受压面的线段组成的图形就是压强分布图。由于各点压强中的表面压强p_0部分，在受压面上是均匀分布的，所以一般只绘出余压强γh的分布图。余压强沿水深是直线分布的。对于底边与水平面平行的矩形受压面，只要把最高和最低两点的压强用线段标出，中间以直线相连，就可绘出该受压面上的压强分布图。下面绘出几种常见情况的压强分布图（见图3-19）。

（2）用压强分布图求矩形平面上的总压力

压强分布图法只适用于求底边平行于水平面的矩形平面上的总压力。设有一平面，其宽为b，与水平面的夹角为α，底边的淹没深度为H（见图3-20）。

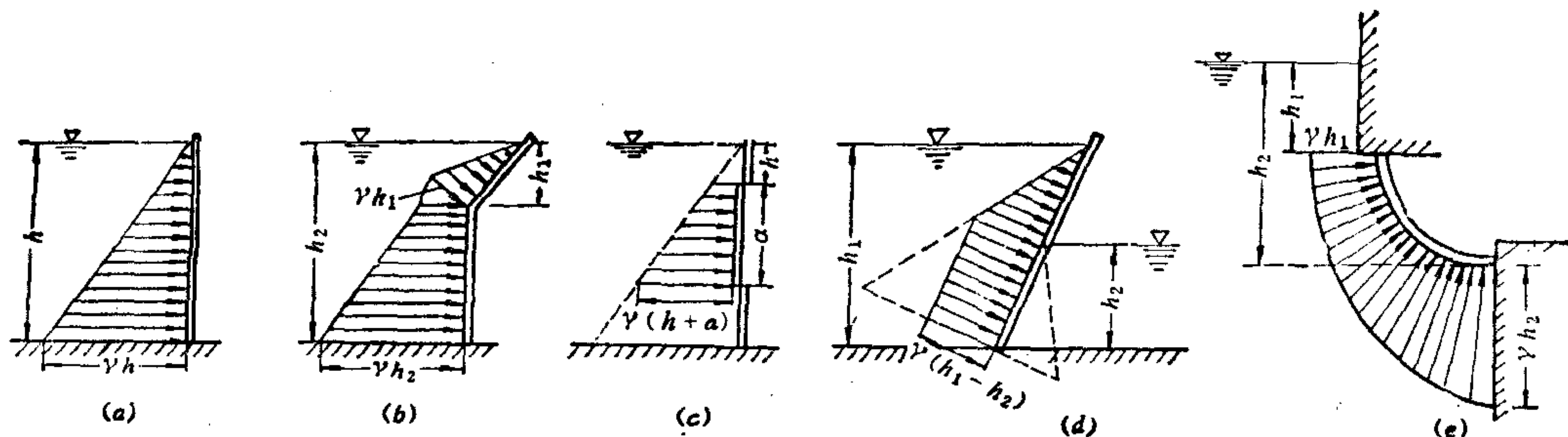


图 3-19　静水压强分布图

作余压强分布图ABC。当表面压强为大气压时，余压强即为相对压强。在矩形平面上水深h处取一高为dy、宽为b的微元面积。液体作用在这个微元面积上的微小总压力为

$$dP = pdA = \gamma hbdy$$

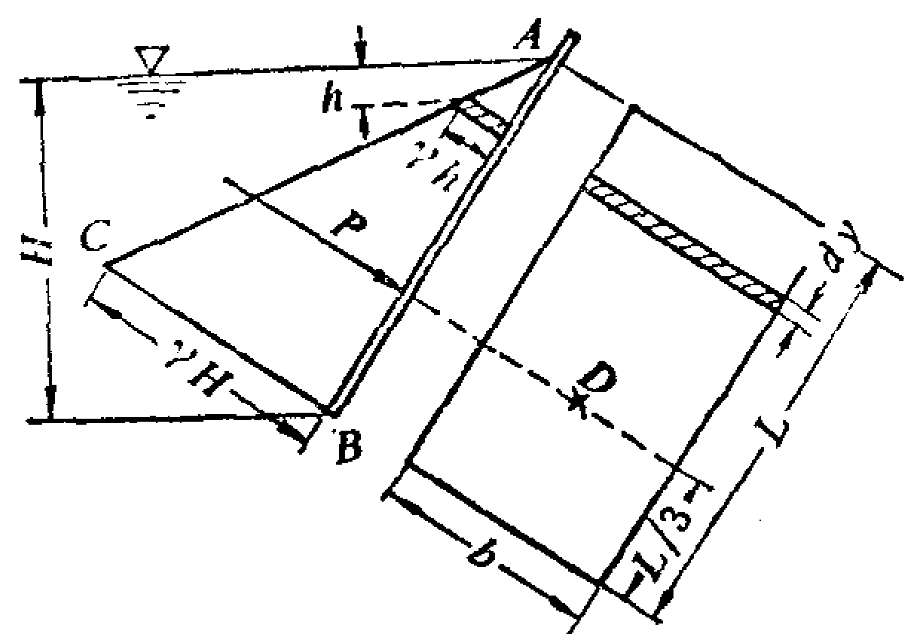


图 3-20　矩形平面上的总压力

由图3-20可见，γh为所取微元面积处压强分布图上的压强坐标，而γhdy为与该处所对应的压强分布图上微小面积dS。因此$dP = bdS$，作用在该平面上的液体总压力为

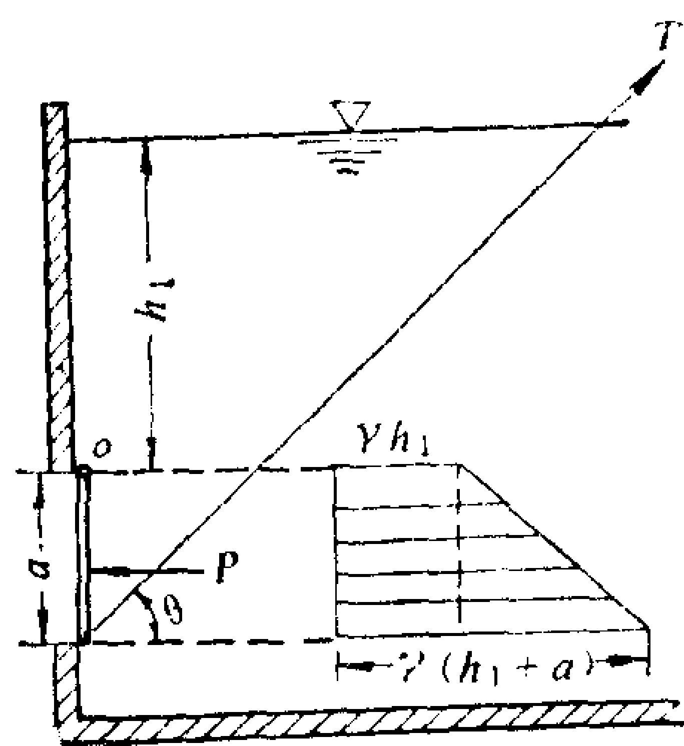
$$P = \int_A dP = \int_S bdS = bS \qquad (3\text{-}41)$$

式中S为压强分布图的面积。

由此可见，液体作用在底边平行于水平面的矩形平面上的总压力，等于压强分布图的面积与矩形平面宽度b的乘积。

由于压强分布图所表示的正是力的分布情况，而总压力则是平面上各微元面积上所受液体压力的合力。故压力中心必然通过压强分布图的形心。其方向垂直于受压面。

如压强分布图为三角形，则压力中心位于距底边$\frac{1}{3}L$处，L为平板AB的长度。由于矩形平面有对称轴，所以形心C与压力中心D都在对称轴上。



例 3-7图

【例 3-7】　在水箱的泄水孔上装有一高为a、宽为b的矩形闸门，门的上缘在水面下的淹设深度为h_1，闸门可绕O轴旋转，并可用与水平面成θ角的索链开启。已知：$a = 1\text{ m}$，$b = 2\text{ m}$，$h_1 = 3\text{ m}$，$\theta = 45°$。求开启闸门时所需的拉力T。

【解】　一、解析法

1）求静水总压力P

由于闸门另一侧也有大气压，故计算液体总压力时应采用相对压强。应用（3-38）式得

$$P = p_C A = \gamma\left(h_1 + \frac{a}{2}\right)b \cdot a = 9807 \times \left(3 + \frac{1}{2}\right) \times 2 \times 1 = 68650\text{N}$$

$$= 68.65\text{kN}$$

2）求压力中心的位置

$$e=\frac{I_{xC}}{y_C A}=\frac{\frac{1}{12}ba^3}{\left(h_1+\frac{a}{2}\right)b\cdot a}=\frac{a^2}{12\left(h_1+\frac{a}{2}\right)}=\frac{1^2}{12\left(3+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=0.024\text{m}$$

3）求拉力T

当启门力矩大于总压力对O轴的力矩时，闸门可能被打开，故有

$$T a\cos\theta=P\left(\frac{a}{2}+e\right)$$

式中$a\cos\theta$为T的力臂，$\frac{a}{2}+e$为P离O的距。

由此得

$$T=\frac{P\left(\frac{a}{2}+e\right)}{a\cos\theta}=\frac{68650\left(\frac{1}{2}+0.024\right)}{1\times0.707}=50880\text{N}$$

$$=50.9\text{kN}$$

二、用压强分布图法

1）静水总压力P为压强分布图梯形面积与宽度b的乘积。

$$P=bS=b[\gamma h_1+\gamma(h_1+a)]\frac{a}{2}=\gamma ba\left(h_1+\frac{a}{2}\right)$$

$$=9807\times2\times1\times\left(3+\frac{1}{2}\right)=68.7\text{kN}$$

2）求压力中心D的位置

下面两种方法都可以求受压面形心与压力中心的间距e。第一种方法是将梯形的压强分布图分成一个矩形和一个三角形，利用各部分面积对某一轴静矩之和等于其总面积对同一轴的静矩的定理，即可求得e。现对闸门形心C点取矩

$$\gamma h_1 a\cdot o+\frac{\gamma}{2}a^2\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)=S\cdot e$$

$$e=\frac{\gamma}{12}a^3\Big/\left[\gamma a\left(h_1+\frac{a}{2}\right)\right]=\frac{a^2}{12}\Big/\left[h_1+\frac{a}{2}\right]=0.024\text{m}$$

第二种方法是利用表3-2中关于梯形的公式。如令y_D'和y_C'分别代表压强分布图形心和闸门形心到底边的距离，则

$$y_D'=\frac{a}{3}\left[\frac{\gamma(h_1+a)+2\gamma h_1}{\gamma(h_1+a)+\gamma h_1}\right]=\frac{a}{3}\left[\frac{3h_1+a}{2h_1+a}\right]=\frac{1}{3}\left[\frac{3\times3+1}{2\times3+1}\right]$$

$$=0.476\text{m}$$

$$e=y_C'-y_D'=0.5-0.476=0.024\text{m}$$

两种方法所得结果相同。得到拉力T也是50.9kN。

§ 3-7 液体作用在曲面上的总压力和阿基米德原理

计算液体作用在曲面上的总压力，同样也是求作用于每个微元面积上的微小压力的合

力问题。但是，组成整个曲面的各个微元面积，具有各自不同的方位。如果说计算作用在平面上的液体总压力是求一组平行力系的合力问题，那么计算作用于曲面上的液体总压力就是一个求任意空间力系的合力问题。因此，液体作用在曲面上的总压力问题，理应包括求总压力和求力偶两个方面。但是，用解析法求一般问题的解，比较复杂。而工程中遇到的几乎都是一些对称的两向（柱状）曲面或球面。对于这种情况，只须求出总压力便可满足工程需要，而力偶一般不存在，或不必求，所以这里只讨论总压力的计算方法。

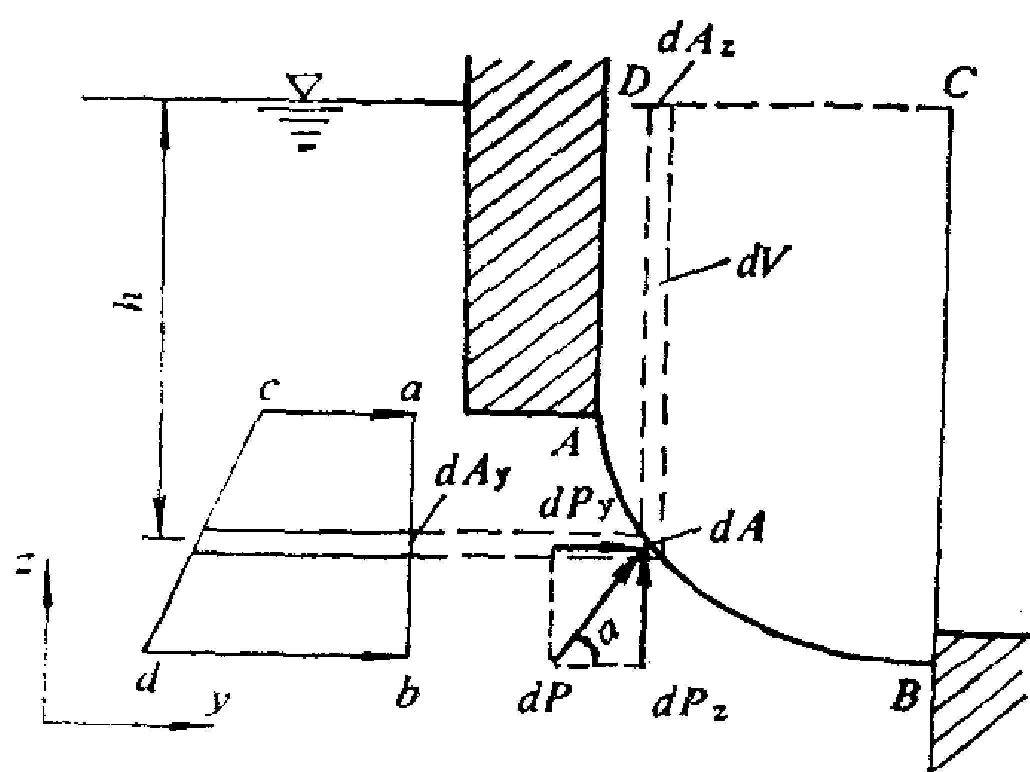


图 3-21 曲面上总压力的两个分量

一、总压力的水平分力和铅垂分力

如图3-21所示，取一两向曲面来讨论，所得结论也可推广到三向曲面的情况。

设有两向曲面，在纸面上的投影为AB，垂直于纸面的宽度为b，液体在曲面左侧。在曲面上取一与底边平行的长条形微面面积dA，作用在这个微元面积上的微小总压力为dP。如dA的形心位于液面下的深度为h，则$dP=\gamma h dA$。

由于作用在曲面的每个微元面积上的微小总压力不是互相平行的，不能像平面上那样用直接积分求和法。为了计算方便，把每个微小总压力分解为水平分量dP_y和铅垂分量dP_z，然后分别积分，求出水平分量的合力P_y和铅垂分量的合力P_z。这就是液体总压力的两个分量。

dP在y轴和z轴方向的分量分别为：

$$dP_y = dP\cos\alpha = \gamma h\cos\alpha dA,$$

$$dP_z = dP\sin\alpha = \gamma h\sin\alpha dA_{\circ}$$

由图3-21可见，$dA\cos\alpha$是面积dA在垂直于y轴的铅垂面上的投影面积，以dA_y表之；$dA\sin\alpha$是面积dA在垂直于z轴的水平面上的投影面积，以dA_z表之。代入前式得

$$dP_y = \gamma h dA_y \quad 和 \quad dP_z = \gamma h dA_z$$

对上式积分，即可求出总压力的水平分力和铅垂分力为：

$$P_y = \int_{A_y} \gamma h dA_y = \gamma \int_{A_y} h dA_y \qquad (3\text{-}42)$$

$$P_z = \int_{A_z} \gamma h dA_z = \gamma \int_{A_z} h dA_z \qquad (3\text{-}43)$$

式中A_y、A_z分别为曲面在垂直于y轴和z轴的平面上的投影面积。

由理论力学可知，$\int_{A_y} h dA_y$是铅垂投影面积A_y对此铅垂平面与自由液面交线的静矩，它等于此投影面积A_y与其形心的淹没深度h_C的乘积，即$\int_{A_y} h dA_y = A_y h_C$，故得

$$P_y = \gamma h_C A_y \qquad (3\text{-}44)$$

上式表明，液体作用于曲面上总压力的水平分力，等于该曲面在垂直于所求分力的铅垂投

影面上的总压力。

对于等宽度的两向曲面，总压力的水平分力还可以用铅垂投影面上的压强分布图 $abcd$（见图3-21）来计算，即水平分力等于压强分布图的梯形面积 S_{abcd} 与宽度 b 的乘积。水平分力的作用线则通过压强分布图的形心。

现来求铅垂分力 P_z。由图可见，（3-43）式中的被积函数 hdA_z 是以 dA_z 为底、h 为高的柱形体积，以 dV_z 表之，则

$$P_z=\gamma\int_{A_z}hdA_z=\gamma\int_{A_z}dV_z=\gamma V_z \quad (3-45)$$

式中 V_z 为曲面以上的全部微元体积 dV_z 的总和，即图3-21中 $ABCD$ 所包围的体积。此体积称为压力体。因此，液体作用在曲面上总压力的铅垂分力等于压力体内液体的重量。压力体可这样确定：取一铅垂线，令其绕曲面的边界平行移动一周，它形成的柱面即为压力体的侧面；压力体的下端面即曲面本身，自由液面或其延伸面为上端面，这几个面包围的柱体就是压力体。总压力的铅垂分力显然通过压力体的形心。

图3-21所示的情形，P_z 的方向是向上的。如在同一图中液体位于曲面的右侧（如图3-22），则 P_z 是向下的。因此，P_z 的方向一般可用下述方法来确定：如压力体与作用液体位于曲面的同一侧（这样的压力体称为实压力体），P_z 的方向向下；如压力体与作用液体分别位于曲面的两侧（这样的压力体称为虚压力体），则 P_z 的方向向上。

对于水平投影面具有重迭部分的曲面，在确定其压力体时，可将这样的曲面分成几个水平投影面没有重迭的部分，分别求出各部分的压力体，然后迭加在一起，这样就可得到整个曲面的压力体。在图3-23中，如求曲面 ABC 上的压力体，可将曲面 ABC 分成 AB 和 BC 两个在水平面上投影没有重迭的部分，对应于曲面 AB 上压力体为 ADB，力的方向向下；对应于曲面 BC 的压力体为 $ADBC$，力的方向向上，ADB 部分抵销。故对应于整个曲面的压力体为以 ABC 为底的半圆柱体。

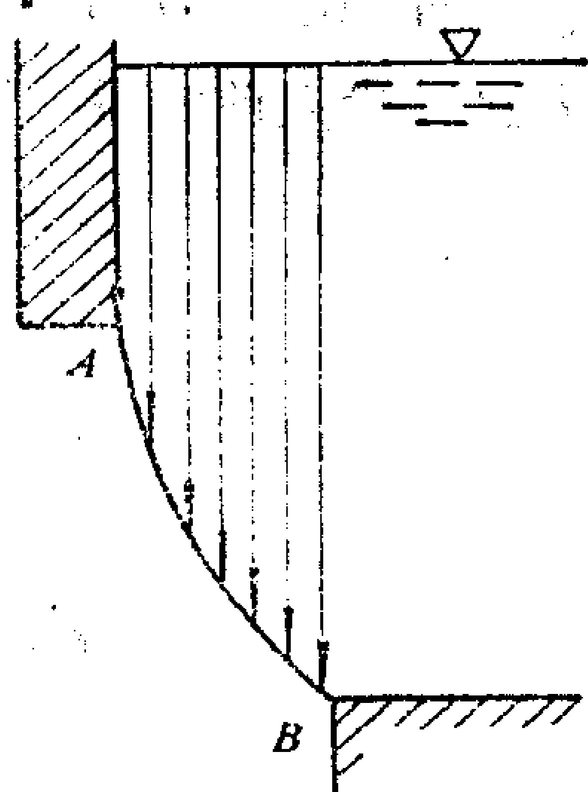


图 3-22 实压力体

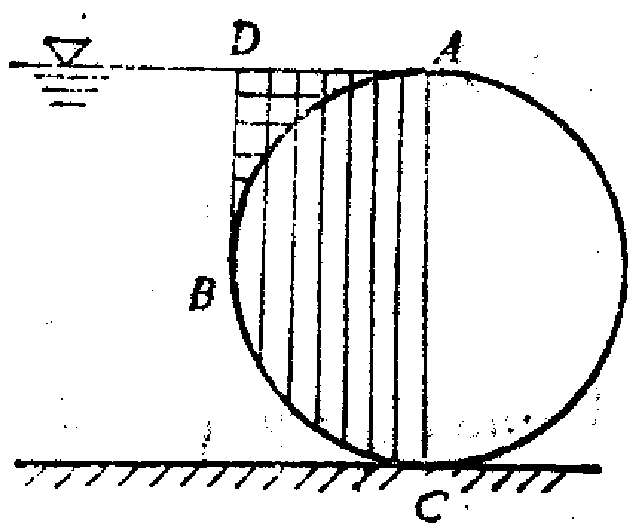


图 3-23 半圆柱面上的压力体

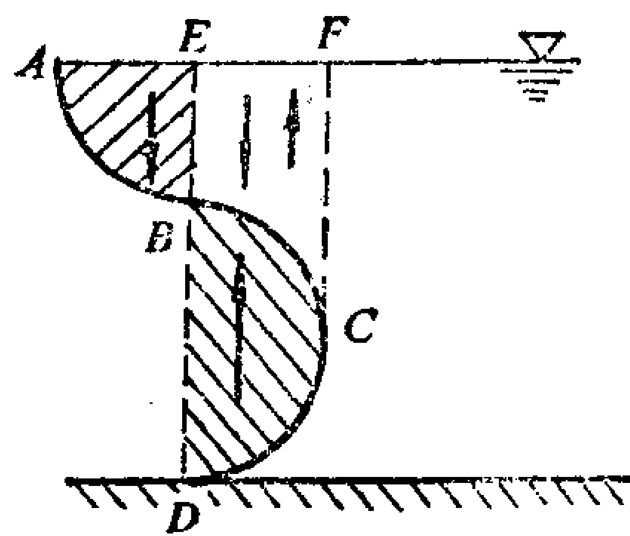


图 3-24 复杂曲面上的压力体

对于图3-24所示的凹凸相间的复杂曲面 $ABCD$，同样可以把它分为在水平面上投影没有重迭的 ABC 和 CD 两部分。作用在曲面 ABC 上的压力体 $ABCFEA$ 为实压力体，作用在曲面 CD 上的压力体 $EDCFE$ 为虚压力体。迭加后 $EBCFE$ 部分相互抵消，余下的部分如图中阴影线所示，$BDCB$ 部分 P_z 向上，$ABEA$ 部分 P_z 向下。这种情况表明，作用在曲面上除总压力外还有一个力偶。

如总压力的水平分力与垂直分力在同一平面内，则可求出总压力为

$$P=\sqrt{P_y^2+P_z^2} \tag{3-46}$$

总压力的作用线与水平线的夹角α是

$$\alpha=\arctan(P_z/P_y) \tag{3-47}$$

P的作用线必通过P_y与P_z的交点，但该交点不一定在曲面上。如要确定总压力P在曲面上的作用点，则可先求出P_y与P_z的作用线，然后求出总压力P的作用线，这作用线与曲面的交点即为P的作用点。

二、总压力在任意方向的分力

在工程实际中有时并不需要求总压力的水平分力和铅垂分力，而是要求总压力在某一指定方向的分力。例如在图3-25中，要求液体作用在曲面ABC上的总压力在n-n方向的分力。对这类问题，可用下述两种方法中的一种，计算要简便些。

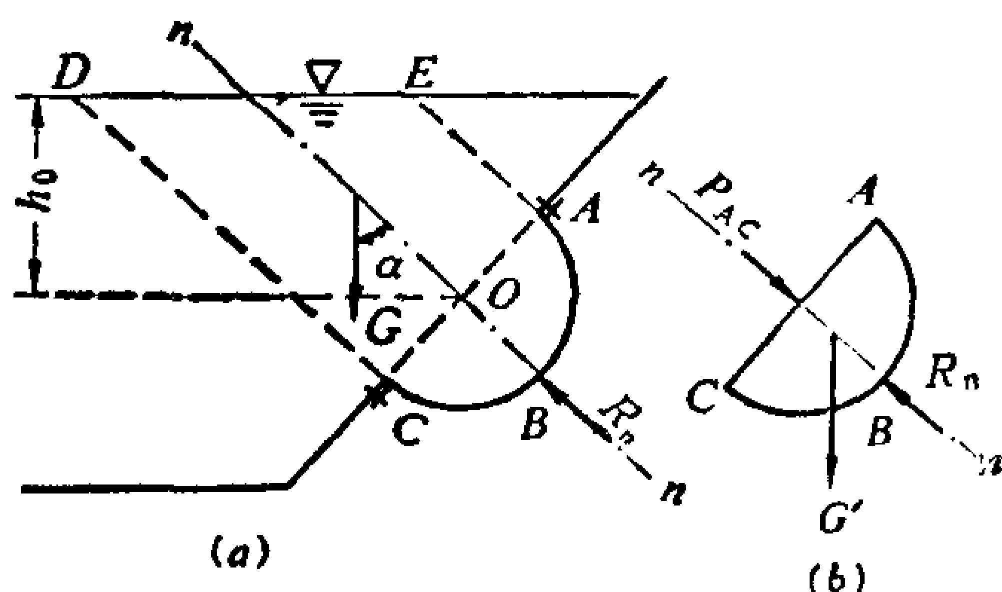


图 3-25 总压力在n方向的分力

方法一：取一条与n-n平行的直线，令它绕曲面ABC的边界平行移动一周，这样割出的一块倾斜的柱体，取自由液面与曲面之间的部分（即图中$ABCDEA$这块液柱）来讨论。由于这块液体是静止的，作用于其上的所有外力在n-n方向也是平衡的，因此

$$G\cos\alpha+R_n=0 \tag{3-48}$$

式中G为所取液柱体$ABCDEA$的重量；α为n-n线与铅垂线的夹角；R_n为曲面对液体的反作用力在n-n方向的分力。由于$P_n=-R_n$，故得

$$P_n=G\cos\alpha \tag{3-49}$$

由此可见，液体作用在曲面上的总压力在指定方向的分力，等于以平行于该方向的直线为母线割出的一块液柱的重量在该方向的投影，液柱的上底为自由液面或其延续面，液柱的下底为曲面本身。显然，求铅垂分力的问题只是这种方法的特殊情况。

方法二：取平面AC和曲面ABC所包围的液柱$ABCA$为隔离体（见图3-25b）。写出作用于该隔离体上所有外力在n-n方向的平衡方程式

$$P_{AC}+G'\cos\alpha+R_n=0 \tag{3-50}$$

式中P_{AC}为液体作用于倾斜平面AC上的总压力，它等于AC的形心O点的压强与其面积A_{AC}的乘积，即$P_{AC}=\gamma h_0 A_{AC}$；G'为这块液体的重量。由于$P_n=-R_n$，故得

$$P_n=\gamma h_0 A_{AC}+G'\cos\alpha \tag{3-51}$$

三、液体作用在封闭曲面上的总压力

设有一完全浸没在液体内的物体（如图3-26所示）。现讨论液体作用于该物体表面上的总压力的水平分力。将封闭曲面分为在铅垂平面yoz上的投影没有重迭的左右两部分。作用在左曲面cda上的总压力的水平分力P_{x1}，应等于此曲面在投影面$a'c'$上所受的总压力，方向与x轴一致；作用在右曲面cba上的总压力的水平分力P_{x2}，也等于投影面$a'c'$上所受的总压力，方向与x轴相反。由于P_{x1}与P_{x2}大小相等，方向相反，它们互相抵销。同理，对于y方向及其它水平方向，都可得出同样的结果。因此，液体作用在任意封闭表面上的总压力的水平分力等于零。

再讨论总压力的铅垂分力。将曲面分为在水平面上的投影不重迭的上下两部分。作用在上曲面bcd上的总压力的铅垂分力P_{z1}，等于压力体$bcdd'b'$内的液体重量，方向向下；

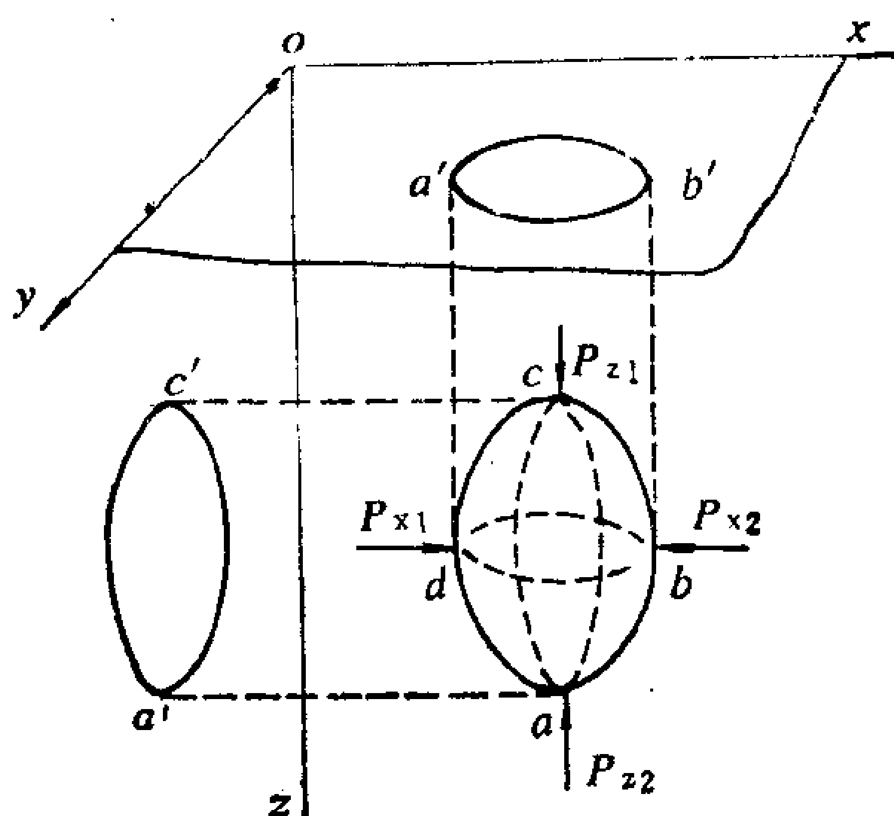


图 3-26 封闭曲面上的液体总压力

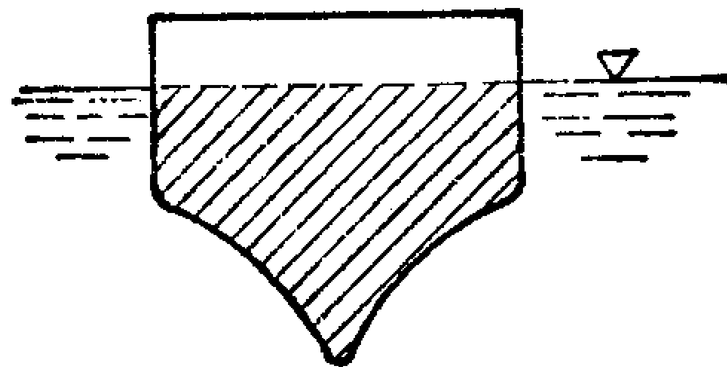


图 3-27 浮体的压力体

作用在下曲面bad上的总压力的铅垂分力P_{z2}，等于压力体$badd'b'$内的液体重量，方向向上。因此，作用在整个封闭曲面上总压力的铅垂分力P_z应为：

$$P_z = P_{z1} - P_{z2} = \gamma[V_{bcdd'b'} - V_{badd'b'}] = -\gamma V_{abcd} \tag{3-52}$$

式中V_{abcd}为该物体的体积，负号表示与所取坐标轴方向相反，即方向向上。

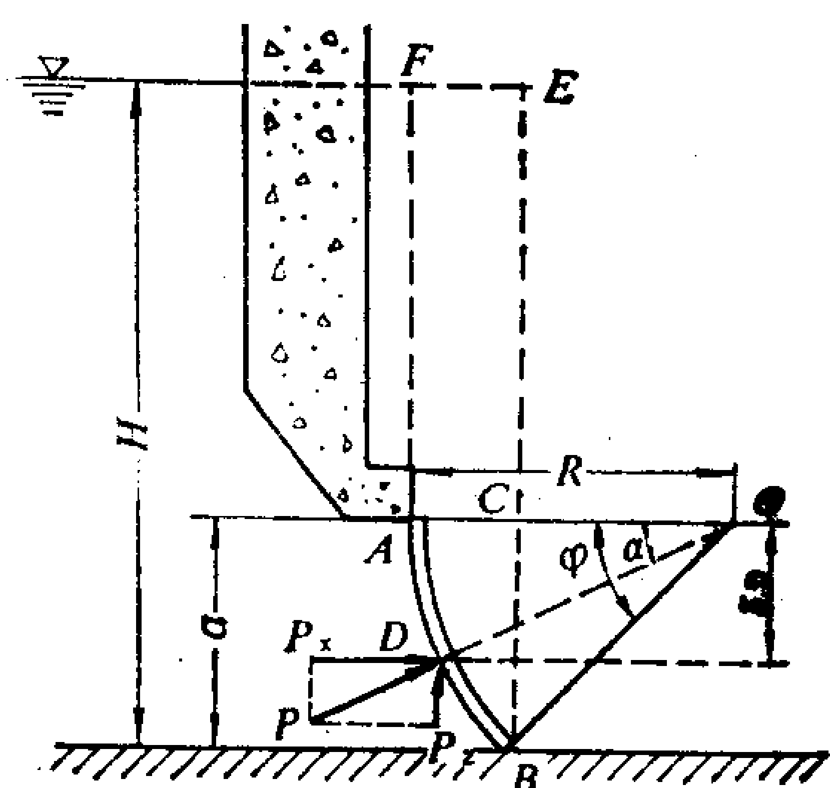
如果物体没有全部浸没在液体内，而是浮在液体表面上（如图3-27），则可把液面以下部分（图中阴线部分）看成是一个封闭曲面，上述结论仍然适用。

因此，液体作用于浸没在其内部的（或浮在它表面上的）物体上的总压力，等于该物体同体积（或浸没在液体中体积）液体的重量，其方向是沿铅垂线向上的。这个结论就是众所周知的**阿基米得原理**。这个向上的力称为**浮力**。浮力的作用线通过物体的几何中心，又称**浮心**。

一切浸没在液体中（或漂浮在液面上）的物体都受两个力作用：重力G和浮力P_z。根据G和P_z的大小，可有三种情况：

1）重力G大于浮力P_z，物体下沉到底部才能停止，称为**沉体**；

2）重力G等于浮力P_z，物体在任何深度处都可处于平衡状态，因它潜没于液体中，称为**潜体**；



例 3-8 圆弧形闸门

3）重力G小于浮力P_z，物体将上浮，直至部分物体露出液面，从而减少了浸在液体中的体积，使浮力与重力平衡，这种情况的物体称为**浮体**。

【例 3-8】 有一高度$a = 2$m、宽度$b = 5$m的深孔弧形闸门，闸门的圆心角$\varphi = 45°$，轴与闸孔上缘位于同一高度，闸孔下缘淹没在水面下的深度为$H = 6$ m。试求液体作用在闸门上的总压力。

【解】 求闸门上的静水总压力须先分别求出其水平分力与铅垂分力。

1）总压力的水平分力P_x为

$$P_x = \gamma\left(H - \frac{a}{2}\right)ab = 9.81\left(6 - \frac{2}{2}\right) \times 2 \times 5 = 490.5\text{kN}$$

2）总压力的铅垂分力P_z等于压力体$ABCEF$内的液体重量。由于

面积$ABCEF$ = 面积$ABOC$ − 面积BOC + 面积$ACEF$

$$= \frac{1}{8}\pi\left(\frac{a}{\sin\varphi}\right)^2 - \frac{1}{2}a^2 + \left(\frac{a}{\sin\varphi} - a\right)(H - a)$$

$$= \frac{1}{8}\pi\left(\frac{2}{\sin 45°}\right)^2 - \frac{1}{2}(2)^2 + \left(\frac{2}{\sin 45°} - 2\right)(6 - 2)$$

$$= 4.455\text{m}^2$$

$$P_z = \gamma b(\text{面积}ABCEF) = 9.81 \times 5 \times 4.455 = 218.5\text{kN}$$

3）总压力P为

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_z^2} = \sqrt{490.5^2 + 218.5^2} = 537\text{kN}$$

4）求总压力的作用点

P的作用线与水平线的夹角α为

$$\alpha = \arctan(P_z/P_x) = \arctan(218.5/490.5) = 24°$$

因圆弧上各微小总压力都垂直于圆弧面，即都通过圆弧中心O点，所以它们的合力P必然也通过O点。设P的作用线与圆弧闸门的交点为D，这点与圆弧中心O点的铅垂距离为z_D，则

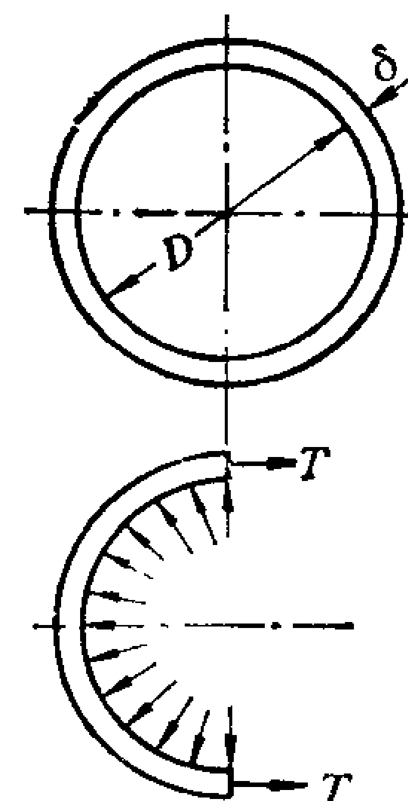
$$z_D = R\sin\alpha = \frac{2}{\sin 45°} \times \sin 24° = 1.15\text{m}$$

【例 3-9】 设管道直径$D = 200$mm，管壁厚度$\delta = 10.5$mm，管壁材料的允许应力$[\sigma] = 25\text{kN/mm}^2$，求管道内液体的最大许可压强。

【解】 管内的液体压强将使管壁产生张力。如不计液体重量对压强的影响，则每米管长的管壁张力T可用下法算出。

取1m长的管段，沿其直径平面将它分为两个半圆管。作用于这半圆管里侧的液体总压力在垂直于切割的直径平面方向的分量，等于该切割的直径平面（矩形平面）上所受的总压力，即$P = pD \cdot 1$。

由于这个总压力是由管壁的两个断面承受的，故$2T = P = pD$，$T = \frac{1}{2}pD$。



例 3-9图 管壁所受的力

另一方面，管壁张力又等于管壁断面面积与应力σ的乘积，即$T = \delta \cdot 1 \cdot \sigma$，代入上式，得 $\delta D = \frac{1}{2}pD$。式中如p与D为已知，σ用材料允许应力$[\sigma]$代入，则可得计算管壁厚度的公式：

$$\delta = \frac{pD}{2[\sigma]}$$

考虑到管道在铸造时可能出现的缺陷和锈蚀等因素，在计算管壁厚度时还需附加一安全值e，按规范一般采用3～7mm。故

$$\delta = \frac{pD}{2[\sigma]} + e \tag{3-53}$$

在本题的情况，δ和D为已知，可利用上式，根据材料的允许应力，求出管内液体的最大许可压强。因此，如采用$e = 4$mm，则得p_{max}为：

$$p_{max}=\frac{2[\sigma](\delta-e)}{D}=\frac{2\times25(10.5-4)}{200}=1.6\text{kN/mm}^2$$
$$=160\text{kN/cm}^2$$

§ 3-8 重力场中的大气压分布

从§3-3中我们讨论的流体平衡微分方程（3-3）式的积分开始，一直到本节以前，都是针对不可压缩流体的。即认为流体的密度是常数。所得的压强分布规律对于高程变化不十分显著（例如数百米以内）的气体也是适用的。但是要研究大气层中的压强分布，就必须考虑空气的压缩性了。本节我们将讨论重力场中静止大气的压强分布规律。

讨论的出发点仍然是流体平衡微分方程，只是式中的密度ρ不再是常量。在重力场中，单位质量力的分量仍为$f_x=0$，$f_y=0$，$f_z=-g$。代入（3-3）式，得$dp=-\rho gdz$。

要积分上式，必须给出附加条件。气体的密度一般来说是压强和温度的函数，对于完全气体$\rho=p/(RT)$，代入上式得

$$dp=-\frac{pg}{RT}dz \tag{3-54}$$

根据对大气层的实测，从海平面到高程11公里的范围内，温度随高度的上升而降低，大致是每升高1000m温度下降6.5°C。这一层大气通常称为对流层。从11公里到20公里，温度几乎不变，为－56.5°C，这一层称为同温层。

一、在对流层内温度随高程的变化关系为

$$T=T_0-az \tag{3-55}$$

式中$a=0.0065$°K/m，z的单位为m。T_0为海平面处的绝对温度，T为高程z处的绝对温度。国际上采用一种公认的标准大气状态作为计算的依据，即认为在海平面处温度为$T_0=288$K（15°C），大气压为$p_{atm}=760\text{mmHg}=1.013\times10^5\text{N/m}^2=1.033\text{kgf/cm}^2$。

将（3-55）式代入（3-54）式中，移项并改写后，有

$$\frac{dp}{p}=\frac{g}{aR(T_0-az)}d(T_0-az)$$

积分得

$$\ln p=\frac{g}{aR}\ln(T_0-az)+C$$

将海平面处的边界条件$z=0$，$p=p_{atm}$代入上式，可求得积分常数C

$$C=\ln p_{atm}-\frac{g}{aR}\ln T_0$$

代回积分式最后得：

$$\frac{aR}{g}\ln\frac{p}{p_{atm}}=\ln\left(\frac{T_0-az}{T_0}\right)$$

或

$$\frac{p}{p_{atm}}=\left(1-\frac{az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}} \tag{3-56}$$

将$a=0.0065$k/m，$T_0=288$K，$R=287$J/kg·k代入，得

$$\frac{p}{p_{atm}}=\left(1-\frac{z}{4.43\times10^4}\right)^{5.26} \tag{3-57}$$

这就是对流层中标准大气的分布公式。

若要求对流层中的密度分布，可将（3-56)式代入状态方程中：

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\frac{pRT_0}{p_0RT}=\frac{pT_0}{p_0(T_0-az)}=\frac{p}{p_0}\left(1-\frac{az}{T_0}\right)^{-1}=\left(1-\frac{az}{T_0}\right)^{\frac{g}{aR}-1}$$

将有关数据代入，得

$$\frac{\rho}{\rho_0}=\left(1-\frac{z}{4.43\times10^4}\right)^{4.26} \tag{3-58}$$

式中ρ_0为海平面处空气的密度，

$$\rho_0=\frac{p_{atm}}{RT_0}=\frac{1.013\times10^5}{287\times288}=1.2256\text{kg/m}^3$$

二、在同温层，因温度不变，压强和密度的关系为$\frac{p}{p_s}=\frac{\rho}{\rho_s}$，$p_s$、$\rho_s$分别为$z=11000$m处的大气压和密度。将它代入（3-3）式，有

$$dp=-\frac{p\rho_s}{p_s}gdz$$

积分上式，并根据$z=11000$m处的边界条件确定积分常数，可得

$$z-z_s=\frac{p_s}{\rho_s g}\ln\frac{p_s}{p},$$

由于$\frac{p_s}{\rho_s}=RT_s$，故上式可写成

$$z-z_s=\frac{RT_s}{g}\ln\frac{p_s}{p} \tag{3-59}$$

同温层的绝对温度$T_s=273-56.5=216.5$K，再将其它有关数据代入，得

$$p=p_s\exp\left(\frac{11000-z}{6340}\right) \tag{3-60}$$

这就是同温层中标准大气压的分布规律。

【例 3-10】 计算高程3000m处的标准大气压，如按不可压缩流体和等温情况计算，误差各有多少

【解】 $z=3000$m仍在对流层内，故按对流层标准大气压分布（3-57）式计算

$$p=p_{atm}\left(1-\frac{z}{4.43\times10^5}\right)^{5.26}$$

$$=1.013\times10^5\left(1-\frac{3000}{4.43\times10^5}\right)^{5.26}=7.0\times10^4\text{N/m}^2$$

如按不可压缩流体计算，先求出海平面处空气的密度：

$$\rho_0=\frac{p_{atm}}{RT_0}=\frac{1.013\times10^5}{287\times(273+15)}=1.2256\text{kg/m}^3。$$

$$p=p_{atm}-\rho gz=1.013\times10^5-1.2256\times9.81\times3000=65230\text{N/m}^2。$$

误差为

$$\Delta_1=\frac{70000-65230}{70000}\times100\%=6.8\%$$

如果按等温情况考虑，可根据（3-59）式计算，只不过式中的z_s、T_s、p_s应将海平面处标准大气状态代入，故有

$$p=p_s\exp\left[(z_s-z)\frac{g}{RT_s}\right]$$

$$=1.013\times10^5\cdot\exp\left[-\frac{3000\times9.81}{287\times288}\right]=7.095\times10^4\text{N/m}^2$$

误差为

$$\Delta_2=\frac{70950-70000}{70000}\times100\%=1.36\%$$

可见，按不可压缩流体考虑误差较大；如海拔不很高，按等温情况考虑，误差小些。

习　题

3-1　设水面为标准大气压，试求水面下 3 m处的绝对压强和相对压强（以N/m²计）。

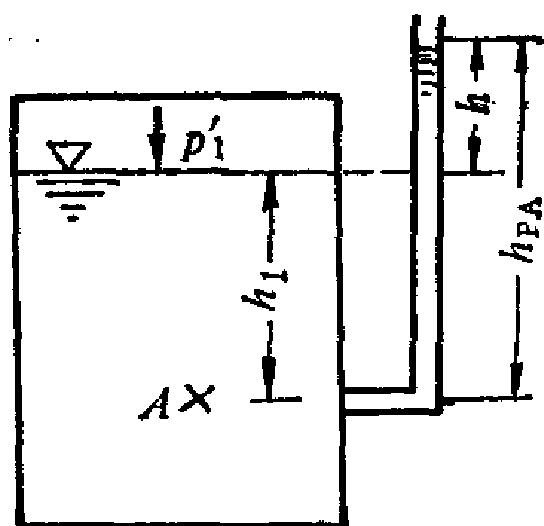
3-2　封闭容器中水面的绝对压强为$p_1' = 1.06$at，A点在水面下5 m，试求：

1）A点的相对压强（以N/m²计）；

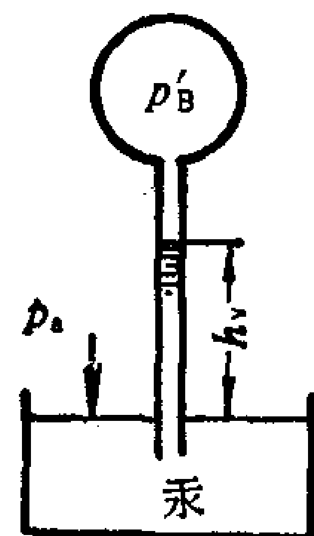
2）测压管中水面与容器中水面的高差。

3-3　容器中空气的绝对压强$p_B' = 0.95$at，试求玻璃管中水银柱上升高度h_v。

3-4　设已知测点A到水银测压计左边水银面的高差为$h_1 = 40$cm，左右水银面高差为$h_2 = 25$cm，试求A点的相对压强。



题 3-2图



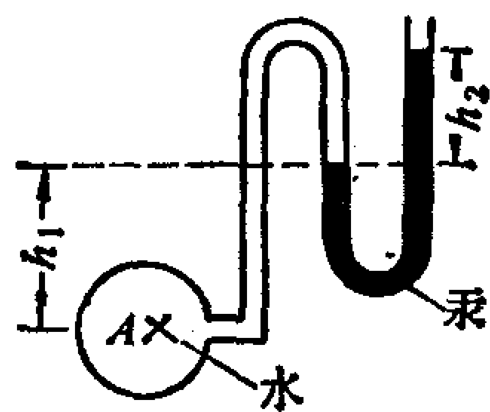
题 3-3图

3-5　已知水银压差计中的读数$\Delta h = 20.3$cm，油柱高$h = 1.22$m，油的重度$\gamma_{油} = 9.0$kN/m³，试求：

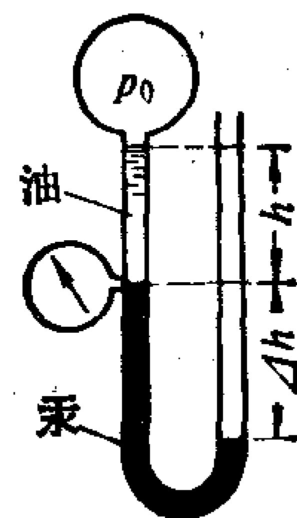
1）真空计中的读数p_v；

2）管中空气的相对压强p_0。

3-6　封闭水箱的测压管及箱中水面高程分别为∇1 = 100cm和∇4 = 80cm，水银压差计右端高程为∇2 = 20cm，问左端水银面高程∇3为多少？



题 3-4图

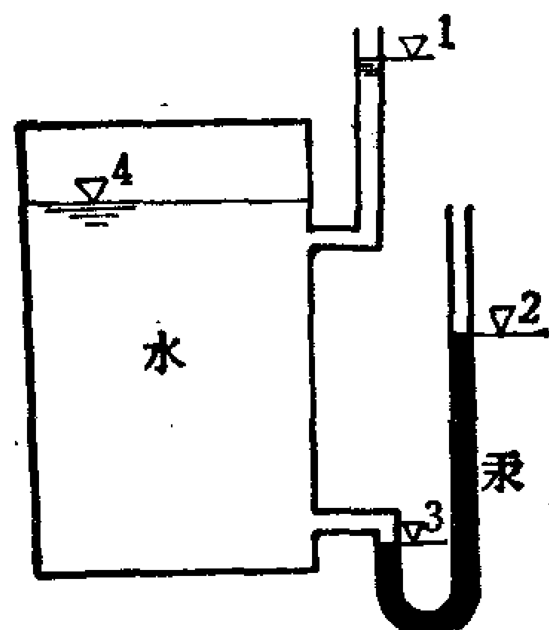


题 3-5图

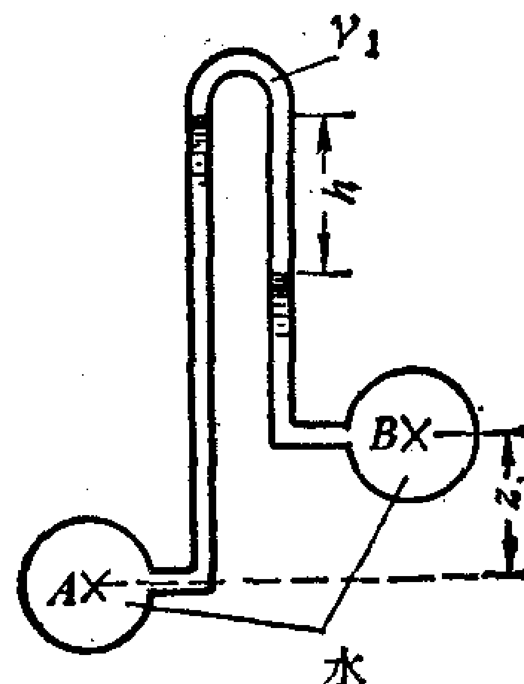
3-7　两高度差$z = 20$cm的水管，与一倒U形管压差计相连，压差计内的水面高差$h = 10$cm，试求下列两种情况A、B两点的压强差：

1）γ_1为空气；

2）γ_1为重度9kN/m³的油。



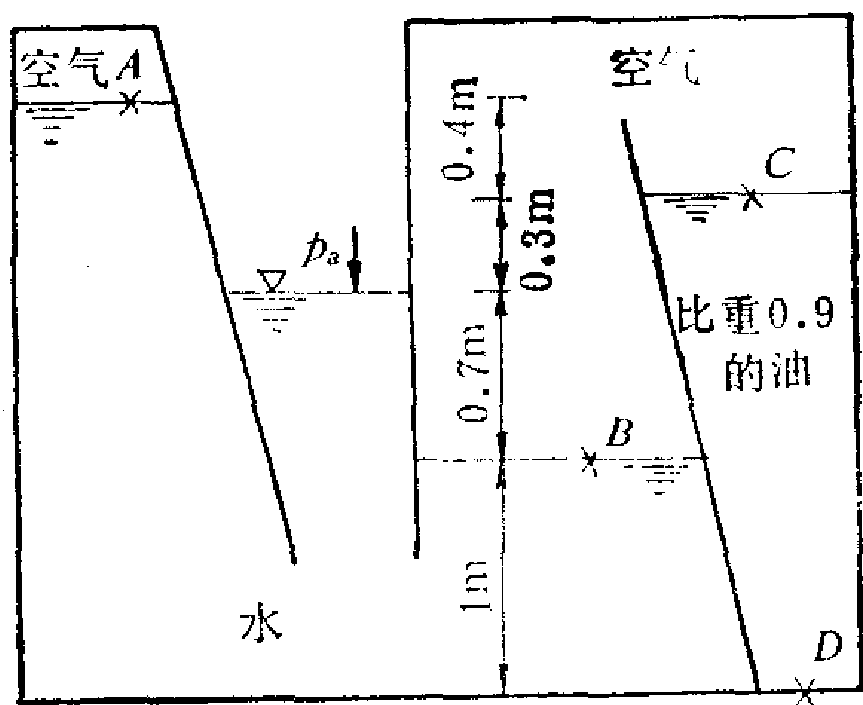
题 3-6图



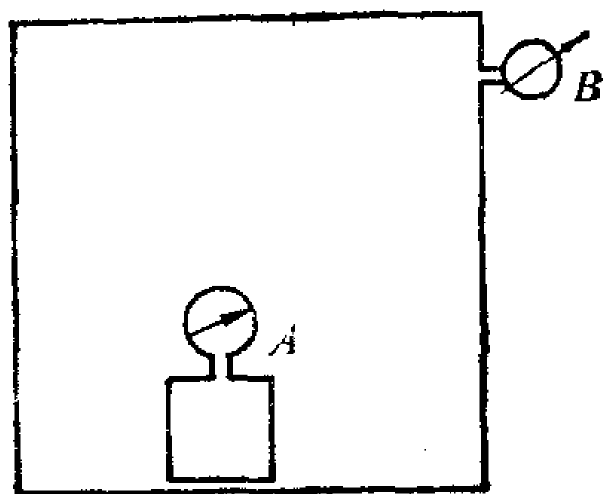
题 3-7图

3-8　有一半封闭容器，左边三格为水，右边一格为油（比重0.9）。试求A、B、C、D四点的相对压强（以N/m^2为单位）。

3-9　一小封闭容器放在大封闭容器中，后者充满压缩空气。测压表A、B的读值分别为$8.276kN/m^2$和$13.793kN/m^2$，已知当地大气压为762mmHg，试求小容器内的绝对压强（以kN/m^2及mmHg表示）。



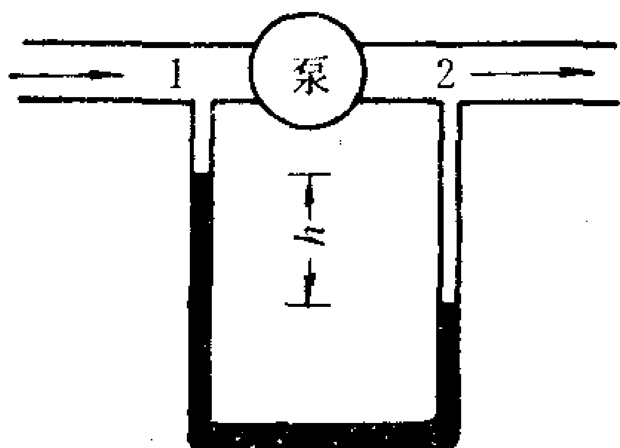
题 3-8图



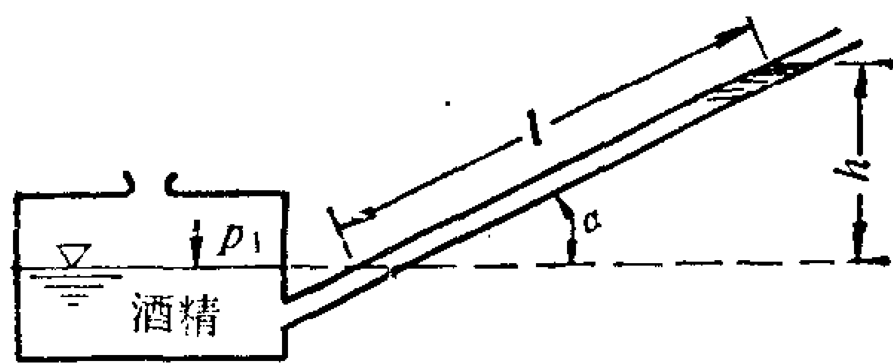
题 3-9图

3-10　水泵的吸入管与压出管的管径相同，今在其间连接一水银压差计，测得$h=720mm$，问水泵使水增压多少（用kN/m^2和mH_2O表示）？

3-11　倾斜式微压计中工作液体为酒精（$\rho=800kg/m^3$），已测得读数$l=50cm$，倾角$\alpha=30°$，求液面气体压强p_1。



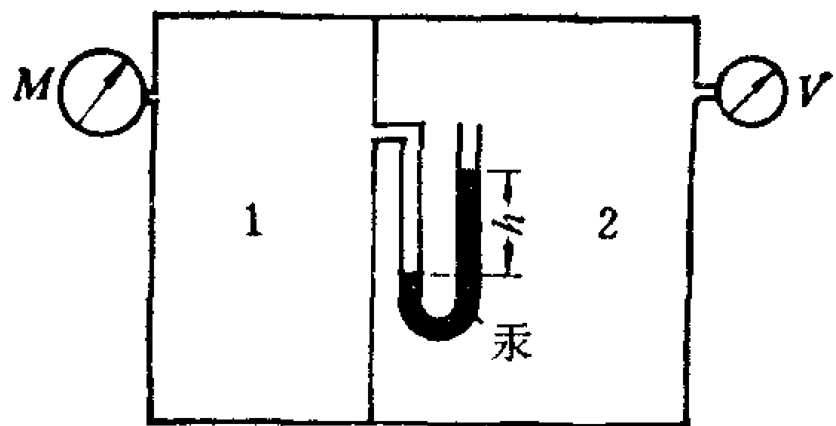
题 3-10图



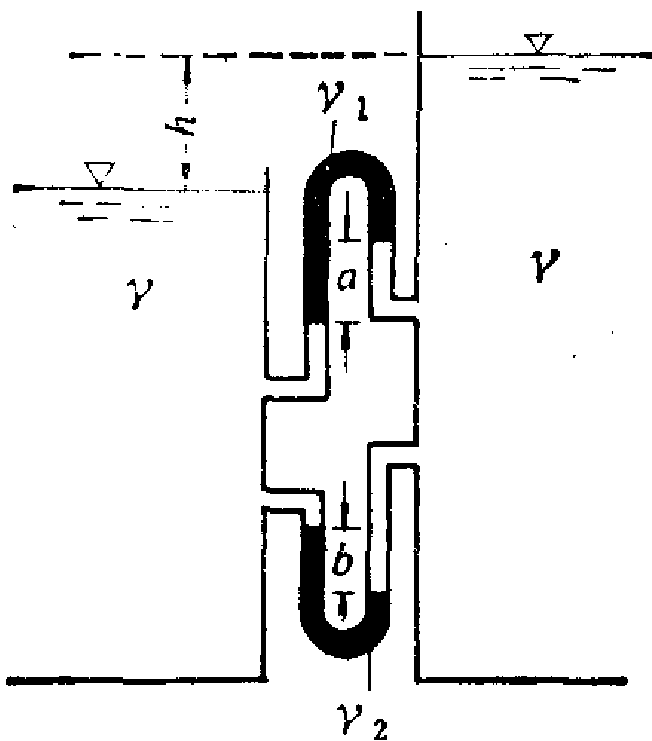
题 3-11图

3-12　两个充满空气的封闭容器互相隔开，左边压力表M的读数为100kPa，右边真空计V的读数为$3.5mH_2O$，试求连接两容器的水银压差计中h的读值。

3-13　有两个U形压差计连接在两水箱之间，读数h、a、b及重度γ已知，求γ_1及γ_2的表达式。



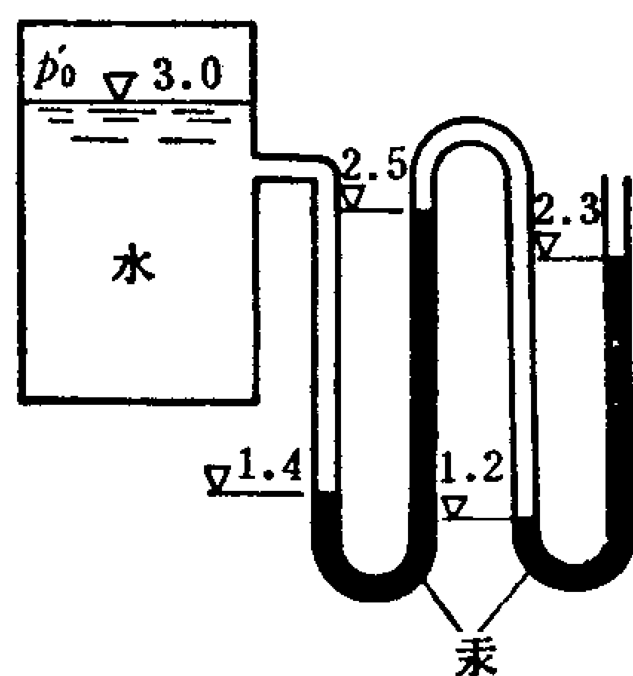
题 3-12图



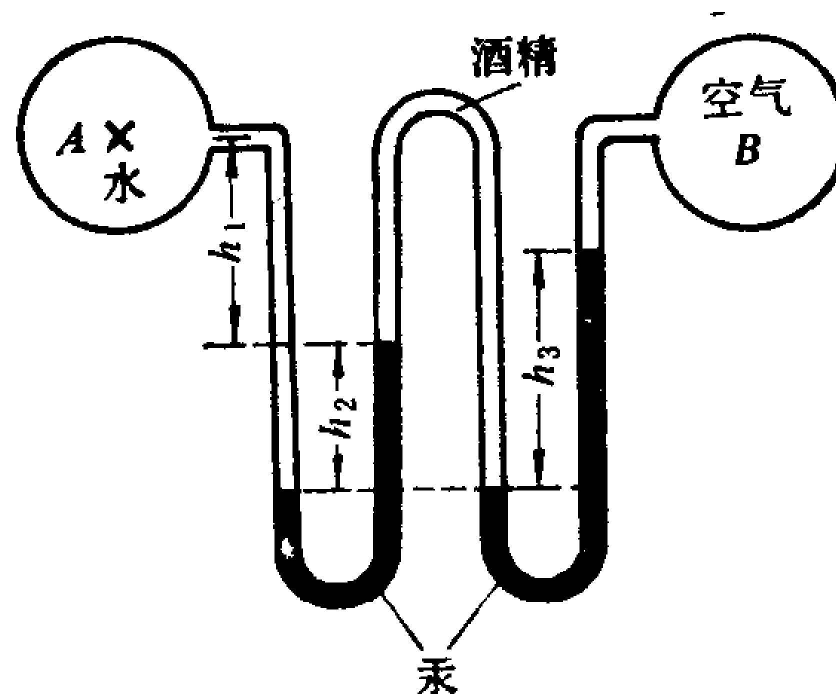
题 3-13图

3-14 多管水银测压计用来测水箱中的表面压强。图中高程的单位为m，试求水面的绝对压强p_0'。

3-15 U形水银压差计中，已知$h_1=0.3$m，$h_2=0.2$m，$h_3=0.25$m。A点的相对压强为$p_A=0.25$ at，酒精的比重为0.8，试求B点空气的相对压强（以mH_2O表示）。



题 3-14图

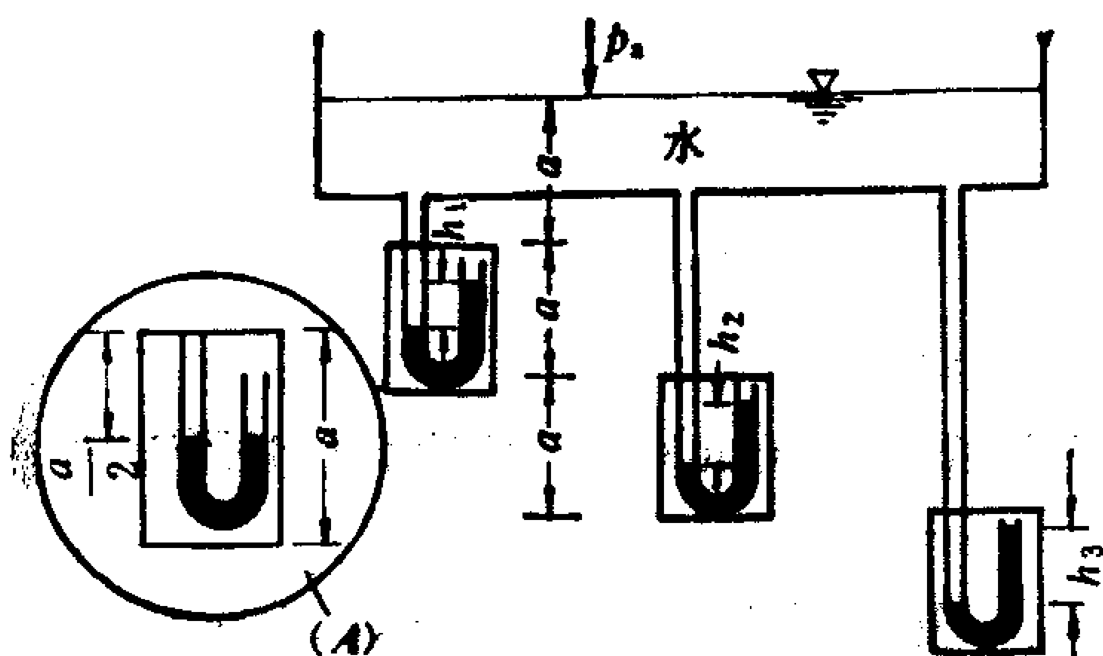


题 3-15图

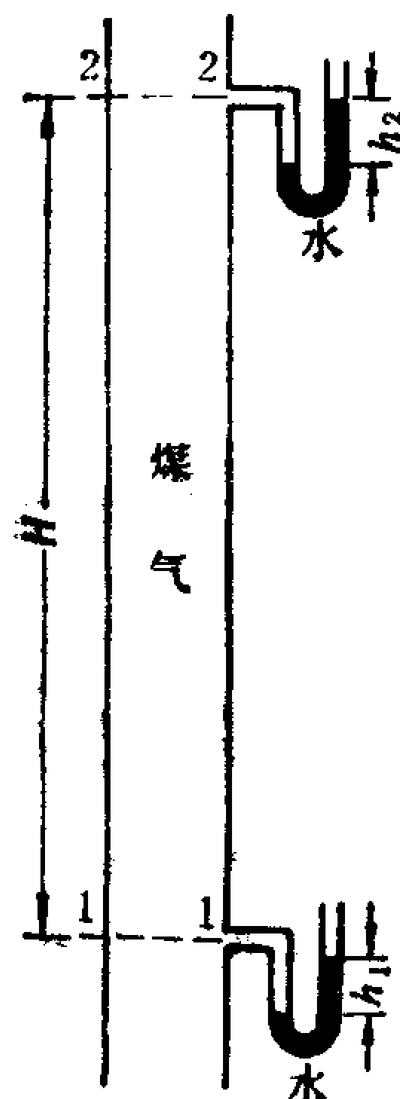
3-16 三个U形水银测压计，其初始水银面如图A所示。当它们装在同一水箱底部时，使其顶边依次低下的距离为$a=1$m，水银的比重为13.6，试问三个测压计中的读数h_1、h_2、h_3各为多少？

3-17 一直立煤气管，在底部的测压管中读数为$h_1=100mmH_2O$，在$H=20$m高处测得$h_2=115$ mmH_2O。管外空气的重度$\gamma_a=12.64N/m^3$，求管中静止煤气的重度。

提示：应计及管外空气压强也随高度而变。

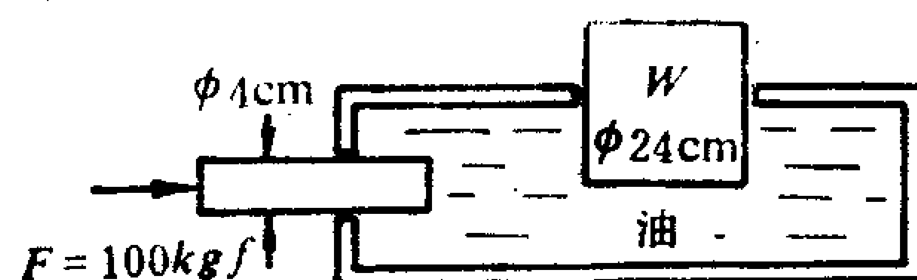


题 3-16图



题 3-17图

3-18 图示为一液压容器。设在活塞上施加100kgf的力，问可支持的重物W为多少（活塞与重物之间的高差很小，可不计）。



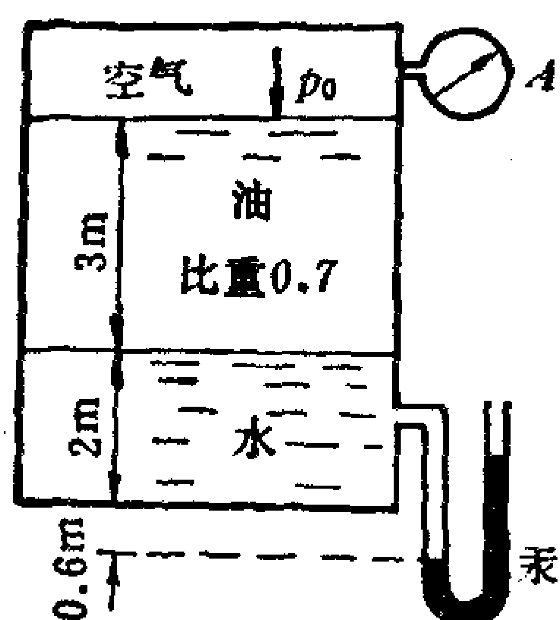
题 3-18图

3-19 图示封闭容器中有空气、油、水三种流体，压力表A该数为-0.15kgf/cm^2（$1\text{kgf}=9.8\text{N}$）。

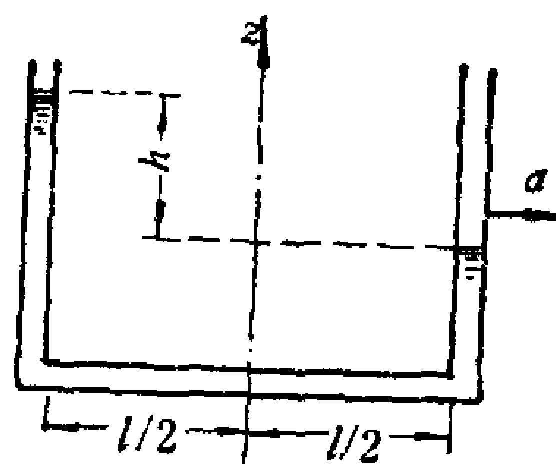
1）试绘出容器侧壁上的压强分布图；

2）求水银测压计中水银柱高度差h。

3-20 已知U形管水平段长$l=30\text{cm}$，当它沿水平方向作等加速运动时，$h=5\text{cm}$，试求它的加速度a。



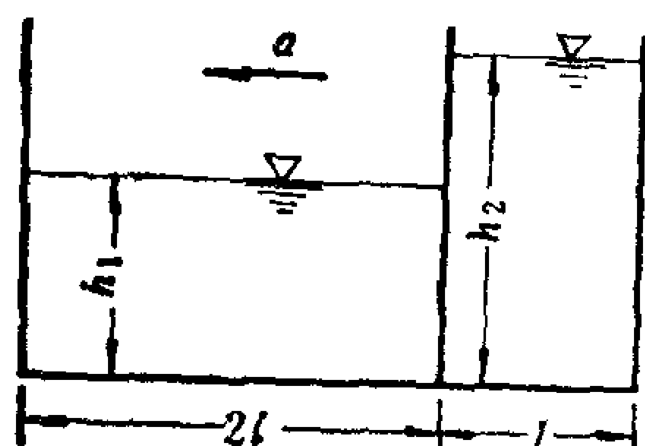
题 3-19图



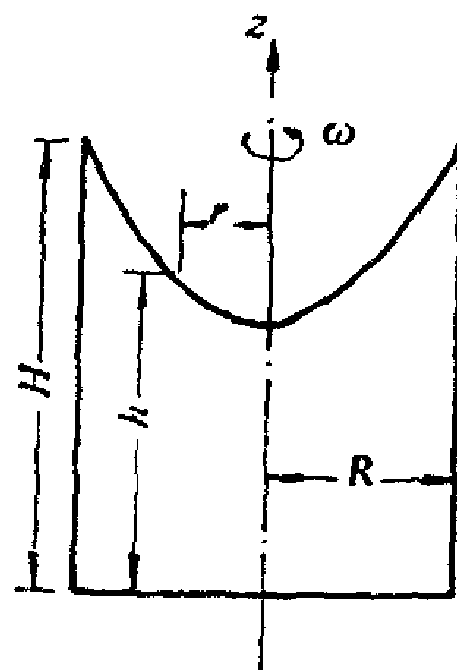
题 3-20图

3-21 图示容器中l、h_1、h_2为已知，当容器以等加速度a向左运动时，试求中间隔板不受力时a的表达式。若$l=1\text{m}$，$h_1=1\text{m}$，$h_2=2\text{m}$，a值应为多少？

3-22 圆柱形容器的半径$R=15\text{cm}$，高$H=50\text{cm}$，盛水深$h=30\text{cm}$。若容器以等角速度ω绕z轴旋转，试求ω最大为多少时才不致使水从容器中溢出？



题 3-21图



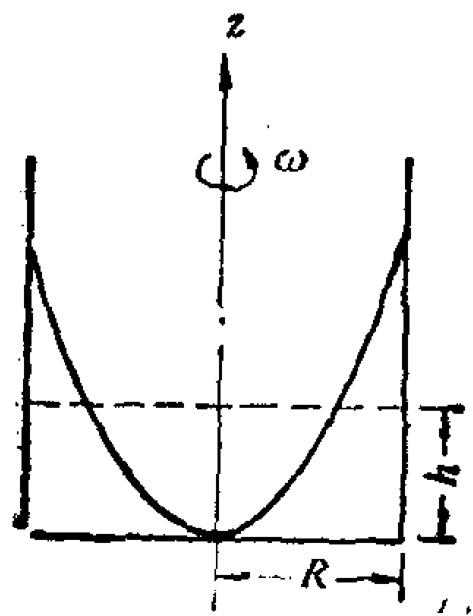
题 3-22图

3-23 图示为一圆柱形盛水容器，半径为R，原水深为h，今以角速度ω绕z轴旋转，试求容器底开始露出时的转速。

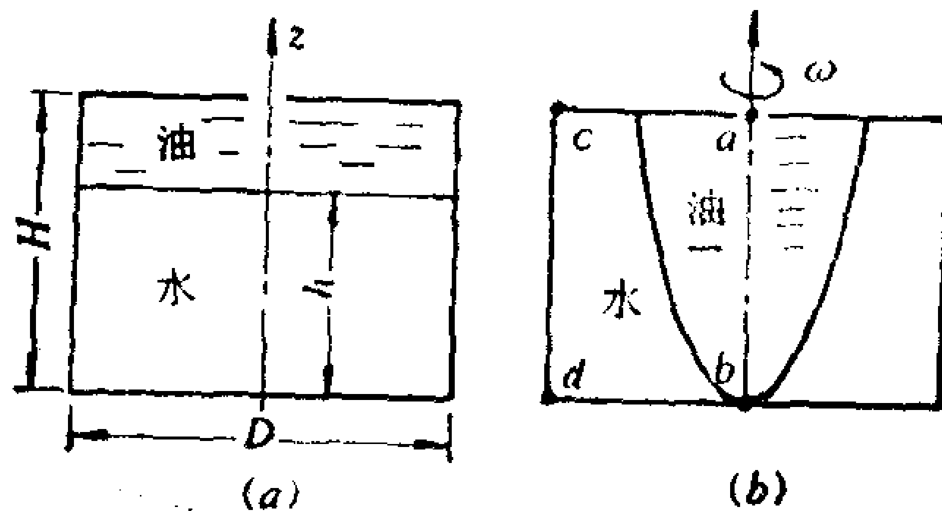
3-24 一封闭容器，直径$D=0.6\text{m}$，高$H=0.5\text{m}$，内装水深至$h=0.4\text{m}$，上部装比重$S=0.8$的油。封闭容器的上盖中心有一小孔，当容器绕z轴旋转时，使油水分界面下降至底部中心，试求：

1）这时的旋转角速度；

2）a、b、c、d各点的压强（用mH_2O表示）。



题 3-23图



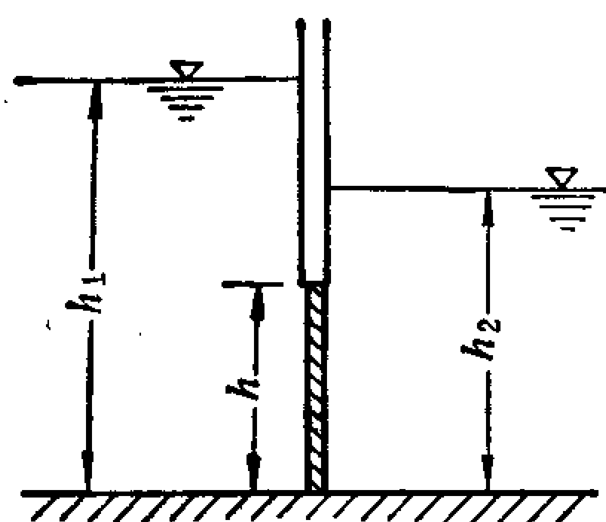
题 3-24图

3-25 已知矩形闸门高$h=3\text{m}$，宽$b=2\text{m}$，上游水深$h_1=6\text{m}$，下游水深$h_2=4.5\text{m}$，求：

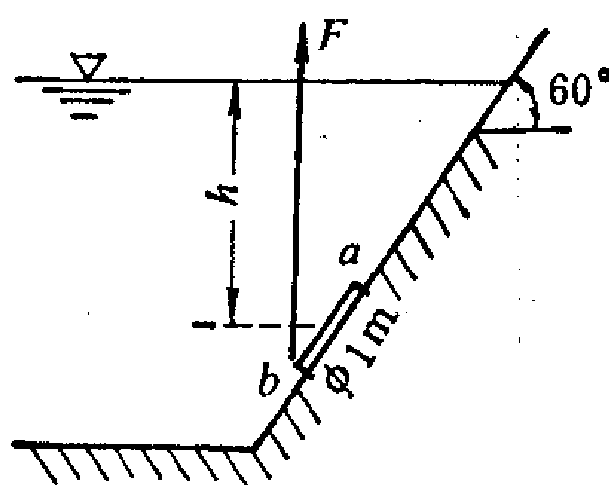
1）作用在闸门上的总静水压力；

2）压力中心的位置。

3-26 在倾角$\alpha=60°$的堤坡上有一圆形泄水孔，孔口装一直径$d=1\text{m}$的平板闸门，闸门中心位于水深$h=3\text{m}$处，闸门a端有一铰链，b端有一钢索可将闸门打开。若不计闸门及钢索的自重，求开启闸门所需的力F。



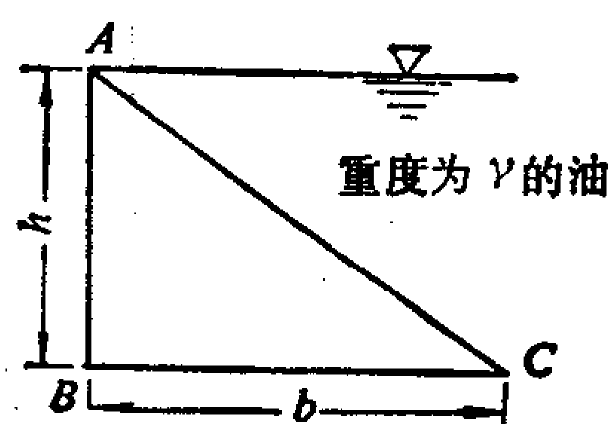
题 3-25图



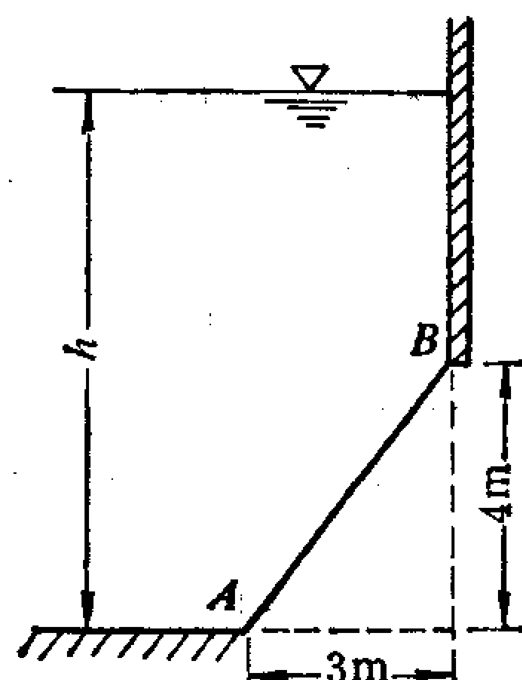
题 3-26图

3-27 有一三角形闸门，可绕AB轴旋转，油液的重度为γ，求液体对闸门的总压力及总压力对AB轴的力矩。

3-28 倾斜的矩形平板闸门，长为AB，宽$b=2\text{m}$，设水深$h=8\text{m}$，试求作用在闸门上的静水总压力及其对端点A的力矩。



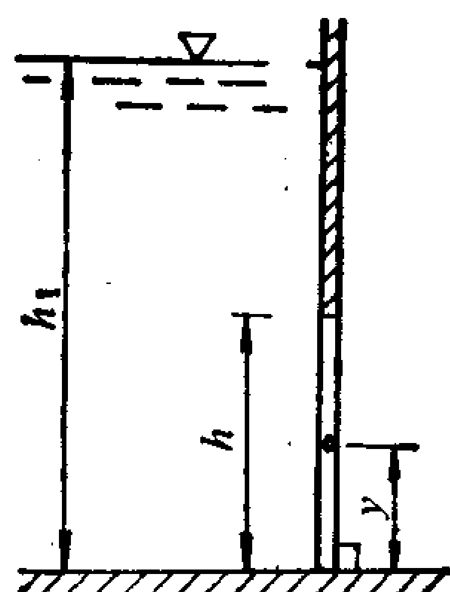
题 3-27图



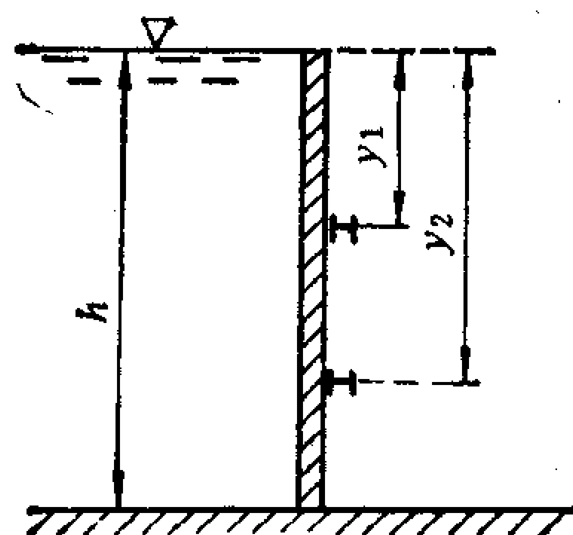
题 3-28图

3-29 矩形平板闸门，宽$b=0.8\text{m}$，高$h=1\text{m}$，若要求箱中水深h_1超过2m时闸门即可自动开启，铰链的位置y应设在何处？

3-30 金属的矩形平板闸门，宽1m，由两根工字钢横梁支撑。闸门高$h=3\text{m}$，容器中水面与闸门顶齐平，如要求两横梁所受的力相等，两工字钢的位置y_1和y_2应为多少？



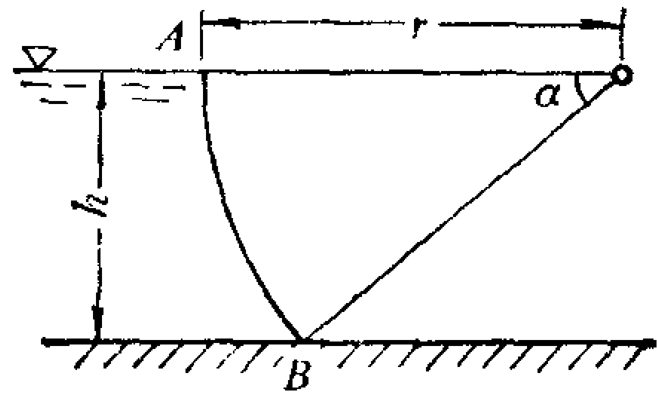
题 3-29图



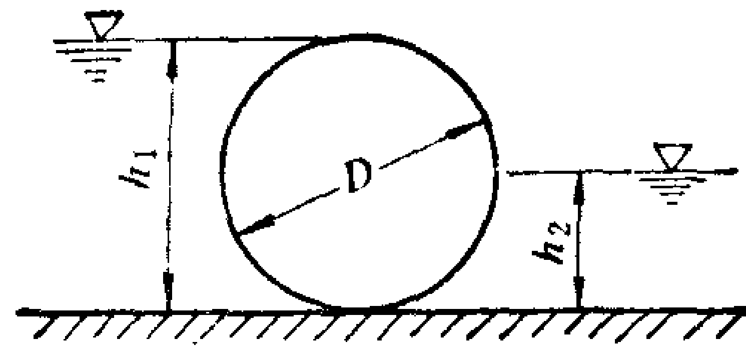
题 3-30图

3-31　一弧形闸门，宽2m，圆心角$\alpha=30°$，半径$r=3$m，闸门转轴与水平面齐平，求作用在闸门上的静水总压力的大小与方向（即合力与水平面的夹角）。

3-32　一圆柱形闸门，长$l=10$m，直径$D=4$ m，上游水深$h_1=4$ m，下游水深$h_2=2$ m，求作用在该闸门上的静水总压力的大小与方向。



题 3-31图



题 3-32图

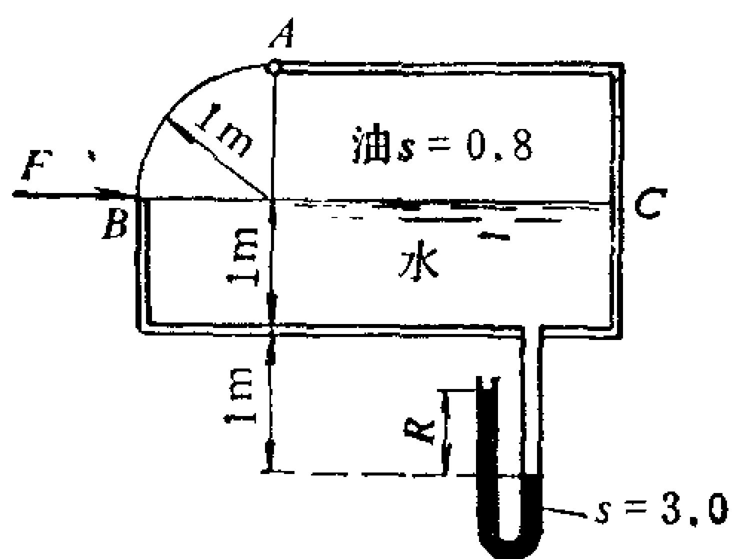
3-33　图示为一封闭容器，宽$b=2$ m，AB为一1/4圆弧闸门。容器内BC线以上为油，以下为水。U形测压计中液柱高差$R=1$m，闸门A处设一铰，求B点处力F为多少时才能把闸门关住。

3-34　用一圆柱形圆木挡住左边的油，油层浮在水面上，设圆木正处于平衡状态，试求：

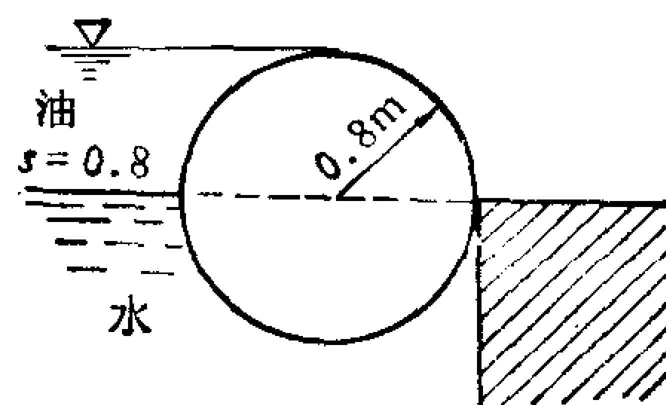
1）单位长圆木对岸的推力；

2）单位长圆木的重量；

3）圆木的比重。



题 3-33图



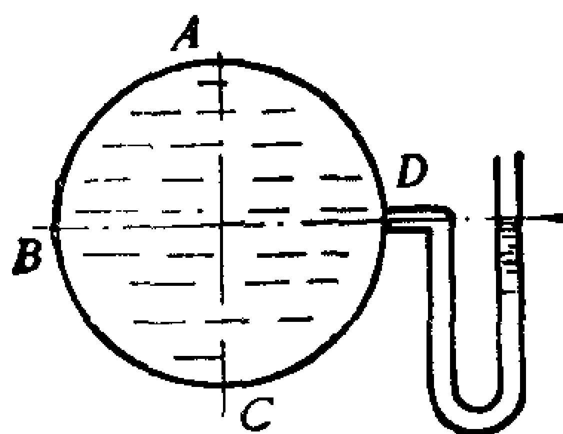
题 3-34图

3-35　封闭的圆柱形容器，内装满重度为γ的液体，测压管如图所示，试求：

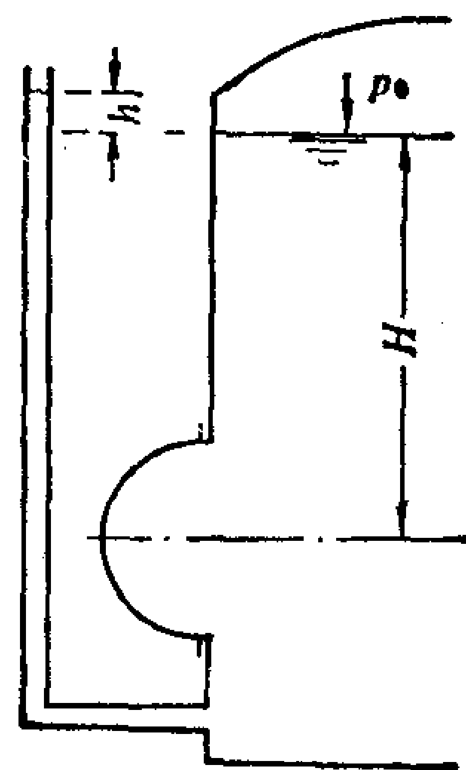
1）作用在单位长AB面上的水平分力及作用线；

2）作用在单位长AB面上的铅垂分力及作用线。

3-36　油库侧壁有半球形盖，直径为$d=0.6$m，半球中心在液面下的淹没深度$H=2.0$m，测压管中液面高出油库中液面的高度$h=0.6$m，石油重度为6867N/m³，试求液体作用在半球盖上的水平分力及铅垂分力。



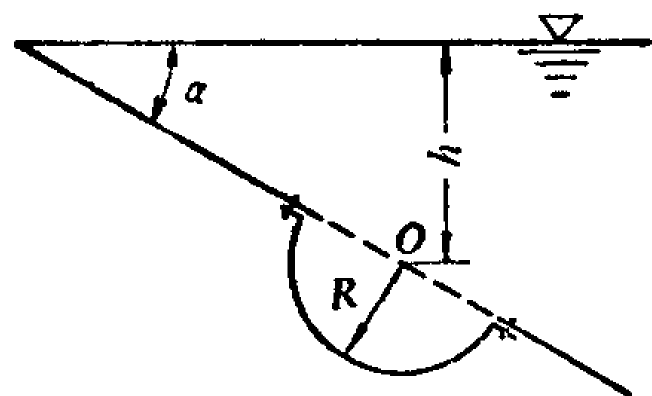
题 3-35图



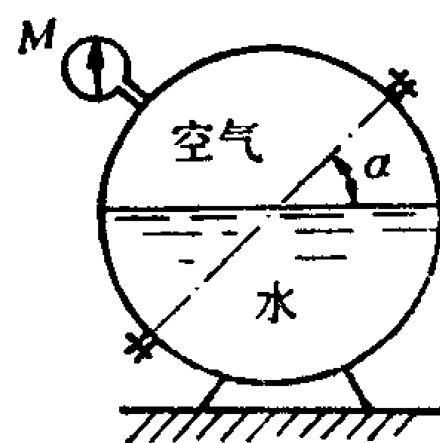
题 3-36图

3-37　石油库的倾斜侧壁上有一半径$R=0.5$m的半球形孔盖。孔盖中心O点淹没在液面下的深度$h=1$m，侧壁与水平面之间的夹角$\alpha=30°$，石油的重度$\gamma_0=9000\text{N/m}^3$。如不计孔盖的重量，求孔盖全部螺栓所受的拉力和切力。

3-38　由两个半球组成的封闭球形容器，放在一个混凝土基座上，下半个球充满水，上半部为空气，与它连通的压力表读数$M=2$at，连接平面与水平面成$\alpha=45°$角，球的半径$R=0.8$m，半个容器的重量为3000N，求连接螺栓上所受的拉力和切力。



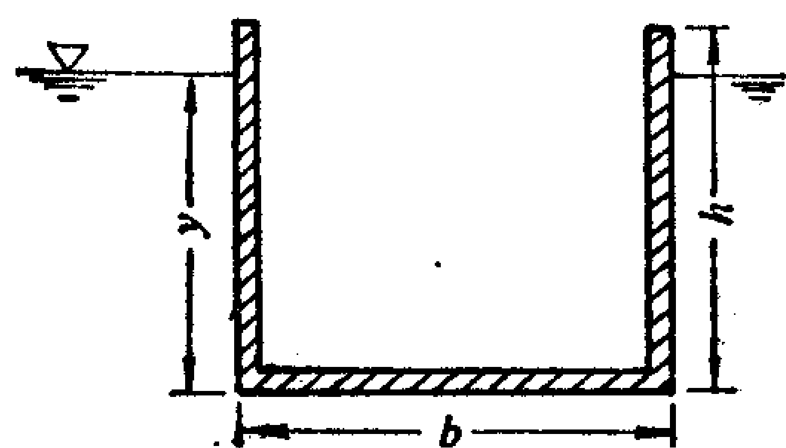
题 3-37图



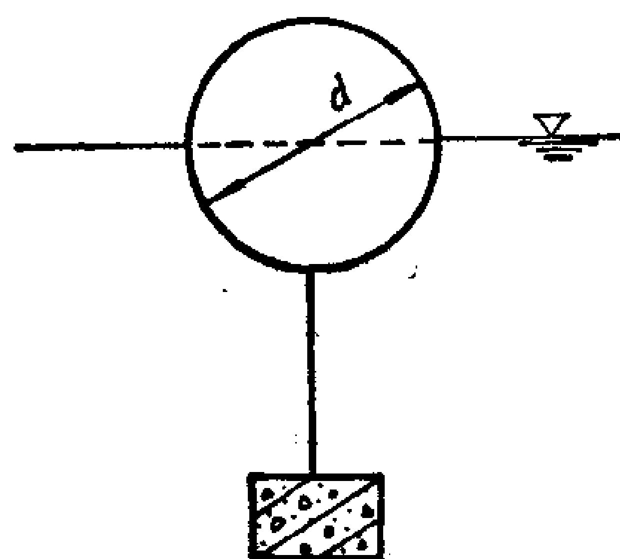
题 3-38图

3-39　已知矩形沉箱长15m，宽$b=6$m，高$h=7$m，重量$G=750$kN，放入水中后沉箱的淹没淹度y应为多少？如果水深为6m，需加重多少沉箱才能沉到水底？

3-40　一直径$d=1$m的球，一半淹没在比重为1.025的海水中。为了使它完全淹没，在球下系一密度$\rho=2400\text{kg/m}^3$的混凝土块。试求这混凝土块的重量。

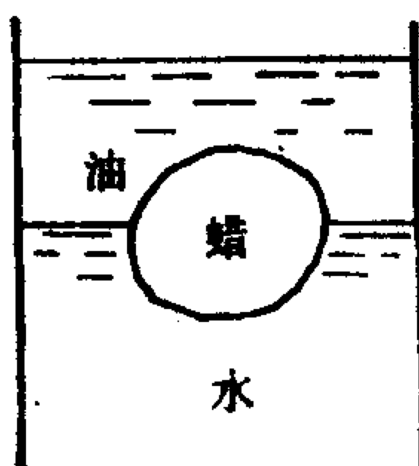


题 3-39图



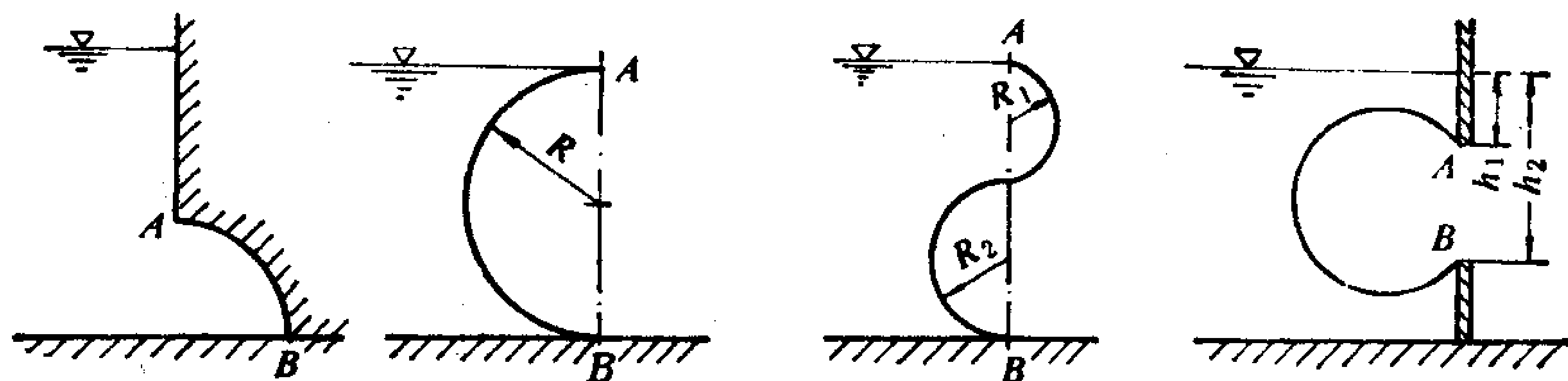
题 3-40图

3-41　一块蜡沉没在有水和油的容器中，蜡的重度为9500N/m^3，油的重度为8800N/m^3，试问蜡块在水和油中的体积各占多少百分比？



题 3-41图

3-42　试绘出液体作用于下列各AB曲面上的水平压强分布图及压力体。



题 3-42图

第四章　流体运动的基本概念和有限体分析

从本章开始我们将研究流体运动的规律，以及这些规律在工程中的实际应用。流体力学的这一部分称为流体动力学。第四章主要介绍流体运动的基本概念、描述方法及其主要分类，并建立表达有限体积流体运动规律的基本方程。

前面提到，流体的运动一方面决定于流体的物理性质，另一方面还决定于流动所在的外界条件。流体的物理性质中保持原有运动状态的惯性和改变原有运动状态的其它各种物理属性之间的相互作用是规定流体以怎样方式运动的内因，而流体与周围物体之间的作用，则是决定流体运动的外因。内因和外因都是决定流体运动的必要因素。没有外因，内因就不能显示出来；没有内因，外因也不能发生作用。例如没有固体壁面的存在，流体的粘滞性就不能显示出来；反之，如流体没有粘滞性，则它虽然沿着固体壁面流动，也不会产生阻力。这里，固体壁面是外因，是产生阻力的条件，而流体的粘滞性是内因，是产生阻力的根据，外因通过内因才能起作用。不仅粘滞性是这样，其它物理性质也莫不如此。

自然界中的每个具体流动既然决定于流体的物理性质和流动所在的外界条件，那么，当流体的物理性质和流动的外界条件给定时，流动就唯一肯定了。因此流体力学的基本问题可归结为已知流体的物理性质和流动所在的外界条件，求流体的流动参数。对不可压缩流体来说，主要是求速度分布和压强分布；对于可压缩流体，则还包括密度和温度分布。

§ 4-1　描述流体运动的两种方法

流体和刚体不同，它是一种具有易流动性的连续介质，组成整个流体的各个质点一般来说随时随地都在变化着，而且始终保持着连续性。那么，怎样用数学的方法来描述整个流体的运动呢？这是从理论上研究流体运动规律首先要解决的问题。

流体力学中有两种描述流体运动的方法：拉格朗日（J.L.Lagrange）法和欧拉法。下面分别介绍。

一、拉格朗日法

这种方法是将整个流体的运动作为各个质点运动的总和来考虑。首先着眼于描述单个质点在运动时位置、速度、压强及其它流动参数随时间的变化，然后把全部质点的运动情况汇总起来，就得到整个流体的运动。拉格朗日法实质上是利用质点系力学来研究连续介质的运动。

既然拉格朗日法首先描述单个质点沿其轨迹的运动，而流体是由无数质点组成的。这就必须设法表明所描述的是哪个质点的运动。为此，以所指定的质点在起始时刻$t=t_0$时的坐标a、b、c做为该质点的标志。不同质点在t_0时必然占有不同的、各自的位置，因此把a、b、c作为变数就能代表所有的流体质点。同时，每个流体质点在运动过程中的空间位置都是随着时间t在不断变化。所以在迪卡尔坐标系中流体质点的轨迹方程可表示为

$$
\left.\begin{aligned}
x &= x(a,\ b,\ c,\ t) \\
y &= y(a,\ b,\ c,\ t) \\
z &= z(a,\ b,\ c,\ t)
\end{aligned}\right\} \tag{4-1}
$$

式中 a、b、c 和 t 称为拉格朗日变数。

将（4-1）式对时间求偏导数，即得某个流体质点的速度。采用偏导数是因为速度必定是对某质点说的，因而在求导数过程中 a、b、c 应视为定值。

$$
\left.\begin{aligned}
u_x &= \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t} \\
u_y &= \frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t} \\
u_z &= \frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \tag{4-2}
$$

同理可得加速度分量为

$$
\left.\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(a,b,c,t)}{\partial t^2} \\
a_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(a,b,c,t)}{\partial t^2} \\
a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(a,b,c,t)}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\} \tag{4-3}
$$

二、欧拉法

这种方法是以流体运动的空间作为观察的对象，描述某一时刻位于各空间点上的流体质点的速度、压强及其它流动参数的分布，然后把各个时刻的流体运动情况汇总起来，从而得到整个流体的运动。

在所研究的运动空间里，设置一个迪卡尔坐标系，流体质点将连续不断地流过此坐标系的每一个空间点。设在 t_1 时刻我们观察各空间点上流体质点的运动情况（速度、压强及其它流动参数），并把它们汇总起来，就得到该时刻各种流动参数的流场（速度场、压强场等）。由于流体是一种连续介质，因此可以认为各流动参数在空间的分布是连续的，即可以把各流动参数看成是空间坐标的连续函数。如在另一时刻 t_2 进行同样的观察，又可以得到另一组流场。一般说来它和前一个是不一样的。由此可见，位于各空间点上的流体质点的运动参数是随空间点的位置和时间的不同而改变的。因此欧拉法中流体的运动情况一般可描述如下：

$$
\left.\begin{aligned}
\vec{u} &= \vec{u}(x,y,z,t) \\
p &= p(x,y,z,t) \\
\rho &= \rho(x,y,z,t) \\
T &= T(x,y,z,t)
\end{aligned}\right\} \tag{4-4}
$$

式中 x、y、z、t 称为欧拉变数。

按照欧拉法的观点，流体力学的问题从数学上看就是研究一些有时间 t 的矢量场（速度场）和标量场（压强场、密度场、温度场）。

拉格朗日法虽然物理概念简单明确，能直接求出各质点的运动轨迹及其流动参数在运动过程中的变化。但在数学上常常会遇到更大的困难。另一方面，大多数工程问题并不需

要详细了解每个质点的运动情况，例如工程中的管流问题，一般只要知道流动横截面上的流速分布，流量及压强的沿程变化就够了。因此流体力学中广泛采用欧拉法，只有少数问题采用拉格朗日法。本课程中的所有问题都是用欧拉法讨论的。

§ 4-2 质 点 导 数

在拉格朗日法中，任一流体质点（a，b，c）的速度对时间的变化率$\frac{\partial \vec{u}(a,b,c,t)}{\partial t}$就是这个质点的加速度$\vec{a}(a,b,c,t)$。但在欧拉法中，速度对时间的偏导数$\frac{\partial \vec{u}(x,y,z,t)}{\partial t}$只表示在固定的空间点（$x$，$y$，$z$）上流体的速度对时间的变化率，而不是$t$时刻位于该空间点上的流体质点的速度对时间的变化率。那么怎样在欧拉法中表示流体质点的加速度呢？

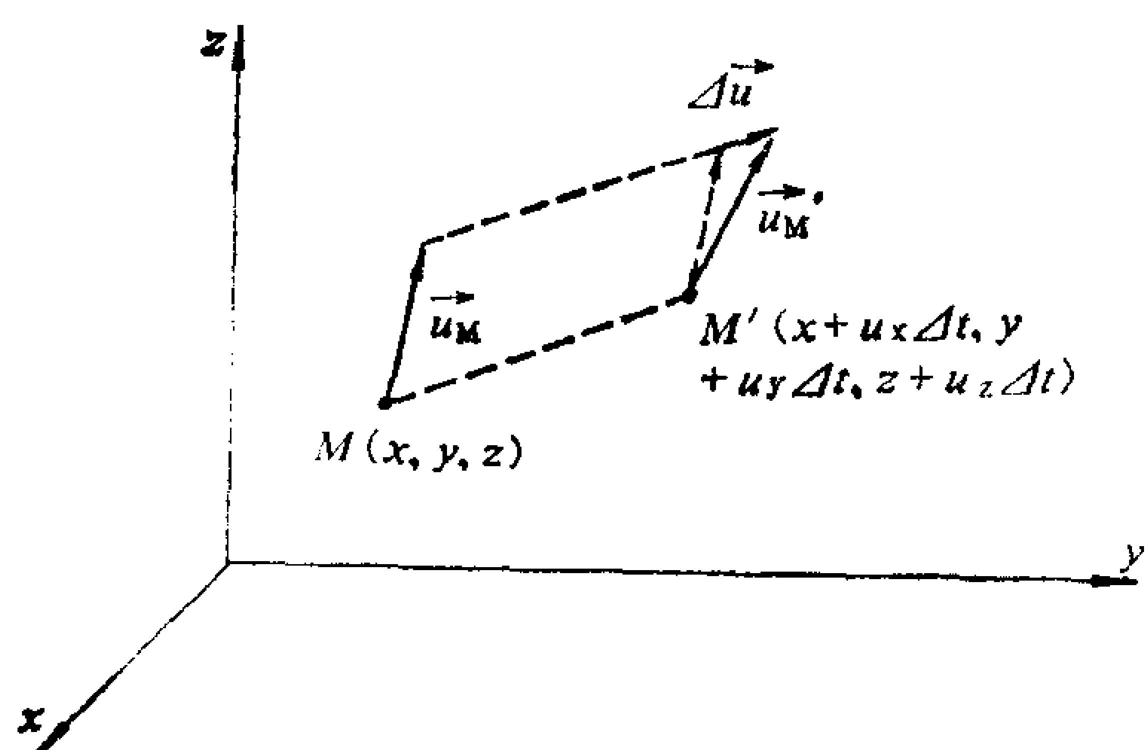


图 4-1　质点运动

如图4-1所示，设速度场为$\vec{u}=\vec{u}\times(x,y,z,t)$，$t$时刻位于空间点$M(x,y,z)$上的流体质点的速度为$\vec{u}_M=\vec{u}(x,y,z,t)$，经过$\Delta t$后，该质点移动了一段距离$\vec{u}\Delta t$至$M'(x+u_x\Delta t,\ y+u_y\Delta t,\ z+u_z\times\Delta t)$点。根据已知的速度场，这个质点在$M'$点的速度为

$$\vec{u}_M'=\vec{u}(x+u_x\Delta t,y+u_y\Delta t,z+u_z\Delta t,t+\Delta t)$$

也就是经过Δt时间后的速度增量为

$$\Delta\vec{u}=\vec{u}_M'-\vec{u}_M=\vec{u}(x+u_x\Delta t,y+u_y\Delta t,z+u_z\Delta t,t+\Delta t)-\vec{u}(x,y,z,t)$$

用泰劳级数展开$\vec{u}_M'$，忽略高价无穷小量，得

$$\Delta\vec{u}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}u_x\Delta t+\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}u_y\Delta t+\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}u_z\Delta t+\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\Delta t$$

因此该质点的速度$\vec{u}$对时间的变化率（就是加速度）为

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{u}}{\Delta t}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+u_x\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}+u_y\frac{\partial\vec{u}}{\partial y}+u_z\frac{\partial\vec{u}}{\partial z}\qquad(4\text{-}5)$$

流体质点的物理量对时间的变化率称为该物理量的质点导数。在欧拉法中通常用$\frac{D}{Dt}$表示质点导数，$\frac{D\vec{u}}{Dt}$就是速度的质点导数，（4-5）式也可写成

$$\vec{a}=\frac{D\vec{u}}{Dt}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}\qquad(4\text{-}5')$$

如将$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$和$\vec{u}=u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}$代入（4-5）或(4-5′)式中，$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$分别为$x$、$y$、$z$方向的单位矢量，则可得加速度$\vec{a}$在$x$、$y$、$z$方向的分量

$$
\left.\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} \\
a_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} \\
a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}6)
$$

对于流场中的其它物理量也可以用类似的方法来表示它们的质点导数。例如压强和密度的质点导数分别为

$$\frac{Dp}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)p \qquad (4\text{-}7)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\rho \qquad (4\text{-}8)$$

由（4-5′）式可知，欧拉法中流体质点的加速度由两部分组成。其中$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$称为当地（或时变）加速度，它是由于速度场随时间变化而引起的速度变化率；$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$称为迁移（或位变）加速度，它是由于速度随空间位置变化而引起的速度变化率。

现举例说明这两个加速度的区别(见图4-2)。如在水箱上装一根由两段管子组成管道，前一段的断面是逐渐缩小的，后一段是等直径的。当管道的尺寸和材料一定后，管内各点的流速取决于水箱内的水面高出管道口出的高度H。今若水箱内的水位保持不变，我们观察管道内位于A、B两点的流速，它们都不会随时间而变。这时管道内流动的各流体质点都没有当地加速度。但它们是否没有加速度呢？拿通过A的质点来看，在它前进过程中，由于断面在收缩，流速必然逐渐增大，所以它是有加速度的，这个加速度就是迁移加速度。位于B处的质点，由于断面沿程不变，所以没有迁移加速度。

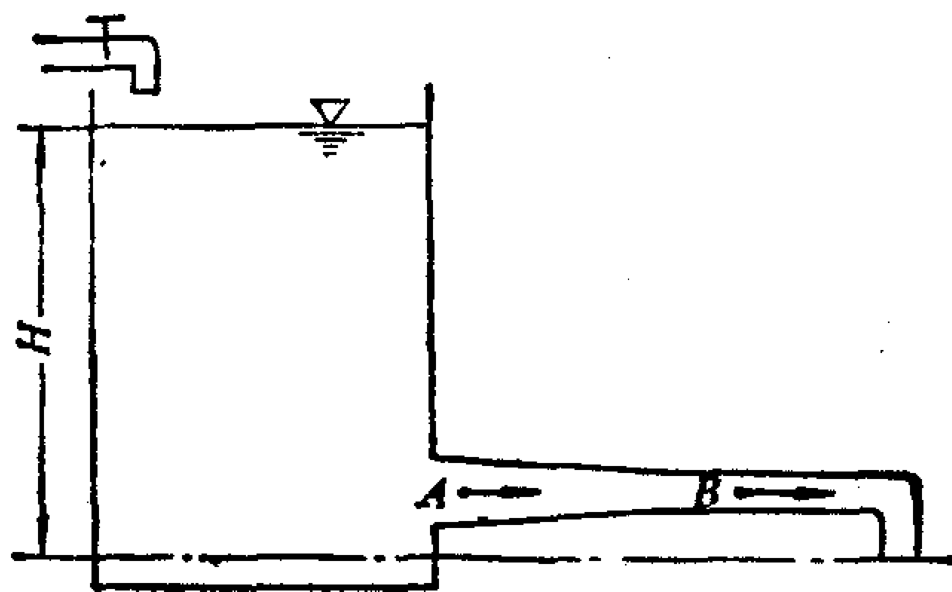


图 4-2　当地加速度和迁移加速度

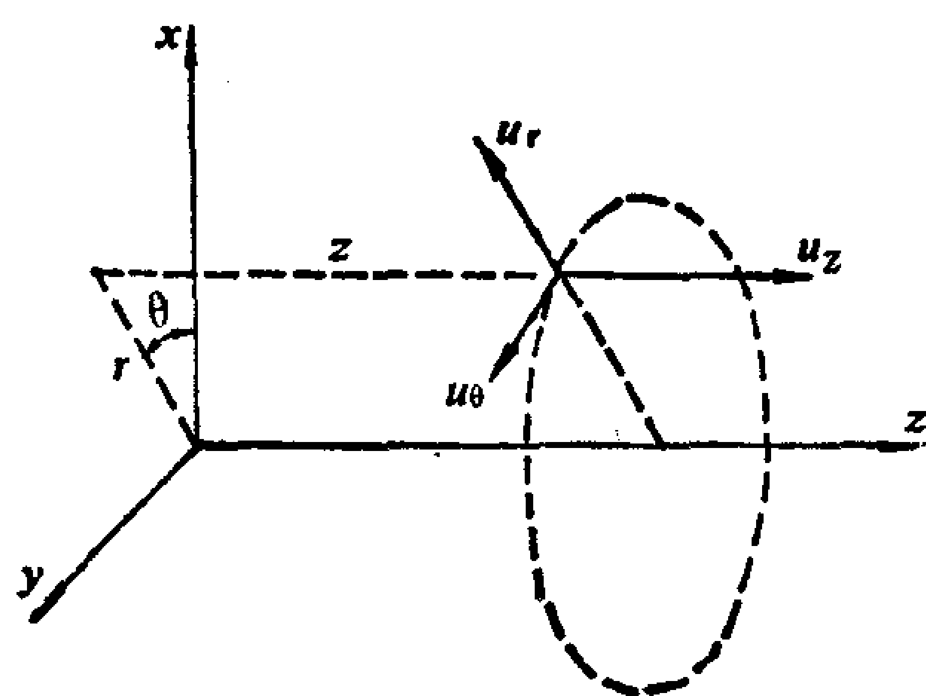


图 4-3　柱坐标系

如水箱内没有水补充，水箱水位随着水体的不断流出而逐渐降低，这时管道中任一空间点上的流速就会随着时间减小。于是前一段管内的流体既有迁移加速度，又有当地加速度，后一段管内的流体仅有当地加速度，仍无迁移加速度。

如采用图4-3所示的柱坐标系（r，θ，z），则加速度$\vec{a}$及其分量的表达式为

$$\vec{a} = a_r\vec{e}_r + a_\theta\vec{e}_\theta + a_z\vec{e}_z \qquad (4\text{-}9)$$

式中$\vec{e}_r$、$\vec{e}_\theta$、$\vec{e}_z$分别为三个坐标轴方向的单位矢量。

$$
\left.\begin{aligned}
a_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \\
a_\theta &= \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{u_r u_\theta}{r} \\
a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial_r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}10)
$$

【例 4-1】 已知速度场为

$$u_x = 2t + 2x + 2y \quad \text{m/s}$$
$$u_y = t - y + z \quad \text{m/s}$$
$$u_z = t + x - z \quad \text{m/s}$$

试求$t = 3$s时位于（0.6，0.6，0.3）m处流体质点的加速度。

【解】 （4-6）式中的各项偏导数分别为

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = 2 \qquad \frac{\partial u_y}{\partial t} = 1 \qquad \frac{\partial u_z}{\partial t} = 1$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 2 \qquad \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2 \qquad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial u_y}{\partial y} = -1 \qquad \frac{\partial u_y}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial u_z}{\partial z} = -1$$

将$x = 0.6$，$y = 0.6$，$z = 0.3$，$t = 3$代入流速方程，得

$$u_x = 2 \times 3 + 2 \times 0.6 + 2 \times 0.6 = 8.4\text{m/s}$$
$$u_y = 3 - 0.6 + 0.3 = 2.7\text{m/s}$$
$$u_z = 3 + 0.6 - 0.3 = 3.3\text{m/s}$$

由（4-6）式即得加速度在三个坐标轴方向的分量

$$a_x = 2 + 8.4 \times 2 + 2.7 \times 2 + 3.3 \times 0 = 24.2\text{m/s}^2$$
$$a_y = 1 + 8.4 \times 0 + 2.7 \times (-1) + 3.3 \times 1 = 1.6\text{m/s}^2$$
$$a_z = 1 + 8.4 \times 1 + 2.7 \times 0 + 3.3 \times (-1) = 6.1\text{m/s}^2$$

§ 4-3 用欧拉法描述流体运动的基本概念

一、流线

用欧拉法描述流体运动时，直接得到的是流动的速度场，它给出某瞬时各空间点上流体质点的速度矢量。为了把各点的运动情况联系起来，清晰地描绘出整个空间的流动趋向和变化，特提出流线的概念。

流线是在某一瞬时速度场中所作的一条曲线，位于这条曲线上的每个质点在该瞬时的速度矢量都与此线在该点相切。当速度场已知，流线可用下面的方法绘出。设某瞬时t_1位于空间1点的流体质点速度为$\vec{u}_1$，则由1点作矢量$\vec{u}_1$；在此矢量上距1点微小距离Δs的2处，作该处质点的流速矢量$\vec{u}_2$；再在$\vec{u}_2$上距2点Δs处取3点，作流速矢量$\vec{u}_3$，如此类推，得到一条折线1 2 3 4……（如图4-4所示）。如令各点间的距离Δs趋近于零，即得到一条自1点开始的光滑曲线，这条曲线就是t_1瞬时通过1点的一条流线。如在t_1瞬时的

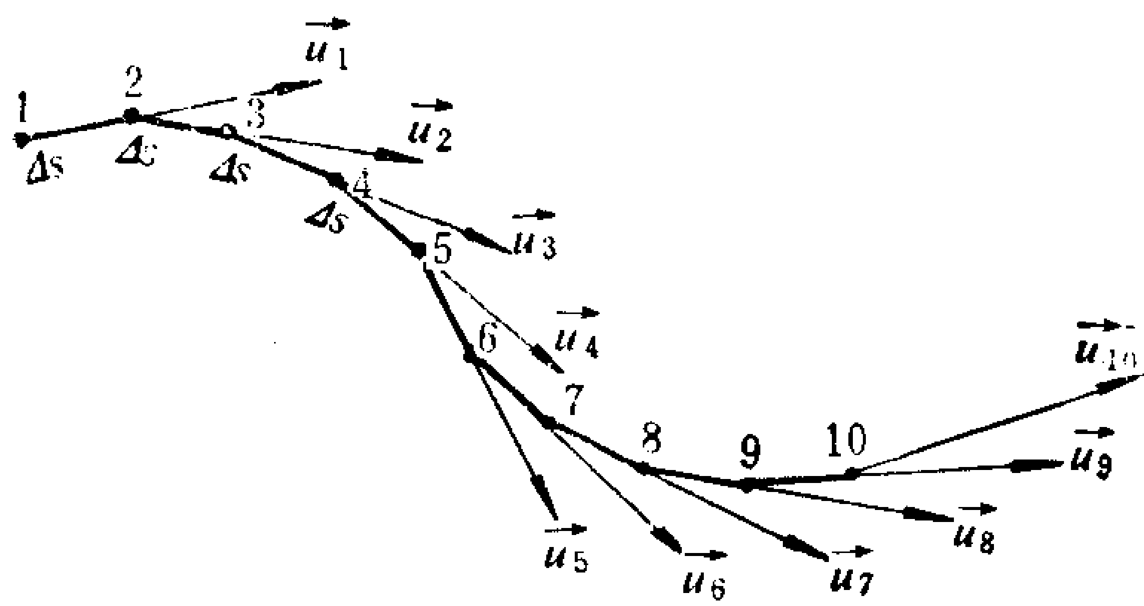


图 4-4 流线

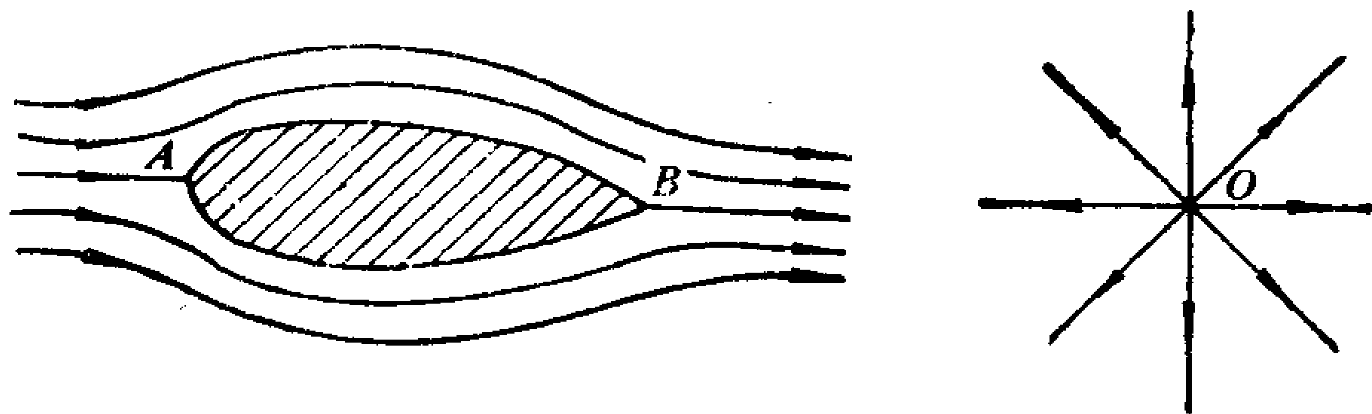


图 4-5 流线不能相交的例外

流场作一系列流线，这些流线就能形象地描绘出该瞬时流场的流动情况。

流体质点的运动轨迹称为迹线。必须指出，流线和迹线是两个完全不同的概念。流线给出位于流线上的各个质点在该瞬时的流动方向，而迹线则是某个质点在一段时间内的运动路线。

流线有一个重要的性质，就是流线不能相交。如果流线相交，这意味着位于交点处的质点有两个不同的流动方向，这当然是不可能的。但有三种情况例外：1）速度为零的点，如图4-5中的A点，通常称为驻点；2）速度为无限大的点，如该图中的O点，通常称为奇点；3）流线相切的点，如图中的B点，上下两股速度不等的流体，其流线在该点相切。流线也不能是折线，只能是光滑曲线。

在流线上任一点处取微元有向线段$\vec{dl}$，它在各坐标轴方向的分量为dx、dy、dz。根据流线定义，过该点的速度矢量$\vec{u}$与$\vec{dl}$方向一致，故

$$\vec{u}\times\vec{dl}=0 \tag{4-11}$$

这就是用矢量表示的流线微分方程。在迪卡尔坐标系中，流线微分方程为

$$\frac{dx}{u_x}=\frac{dy}{u_y}=\frac{dz}{u_z} \tag{4-12}$$

由于流线是对某一瞬时说的，不同瞬时有不同的流线。因此在积分流线微分方程时，t应看成是常数，即上式中t为参变量，x、y、z为自变量。

迹线的微分方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=u_x(x,\ y,\ z,\ t)\\ \frac{dy}{dt}&=u_y(x,\ y,\ z,\ t)\\ \frac{dz}{dt}&=u_z(x,\ y,\ z,\ t)\end{aligned}\right\} \tag{4-13}$$

式中t是自变量，x、y、z是t的因变量。

二、流管和流束

在流场中任取一不与流线重合的封闭曲线，过其上各点作流线，这些流线所构成的管状曲面称为流管。流管和它内部所包围的流线合在一起称为流束。当流场随时间变化时，流管的形状也是随时在变的，因此流管的几何外形也是针对某一瞬时说的。

由于流线不能相交，流管内的流线不会由流管穿出，流管外的流线也不会穿越管壁进入流管。这就是说，原来在流管内的流体永远在管内流动，原来在管外的流体也永远在管

外流动，相互不会混合。因此可以把流管看成是一个和固体管壁一样的流体不能穿越的面。

三、过流断面

在流束上作一个横截面，使其和所有的流线正交，这样的横截面称为过流断面。过流断面不一定是平面，只有在流线都相互平行的地方，过流断面才是个平面。如图 4-6 所示。

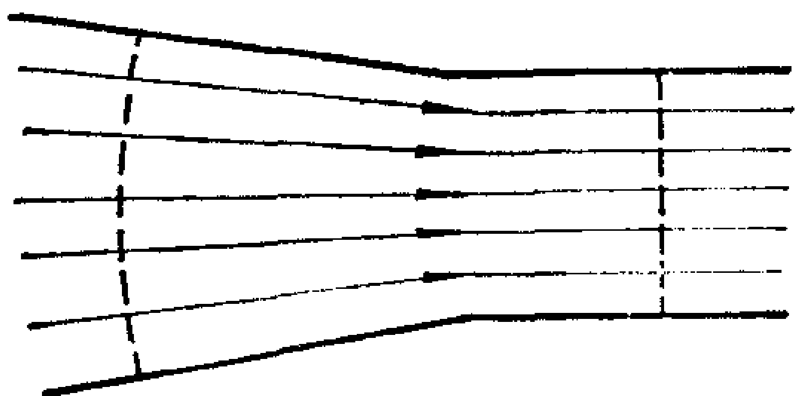


图 4-6　过流断面和流线

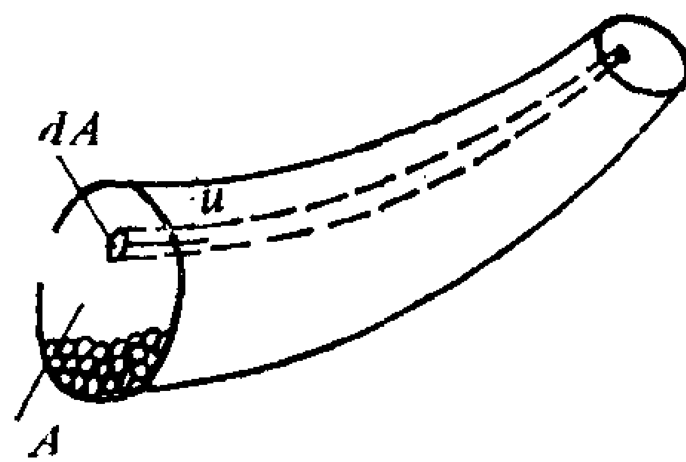


图 4-7　元流和总流

四、元流和总流

过流断面为无限小的流束称为元流。元流过流断面上各点的流动参数可以认为是相同的。我们可以把整个流束看成是无数个元流组成的，元流之间相互有滑动。

元流和流线实际上是同一所指。流线只是一个几何概念，它不能组成流束，引入元流后，就有了物理意义，它才具有质量、动量和能量。

通常也把元流组合成的流束称为总流。如图4-7所示。

五、流量

单位时间内通过流束某一过流断面的流体体积、质量或重量分别称为该过流断面的体积流量、质量流量或重量流量。如以dA表示元流的过流断面面积，u表示该断面上速度的绝对值，则通过此断面的各种流量为

体积流量　$d\theta = udA$

质量流量　$d\theta_m = \rho udA$

重量流量　$d\theta_g = \gamma udA$

总流的各种流量则为上述三式对总流过流断面面积A的积分。

体积流量　$$Q = \int_A udA \quad (4\text{-}14)$$

质量流量　$$Q_m = \int_A \rho udA \quad (4\text{-}15)$$

重量流量　$$Q_g = \int_A \gamma udA \quad (4\text{-}16)$$

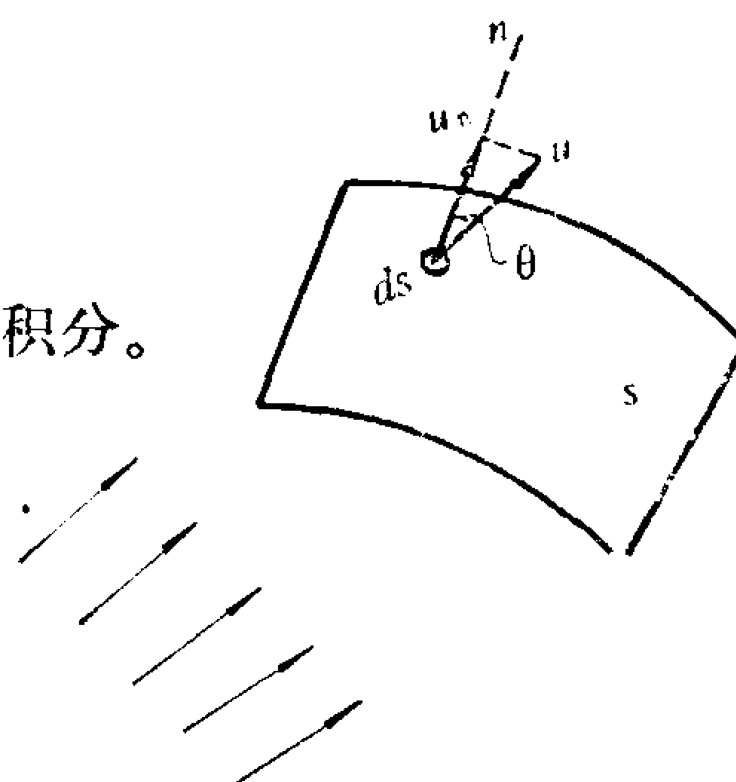


图 4-8　通过任意曲面的流量

体积流量、质量流量和重量流量之间的关系为

$$Q_m = \rho Q,\quad Q_g = \gamma Q,\quad Q_g = gQ_m \quad (4\text{-}17)$$

如所取截面S不是垂直于流速的过流断面，计算流量时应取速度在所取微元面积dS法线方向的分量u_n（见图4-8），即

$$\theta = \int_s u_n dS = \int_s u\cos\theta dS \quad (4\text{-}18)$$

$$\theta_m = \int_s \rho u\cos\theta dS \quad (4\text{-}19)$$

θ为速度与微元面积法线之间的夹角。

如用矢量表示，则为

$$Q=\int_s \vec{u}\cdot d\vec{S} \qquad 或 \qquad Q_m=\int_s \rho\vec{u}\cdot d\vec{S} \tag{4-20}$$

在不可压缩流体的讨论中常用体积流量，在可压缩流体的讨论中一般采用质量流量或重量流量。

§ 4-4 流动的分类

为了研究上的方便，可对流体运动进行分类。

一、恒定（或定常）流和非恒定（或非定常）流

用欧拉法研究流体运动时，流场中每个质点的流动参数一般是其空间坐标和时间的函数，也就是说它们是随时间变化的，这样的流动称为非恒定流。

如流场中所有的流动参数（u、p、ρ、T等）都不随时间变化，这样的流动称为恒定流。

在§4-2所举的水箱出流的例子中，如水箱内水位保持不变，就是恒定流；如水箱内水位随着水体的流出而不断下降，就是非恒定流。把恒定从一般情况下分离出来，是为了对流动的研究得到简化。在恒定流中，各流动参数仅是空间坐标的函数，与时间无关。例如

$$\vec{u}=\vec{u}(x,y,z)$$

$$p=p(x,y,z)$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=0$$

其它流动参数也是如此。因此，在恒定流中各物理量的当地变率为零，只有迁移变率。

恒定流中由于流场不随时间变化，流线就不随时间而变，由流线组成的流管、流束的位置和形状当然也不会随时间变化。

恒定流还有一个重要的性质，位于流线上的所有质点，只能沿该流线运动，它们的迹线都与该流线重合。这可以从流线的绘制中得到解释。现以某瞬时位于点1处的质点为例（图4-9），当它流到点2时，虽然时间不同了，但点2处的流速仍为$\vec{u}_2$，该质点将继续沿着矢量$\vec{u}_2$流到3点，依此类推。因此它只能沿着这条流线运动，不会离开。

—— t瞬时过1点的流线

- - - t瞬时过1点的质点在以后一段时间的迹线

图 4-9 非恒定流的流线和迹线

如为非恒定流，情况就不同了。当t_1瞬时位于1点的质点流到2点时，由于时间不同了（$t_1+\Delta t$），2点的速度已不再是$\vec{u}_2$，而是另一个$\vec{u}_2'$，该质点在下一瞬时就不会来到3点。这样该质点的迹线和t_1瞬时的流线就是完全不同的两条曲线了。

二、均匀流和非均匀流

在不可压缩流体中流线皆为平行直线的流动称为均匀流。不满足均匀流条件的流动就是非均匀流。均匀流具有下列性质：

1）各质点的流速相互平行，过流断面为一平面；

2）位于同一流线上的各个质点速度相等；

3）沿流程各过流断面上流速分布相同，因而平均流速相等，但同一过流断面上各点的流速并不相等；

4）各质点的迁移加速度皆为零，即$(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=0$，如流动既是均匀的，又是恒定的，那么各质点的全加速度即为零；

5）过流断面上压强分布规律与静止流体相同，即在同一过流断面上各点的测压管水头为常数，但在不同过流断面上为不同的常数。

下面证明这一性质。在均匀流过流断面上取一端面积为dA、高为dl的微元柱体，其轴线n-n与流线正交，并与铅垂线成α角（见图4-10）。在均匀流中流体微团作等速运动，没有加速度。因此，所取微元柱体不存在惯性力，作用在它上面的各种力在n方向投影的代数和为零。作用于微元柱体上的表面力有：两端面上的总压力pdA及$(p+dp)dA$；柱体侧面上的流体压力与n轴正交；两端面上的切向力是沿着流速方向作用的，也与n轴正交；柱体侧面上的切应力在轴对称的对应点上大小相等方向相反，它们在n方向的投影皆为零。作用在微元柱体上的质量力只有重力，它在n方向的投影为$dG\cos\alpha=\gamma dAdl\cos\alpha=\gamma dAdz$。

所以
$$(p+dp)dA-pdA+\gamma dAdz=0$$
或
$$\gamma dz+dp=0$$
积分后得
$$z+\frac{p}{\gamma}=常数 \tag{4-21}$$

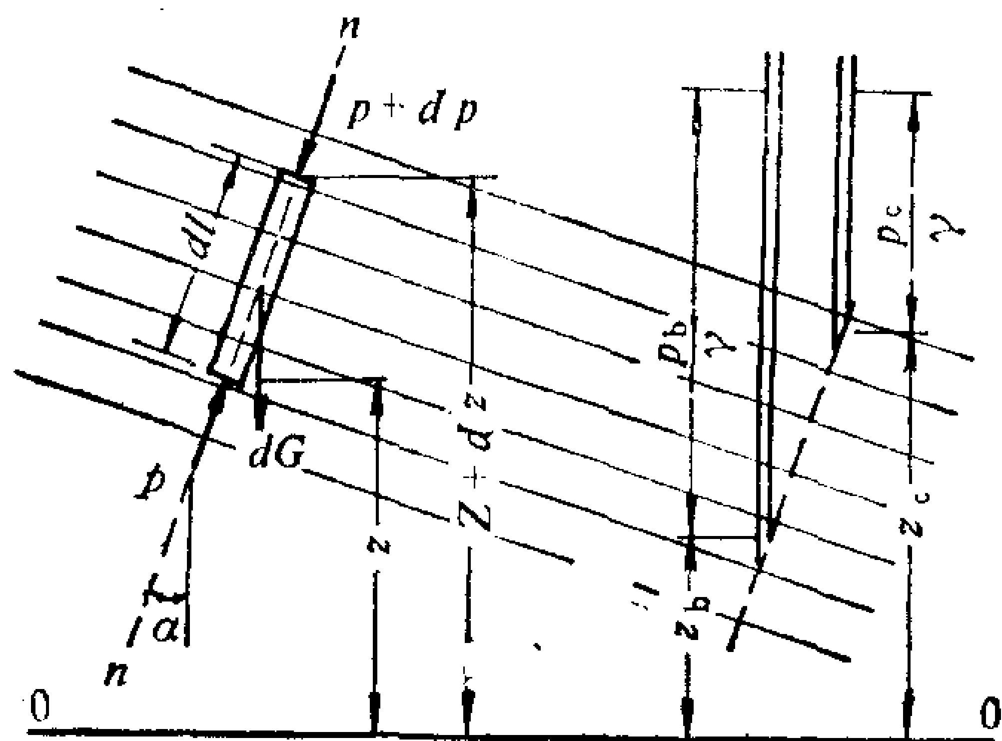


图 4-10 均匀流过流断面上的压强分布

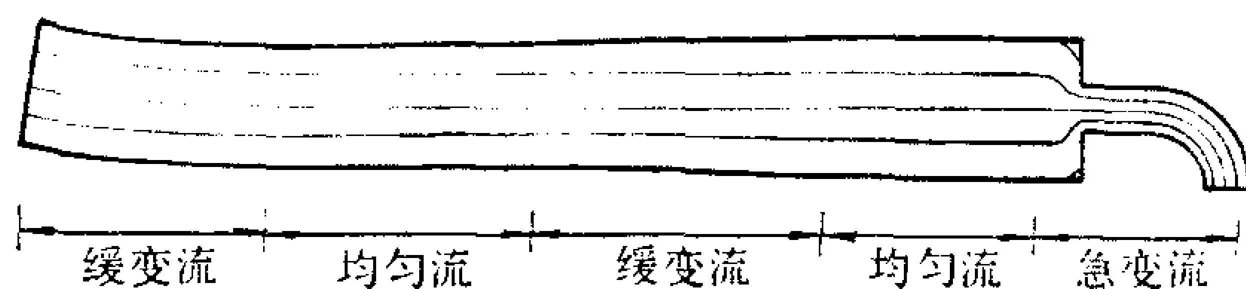


图 4-11 均匀流、缓变流和急变流

液体在等直径直管中的流动（进口段除外）就是均匀流的例子，在变径管段或弯管中的流动就是非均匀流。

三、缓变流和急变流

非均匀流又有缓变流与急变流之分。如流线虽非严格平行的直线，但流线之间的夹角很小，且流线的曲率半径很大，这样的非均匀流称为缓变流，也就是说，流线是近乎平行直线的流段就是缓变流段，否则就是急变流（如图4-11所示）。

在缓变流的过流断面上可认为各点流速近似平行，过流断面可看成是个平面，其上压强分布也与静止流体相同。但在缓变流中位于同一流线的各个质点的速度，不能认为相等。

四、压力流、重力流和射流

流体与外界物体接触的表面简称边界面。流体在边界面内部流动的问题称为内流问题；流体在边界面外部流动的问题称为外流问题。流体在管道或明渠中的流动都属于内流问题。研究飞行物在大气中飞行或船舶在水面上航行则为外流问题。对于内流问题，按边界的性质不同，又可分为三类（如图4-12）。

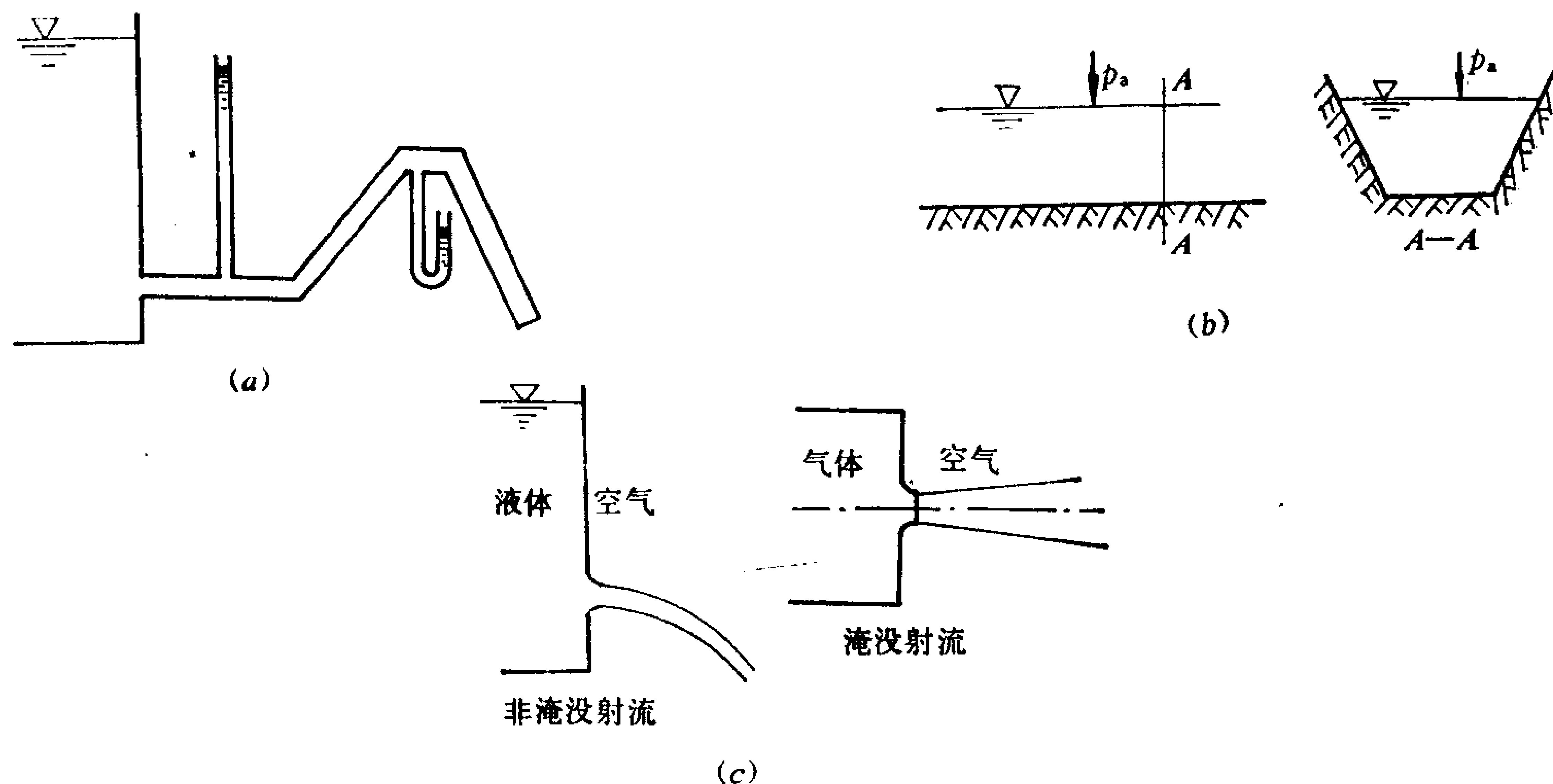


图 4-12 压力流、重力流、射流

(a)压力流；(b)重力流；(c)射流

1）压力流：总流各过流断面的整个周边都是固体壁面的流动称为压力流。流体充满整个管道断面的管流就是压力流的例子。

2）重力流：总流各过流断面的周界一部分是固体壁面，而另一部分是与气体接触的自由表面，这样的流动称为重力流。天然河道和人工渠道中的水流是重力流的例子。气体流动只有压力流，不会有重力流。

3）射流：当流体由孔口或喷嘴射出，流入另一部分流体介质中，这时总流各过流断面的全部周界都不是固体壁面而是流体介质，这种流动称为射流。射流又可分为淹没射流和非淹没射流。流体射入与其本身性质相同的介质中（如气体射入空气中或液体射入液体中）称为淹没射流。如液体射入气体中，则称为非淹没射流。

五、空间流动、平面流动和一元流动

一般情况下，流场各流动参数是三个空间坐标和时间的函数，这就是空间流动（或三元流动）。若流场中各点的流体速度都平行于某一平面，且各流动参数在此平面的垂直方向没有变化，在这样的流场中各流动参数只是两个空间坐标和时间的函数，这种流动称为平面流动（或二元流动）。若令z轴垂直于此平面，则平面流动的任一流动参数B应满足$\frac{\partial B}{\partial z}=0$，同时$u_z=0$。

自然界中并不存在严格的平面流动。如各流动参数在某一方向的变化相对于其它方向

上的变化微不足道，而且速度在此方向上的分量也很小，这时就可以按平面流动处理。

如流场中的流动参数可以用一个空间坐标和时间的函数来表示，这种流动称为一元流动。工程中的内流问题，若沿流束方向的几何尺寸远大于其横向尺寸，同时除流速以外的流动参数在过流断面上的变化很小，这样的流束运动可以简化成一元流动，但需要引入断面平均流速的概念（如图4-13）。

断面平均流速是一个假想的在过流断面各点上都相等的流速，通常以v表示，流体以断面平均流速通过该过流断面的流量与实际的流量相等。因此断面平均流速v等于实际流量Q除以过流断面面积A。将Q用（4-14）式代入，即得根据实际流速分布求断面平均流速的计算式。

$$v=\frac{Q}{A}=\frac{1}{A}\int_A u\,dA \qquad (4\text{-}22)$$

由于流束沿程各过流断面各自只有一个断面平均流速，因此断面平均流速也和其它流动参数一样，可以表示为起始断面到所考虑的断面之间的距离s和时间t的函数，即$v=v\times(s,t)$（如图4-14）。

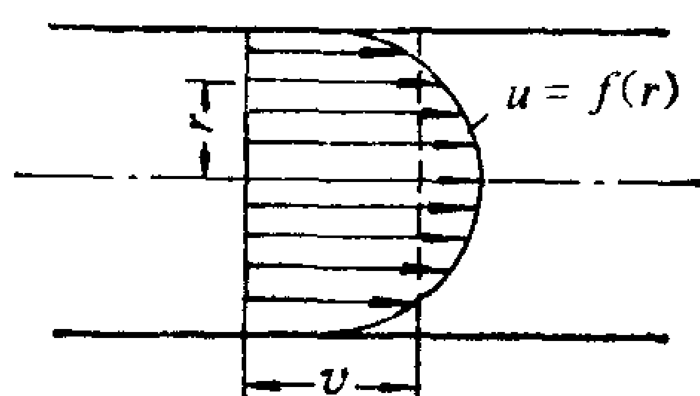


图 4-13 断面平均流速

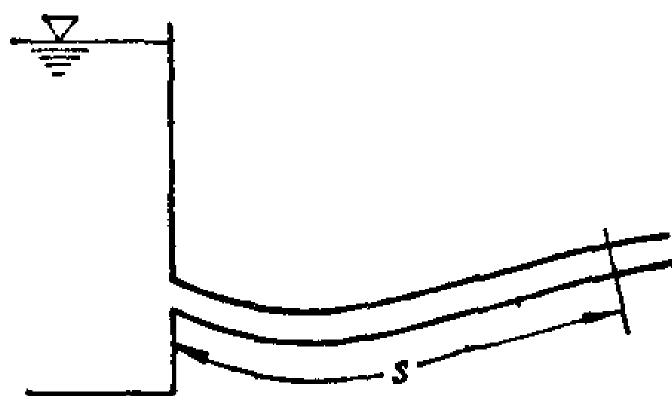


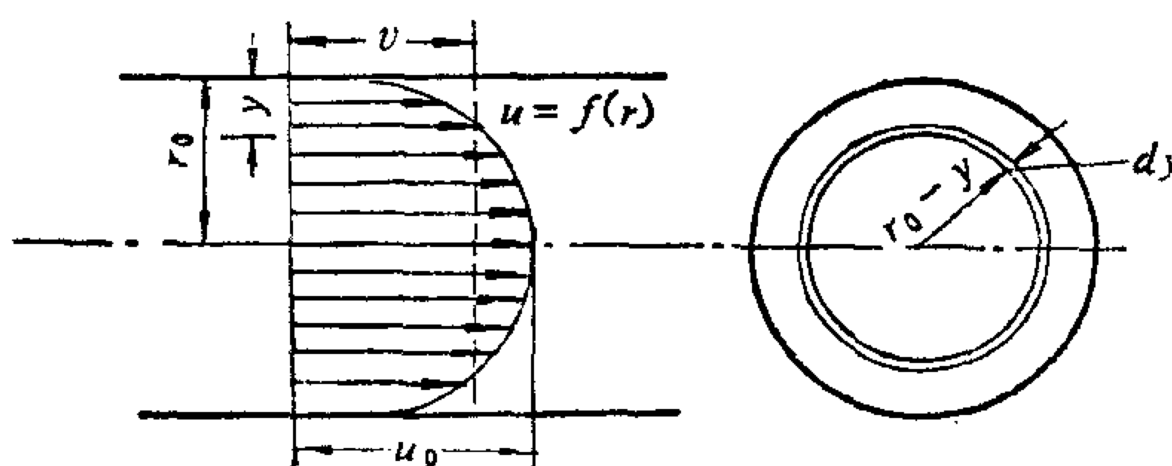
图 4-14 一元流动

【例 4-2】 设半径为r_0的圆管中，过流断面的流速分布为1/7次方律，即

$$u=u_0\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}$$

式中y为离管壁的距离，求平均流速和轴心处最大流速u_0的比值。

【解】 在半径（r_0-y）处，取微元环形面积



例 4-2图

$$dA=2\pi(r_0-y)dy$$

其上各点流速皆为u，故得流量

$$Q=\int_A u\,dA=\frac{2\pi u_0}{r_0^{1/7}}\int_0^{r_0}(r_0-y)y^{1/7}dy=\frac{49}{60}\pi r_0^2 u_0$$

平均流速为

$$v=\frac{Q}{\pi r_0^2}=\frac{49}{60}u_0=0.817u_0$$

§ 4-5 系统和控制体 输运公式

从本节开始我们将讨论流体运动的基本规律，建立反映这些规律的基本方程。

流体是自然界物质存在的一种形态，流体力学是研究流体宏观机械运动的学科，因此流体的运动必须遵循自然界物质运动的普遍规律，以及物体宏观机械运动的一般规律。这些规律是：1）质量守恒原理；2）牛顿第二定律和在这个定律基础上得到的动量、动量矩、动能等定理；3）能量守恒原理和根据这个原理得到的热力学定律。一切流体，不管其性质有何不同，都必然服从这些规律。

将这些规律应用于流体时，如取一有限流体作为研究对象，可得到一组积分形式的方程。如取一微元流体作为研究对象，即采用微元体分析法，则可得到一组微分形式的方程。积分形式的方程可以给出该有限流体与周围物体之间的相互作用，以及边界面处流动参数之间的关系，但无法给出内部各质点的流动细节。要了解流场的每个细节，需采用微分形式的方程。本章先介绍积分形式的基本方程，这要用到"系统"和"控制体"的概念。

系统是一团确定的流体质点的集合。系统以外的一切称为外界。系统的边界是把系统与外界分开的真实或想象的表面。在流体运动过程中，系统边界的位置、大小、形状是随时间变化的，但系统的质量始终不变。在系统的边界上没有质量交换，即没有流体进入或流出系统。在系统的边界上可以有能量交换，即可以有能量进入或跑出系统。同时，系统的边界上，受到外界对系统的表面力作用。

控制体是在流场中选定的一块固定不变的空间体积。控制体的边界面称为控制面，它是一个封闭的表面。控制面的形状和位置相对于选定的坐标系是固定不变的。在流体运动过程中，控制面上有质量交换，即有流体进、出控制体。同时也可以有能量交换，可以有能量进、出控制体。控制面上也有周围物体对其作用的表面力。

一个系统所具有的质量、动量、能量等物理量及其随时间的变化，若用拉格朗日法表达本来是比较方便的。但由于流体具有易流动性的特点，系统的边界在流动过程中的变化无法识别，这就给拉格朗日型基本方程的应用带来很大的困难。若要建立欧拉型的基本方程，则应选取控制体为研究对象，为此须设法解决用控制体来分析本来属于系统的这些物理量随时间的变化率问题。建立输运公式正是为了解决这个问题。

为使输运公式具有通用性，令ϕ为单位质量流体所具有的某物理量（如质量、动量、动量矩、能量等），它是空间坐标和时间的函数。则某系统所具有的该物理量的总量Φ显然为

$$\Phi=\int_{V}\phi\rho dV \qquad (4\text{-}23)$$

式中V为系统所占有的空间，dV为在系统内取的微元体积。

现在来讨论怎样用控制体寻求Φ对时间的变化率$\frac{D\Phi}{Dt}$。设t瞬时系统所占有的空间为V_1，在$t+\Delta t$瞬时所占据的空间为V_2（图4-15中虚线所示）。取控制体与V_1重合（图中实线所示）。由于V_1中包括V_3和V_4两部分，因此经过Δt后系统内该物理量的增量$\Delta\Phi$为

$$\Delta\Phi=\Phi_{t+\Delta t}-\Phi_{t}=(\Phi_4+\Phi_5)_{t+\Delta t}-(\Phi_3+\Phi_4)_{t}$$
$$=\left[\int_{V_4}\phi\rho dV+\int_{V_5}\phi\rho dV\right]_{t+\Delta t}-\left[\int_{V_3}\phi\rho dV+\int_{V_4}\phi\rho dV\right]_{t}$$

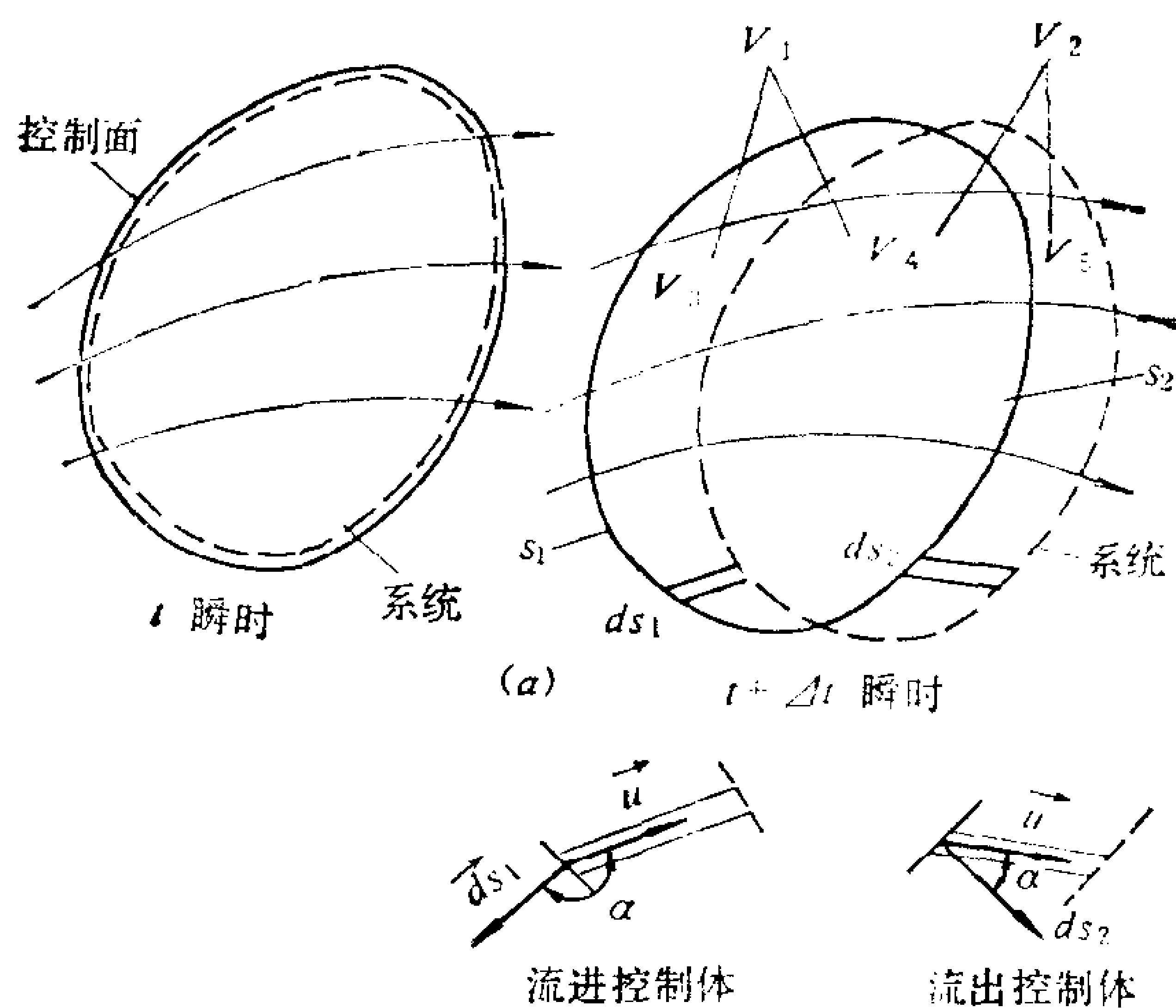


图 4-15 系统和控制体

$$= \left[\int_{V_4} \phi\rho dV + \int_{V_3} \phi\rho dV\right]_{t+\varDelta t} - \left[\int_{V_3} \phi\rho dV + \int_{V_4} \phi\rho dV\right]_t$$

$$+ \left[\int_{V_5} \phi\rho dV - \int_{V_3} \phi\rho dV\right]_{t+\varDelta t}$$

两侧除以$\varDelta t$并取极限

$$\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\varDelta\Phi}{\varDelta t} = \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\left[\int_{V_4}\phi\rho dV + \int_{V_3}\phi\rho dV\right]_{t+\varDelta t} - \left[\int_{V_3}\phi\rho dV + \int_{V_4}\phi\rho dV\right]_t}{\varDelta t}$$

$$+ \lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\left[\int_{V_5}\phi\rho dV - \int_{V_3}\phi\rho dV\right]_{t+\varDelta t}}{\varDelta t} \qquad (a)$$

上式等号左侧为该系统的物理量Φ对时间的变化率，用$\frac{D\Phi}{Dt}$表示。等号右侧的第一项为控制体内流体所具有的该物理量对时间的变化率。因控制体是一个不随时间而变的固定空间，控制体内流体所具有的物理量总量仅随时间变化。因此

$$\lim_{\varDelta t\to 0}\frac{\left[\int_{V_4}\phi\rho dV + \int_{V_3}\phi\rho dV\right]_{t+\varDelta t} - \left[\int_{V_3}\phi\rho dV + \int_{V_4}\phi\rho dV\right]_t}{\varDelta t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\phi\rho dV \qquad (b)$$

CV表示控制体所占有的空间。

等式右侧第二项中，$\left(\int_{V_5}\phi\rho dV\right)_{t+\varDelta t}$是空间$V_5$内流体所具有的$\Phi$值，它随$\varDelta t$的加大而增大。被$\varDelta t$除以后，即为单位时间$V_5$内$\Phi$的增长值。而$V_5$内$\Phi$值的增长是由通过控制

面的S_2部分流入V_5的流体携带进来的。因此这个增长率也可以用下面的方法得到。在S_2上取微元面积dS，Δt时间内由dS流出控制体进入V_5的流体体积为$u\Delta t\cos\alpha dS$（见图4-15 b），α为速度矢量$\vec{u}$与dS的外法线方向的单位矢量$\vec{n}$之间的夹角，由这部分流体带入V_5的Φ值为$\phi\rho u\Delta t\cos\alpha dS$，如用矢量表示则为$\phi\rho\Delta t\,\vec{u}\cdot\vec{dS}$，通过$S_2$进入$V_5$的该物理量总量即为$\int_{S_2}\phi\rho\Delta t\,\vec{u}\cdot\vec{dS}$，除以$\Delta t$就得到$V_5$内$\Phi$的增长率为

$$\int_{S_2}\phi\rho\,\vec{u}\cdot\vec{dS}$$

同理，$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\left(\int_{V_3}\phi\rho dV\right)_{t+\Delta t}}{\Delta t}$为$V_3$内$\Phi$的增长率，它等于

$$-\int_{S_1}\phi\rho\,\vec{u}\cdot\vec{dS}$$

S_1为流体流入控制体的部分控制面。由于在S_1上，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，$\vec{u}\cdot\vec{dS}$恒为负值，故在前面加一“-”号。

由此可得

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left[\int_{V_5}\phi\rho dV-\int_{V_3}\phi\rho dV\right]_{t+\Delta t}}{\Delta t}=\int_{S_2}\phi\rho\,\vec{u}\cdot\vec{dS}+\int_{S_1}\phi\rho\,\vec{u}\cdot\vec{dS}$$

$$=\int_{CS}\phi\rho\,\vec{u}\cdot\vec{dS} \qquad (c)$$

CS为整个控制面，如以S_3表示无流体通过的控制面，其上$\vec{u}\cdot\vec{dS}=0$，则$CS=S_1+S_2+S_3$。

将（b）、（c）式代入（a）中，得

$$\frac{D\Phi}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\phi\rho dV+\int_{CS}\phi\rho\,\vec{u}\cdot\vec{dS} \qquad (4\text{-}24)$$

这就是输运公式。式中$\frac{D\Phi}{Dt}=\frac{D}{Dt}\int_V\phi\rho dV$为系统的某物理量对时间的变化率，也就是单位时间的增量，通常称它为系统导数。(4-24)式的意义和质点导数类似，$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\phi\rho dV$表示单位时间控制体$CV$中所含该物理量的增量，它是由流场的非恒定性造成的，相当于质点的当地导数。$\int_{CS}\phi\rho\,\vec{u}\cdot\vec{dS}$表示单位时间通过控制面$CS$的流体带走和带入的该物理量的差值，以带走的为正，带入的为负，它是由流场的不均匀性造成的，相当于质点的迁移导数。

因此，输运公式可表述如下：系统中某物理量对时间的变化率等于单位时间内控制体CV中所含的该物理量的增量与通过控制面CS净流出的（流出与流入的差值）该物理量之和。在恒定流动的条件下，$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\phi\rho dV=0$，则有

$$\frac{D\Phi}{Dt}=\int_{CS}\phi\rho\,\vec{u}\cdot d\vec{S} \tag{4-25}$$

此式表明，在恒定流动中系统导数仅与通过控制面的流动有关，而与控制体内部的流动情况无关。

利用输运公式可以简便地推导出积分形式的欧拉型基本方程，它们适用于满足连续介质条件的各种流体。

§ 4-6 积分形式的连续性方程

连续性方程实质上就是流体力学中的质量守恒原理，可简述如下：对一个确定的系统来说，它的质量不随时间变化。质量守恒原理的数学表达式为

$$\frac{DM}{Dt}=\frac{D}{Dt}\int_{V}\rho dV=0 \tag{4-26}$$

式中M为系统的质量，V为系统在t瞬时所占有的空间，它是随时间变化的。

（4-26）式是对系统列出的，它实际上就是拉格朗日型的连续性方程。利用输运公式就可以把它变为欧拉型的连续性方程。

令（4-24）式中的Φ为系统的质量M，则ϕ为单位质量的质量，因而等于1。于是

$$\frac{DM}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dV+\int_{CS}\rho\vec{u}\cdot d\vec{S}=0$$

或

$$\int_{CS}\rho\vec{u}\cdot d\vec{S}=-\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dV \tag{4-27}$$

这就是积分形式的欧拉型连续性方程。此式表明，单位时间内通过控制面净流出的流体质量等于同时间控制体内流体质量的减少。

在恒定流动的条件下，（4-27）式中$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho dV$等于零，于是连续性方程简化为

$$\int_{CS}\rho\vec{u}\cdot d\vec{S}=0 \tag{4-28}$$

这表示通过控制面净流出的质量流量为零。也就是说，在恒定流动中流出和流入控制体的质量流量应相等。

若将（4-28）式应用于总流，在总流上任取两个过流断面①、②，其面积和断面平均流速分别为A_1、A_2和v_1、v_2，密度为ρ_1、ρ_2。以该两过流断面及其间的总流侧表面所包围的空间作为控制体（图4-16中的虚线）。则流出控制体的质量流量为

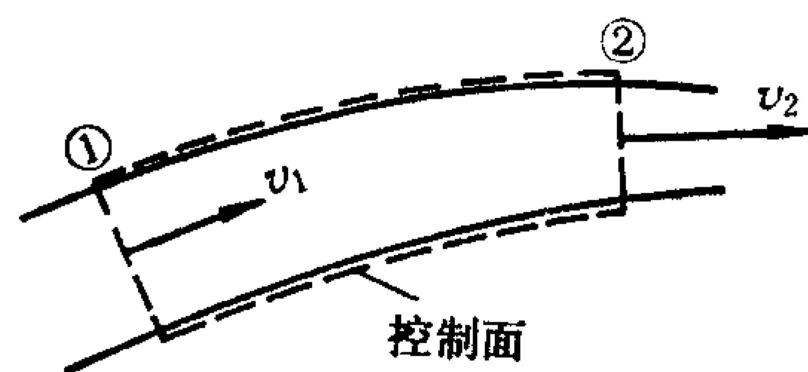


图 4-16 恒定总流的控制体

$\rho_2 v_2 A_2$，流入控制体的质量流量为$\rho_1 v_1 A_1$。因此（4-28）式可写成

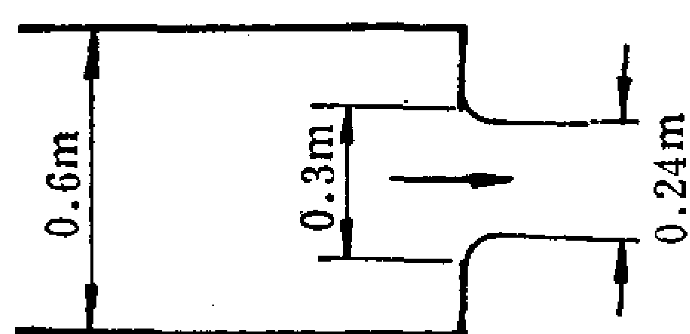
$$\rho_2 v_2 A_2 - \rho_1 v_1 A_1 = 0 \quad 或 \quad \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 \tag{4-29}$$

这就是恒定流动条件下总流的连续性方程。它表明，在恒定流动中通过总流沿程各过流断面的质量流量都相等。

若流动不仅是恒定的，流体还是不可压缩的，（4-29）式中$\rho_1=\rho_2$，故有

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 \quad 或 \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1} \tag{4-30}$$

在不可压缩流体的恒定流动中，通过总流沿程各过流断面的体积流量都相等，因而总流任意两过流断面的平均流速与其面积成反比。



例 4-3图

【例 4-3】 已知0.6m直径水管中的断面平均流速为6m/s，求孔口断面和射流收缩断面上的平均流速。孔口直径0.3m，射流收缩断面直径0.24m。

【解】 设水管、孔口、射流的过流断面面积和平均流速分别为A_1、A_2、A_3和v_1、v_2、v_3。由（4-30）式可得

$$v_2 = v_1\frac{A_1}{A_2} = v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 6\times\left(\frac{0.6}{0.3}\right)^2 = 24\text{m/s}$$

$$v_3 = v_1\frac{A_1}{A_3} = v_1\left(\frac{d_1}{d_3}\right)^2 = 6\times\left(\frac{0.6}{0.24}\right)^2 = 37.5\text{m/s}$$

【例 4-4】 直径4.5cm的压气机进口断面上空气的密度为1.2kg/m³，平均流速为5m/s。经过压缩后在直径为2.5cm的圆管中以平均流速3m/s送出，求通过压气机的质量流量和出口断面的空气密度。

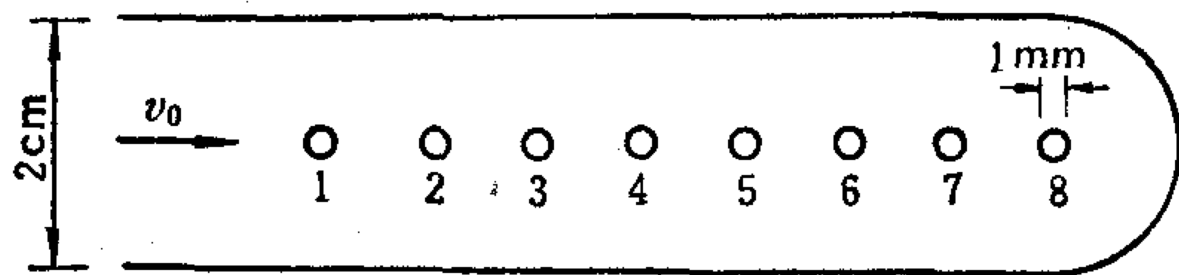
【解】 由进气管流入压气机的质量流量为

$$Q_m = \rho_1 v_1 A_1 = 1.2\times5\times\frac{\pi\times0.045^2}{4} = 9.54\times10^{-3}\text{kg/s}$$

根据连续性方程，流出压气机与流入压气机的质量流量应相等，故

$$\rho_2 = \frac{Q_m}{v_2 A_2} = 9.54\times10^{-3}\Big/3\times\frac{\pi\times0.025^2}{4} = 6.48\text{kg/m}^3$$

【例 4-5】 烟气管直径为2cm，其上有8个直径为1mm的小孔，烟气由这些小孔流出，如由每个小孔流出的烟气流量都比它前面的那个小孔少2%，烟气进入烟气管的平均流速为0.05m/s，求第1和第8小孔的断面平均流速。



例 4-5图

【解】 取进口断面以后的烟气管为控制体，根据连续性方程，流进控制体的烟气流量应等于流出的流量

$$v_0 A_0 = (v_1 + v_2 + \cdots\cdots + v_8)A_1$$

各小孔的面积相同，因而后一小孔比前一小孔流量少2%也就是断面平均流速小2%。

$$v_2 = 0.98 v_1$$
$$v_3 = 0.98 v_2 = (0.98)^2 v_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$v_8 = (0.98)^7 v_1$$
$$v_0 A_0 = [1 + 0.98 + 0.98^2 + \cdots\cdots + 0.98^7] v_1 A_1$$
$$0.05 \times \frac{\pi \times 0.02^2}{4} = [1 + 0.98 + 0.98^2 + \cdots\cdots + 0.98^7] \times v_1 \times \frac{\pi \times 0.001^2}{4}$$

由此求得

$$v_1 = 2.68 \mathrm{m/s}$$
$$v_8 = 2.33 \mathrm{m/s}$$

§ 4-7 积分形式的能量方程

能量方程实质上就是流体力学中的能量守恒原理。对于运动的流体，能量守恒原理可简述如下：单位时间由外界传入系统的热能$\frac{\varDelta E_H}{\varDelta t}$等于系统总能量的变化率$\frac{DE}{Dt}$与系统在此时间内对外界所作的功$\frac{\varDelta W}{\varDelta t}$之和，即

$$\frac{\varDelta E_H}{\varDelta t} = \frac{DE}{Dt} + \frac{\varDelta W}{\varDelta t} \tag{4-31}$$

如单位质量流体所具有的能量为e，则输运公式中$\phi = e$，总能量E的系统导数为

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt}\int_V e\rho dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho dV + \int_{CS} e\rho\, \vec{u} \cdot d\vec{S} \tag{a}$$

系统对外界所作的功$\frac{\varDelta W}{\varDelta t}$包括两部分：

1）系统对流体机械所作的功$\frac{\varDelta W_m}{\varDelta t}$。如流体将能量输送给流体机械（水轮机），$\frac{\varDelta W_m}{\varDelta t} > 0$；如流体机械给流体输送能量（泵或风机），则$\frac{\varDelta W_m}{\varDelta t} < 0$。

2）作用于系统上的表面力在系统运动过程中所作的功。这部分功又可分为两项：切向力所作的功$\frac{\varDelta W_S}{\varDelta t}$与法向力所作的功。其中单位时间法向力所作的功可表示为$\int_S p\, \vec{u} \cdot d\vec{S}$。因此

$$\frac{\varDelta W}{\varDelta t} = \frac{\varDelta W_m}{\varDelta t} + \frac{\varDelta W_S}{\varDelta t} + \int_S p\, \vec{u} \cdot d\vec{S} \tag{b}$$

由于所取的控制体与初始时刻系统所占有的空间重合，上式中系统的表面S即为控制面CS。将（a）、（b）两式代入（4-31）式中，得

$$\frac{\varDelta E_H}{\varDelta t} - \frac{\varDelta W_m}{\varDelta t} - \frac{\varDelta W_S}{\varDelta t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} e\rho dV + \int_{CS} (p + \rho e)\, \vec{u} \cdot d\vec{S} \tag{4-32}$$

这就是普遍的积分形式能量方程。为了便于工程上应用，还需对它作进一步的分析。上式

中单位质量流体所具有的能量 e 包括动能、位能和内能三部分。设有一流体微团，其质量为Δm，以速度 u 流动，它具有的动能为$\frac{\Delta m u^2}{2}$，因而单位质量流体具有的动能为$\frac{u^2}{2}$。如该微团位于重力场中，它距基准面的高度为Z，则微团对基准面所具有的位能为ΔmgZ，单位质量流体所具有的位能即为gZ（如图4-17）。内能e_i则为流体分子所具有的能量，它包括分子运动的动能和分子间吸引力所引起的位能。一般情况下内能是温度和压强的函数。如分子间的距离较大，分子间的吸引力可以忽略不计，这种气体称为**完全气体**。完全气体的内能只是温度的函数，即$e_i = f(T)$。因此

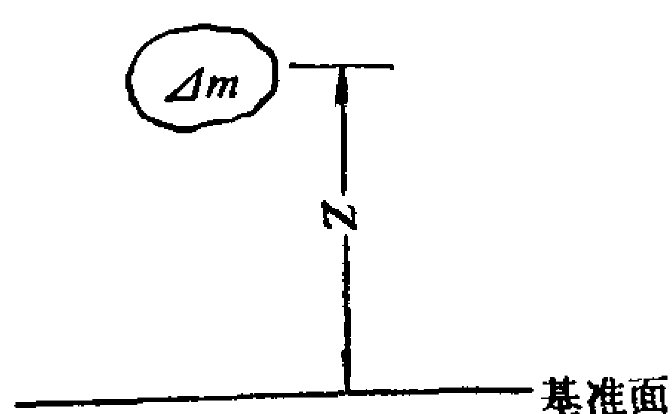


图 4-17

$$e = e_i + gz + \frac{u^2}{2}$$

将它代入（4-32）式中，得

$$\frac{\Delta E_H}{\Delta t} - \frac{\Delta W_m}{\Delta t} - \frac{\Delta W_S}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\left(e_i + gz + \frac{u^2}{2}\right)\rho dV + \int_{CS}\left(\frac{p}{\rho} + e_i + gz + \frac{u^2}{2}\right)\rho \vec{u}\cdot\vec{dS} \qquad (4-33)$$

再来讨论单位时间系统表面切向力所作的功$\frac{\Delta W_S}{\Delta t}$。如在系统表面取微元面积$dS$，作用在$dS$上的切向力为$\vec{dF} = \vec{\tau} dS$，$\vec{\tau}$为切应力。则单位时间作用在整个系统表面$S$上的切向力所作的功为$\int_S \vec{\tau} dS\cdot\vec{u}$，由于所取的控制面与初始时刻系统的表面重合，故

$$\frac{\Delta W_S}{\Delta t} = \int_{CS}\vec{\tau}\cdot\vec{u} dS$$

对于理想流体，$\vec{\tau} = 0$，则$\frac{\Delta W_S}{\Delta t} = 0$。对于实际流体，如把控制面$CS$分成两部分：不动的固体壁面部分$CS_1$和流体通过的部分$CS_2$，则

$$\frac{\Delta W_S}{\Delta t} = \int_{CS_1}\vec{\tau}\cdot\vec{u} dS + \int_{CS_2}\vec{\tau}\cdot\vec{u} dS$$

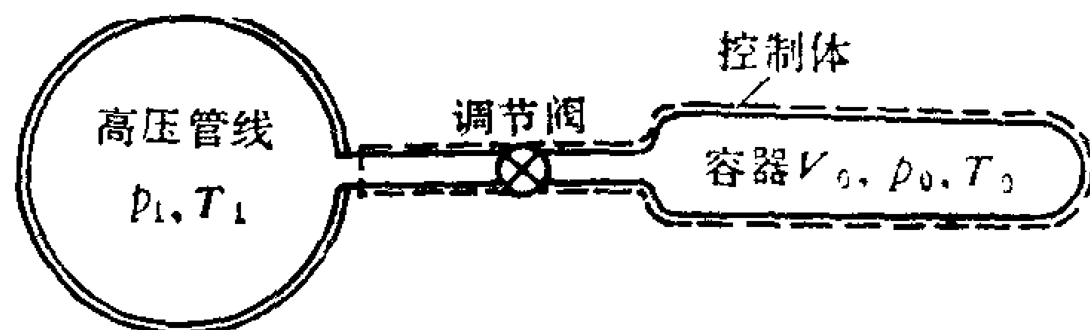
在不动的固体壁面上$\vec{u} = 0$，等式右侧第一个积分即为零。如选定控制面时令流体通过的部分为过流断面，由于切应力$\vec{\tau}$一定位于微元面积dS上，今dS垂直于速度$\vec{u}$，则$\vec{\tau}$也与$\vec{u}$垂直，因而在过流断面CS_2上

$$\vec{\tau}\cdot\vec{u} = 0$$

于是右侧第二个积分也为零。这就是说，如控制面仅由不动的固体壁面和过流断面组成，实际流体作用于控制面上的切向力所作的功也为零，即$\frac{\Delta W_S}{\Delta t} = 0$。因此，如控制体内又无流体机械作功，$\frac{\Delta W_m}{\Delta t} = 0$，则能量方程简化为

$$\frac{\Delta E_H}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\left(e_i + gz + \frac{u^2}{2}\right)\rho dV + \int_{CS}\left(\frac{p}{\rho} + e_i + gZ + \frac{u^2}{2}\right)\rho\vec{u}\cdot\vec{dS} \qquad (4-34)$$

【例 4-6】 有一体积为V_0的容器，内存空气，其压强和温度分别为p_0、T_0。现从高压管线给它灌气，高压管线容量很大，在灌气过程中p_1、T_1保持不变。容器与管道系统都是绝热的，连接管内速度较小，$\frac{u^2}{2}$可忽略不计。如阀门打开后容器内的空气在开始时温度升高的速率为0.06°K/S，求此时进入容器的空气流量。



例 4-6图

已知：$T_0=20°C$，$p_0=100kPa$，$V_0=0.1m^3$，$T_1=10°C$，空气的定容比热$c_v=717\frac{N\cdot m}{kg\cdot K}$，气体常数$R=287\frac{N\cdot m}{kg\cdot K}$。

【解】 取整个容器为控制体，除容器进口为过流断面外，其它部分皆为固体壁面。列积分形式的能量方程。由于系统绝热，$\frac{\Delta E_H}{\Delta t}=0$；系统内无流体机械作功，$\frac{\Delta W_m}{\Delta t}=0$；流体通过的部分控制面为过流断面，$\frac{\Delta W_s}{\Delta t}=0$；而$e=e_i+gZ+\frac{u^2}{2}$中$gZ$与$\frac{u^2}{2}$皆可不考虑，即$e=e_i$，因此能量方程简化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e_{ir}\rho_r dV+\int_{CS}\left(e_{ig}+\frac{p_g}{\rho_g}\right)\rho_g\vec{u}\cdot\vec{dS}=0$$

式中e_{ir}、ρ_r为容器中气体的内能和密度，e_{ig}、p_g、ρ_g分别为连接管中气体的内能、压强和密度。

在过流断上各点的e_{ig}、p_g、ρ_g相同，因而

$$\int_{CS}\left(e_{ig}+\frac{p_g}{\rho_g}\right)\rho_g\vec{u}\cdot\vec{dS}=\left(e_{ig}+\frac{p_g}{\rho_g}\right)\int_{CS}\rho_g\vec{u}\cdot\vec{dS}=\left(e_{ig}+\frac{p_g}{\rho_g}\right)(-Q_m)$$

容器中各点的e_{ir}相同，它只是时间的函数，与空间坐标无关，故

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}e_{ir}\rho_r dV=\frac{\partial}{\partial t}e_{ir}\int_{CV}\rho_r dV=\frac{d}{dt}(e_{ir}M)=e_{ir}\frac{dM}{dt}+M\frac{de_{ir}}{dt}$$

M为阀门打开时刻整个容器中气体的质量，它也只是时间的函数，故把偏导数改为全导数。

对控制体内的气体列连续性方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho_r dV+\int_{CS}\rho_g\vec{u}\cdot\vec{dS}=0$$

此式可写成

$$\frac{dM}{dt}-Q_m=0 \text{ 或 } \frac{dM}{dt}=Q_m$$

代入能量方程

$$e_{ir}Q_m+M\frac{de_{ir}}{dt}-e_{ig}Q_m-\frac{p_g}{\rho_g}Q_m=0$$

将$e_{ir}=c_vT_r$，$e_{ig}=c_vT_g$，$M=\rho_rV_0$，$\frac{p_g}{\rho_g}=RT_g$代入

$$c_vT_rQ_m+\rho_rV_0c_v\frac{dT_r}{dt}-c_vT_gQ_m-RT_gQ_m=0$$

当阀门打开后，一开始容器内$T_r=T_0$，$\rho_r=\rho_0$，$p_r=p_0$。在连接管内$T_g\approx T_1$。因此

$$Q_m=\frac{\rho_0 V_0 c_v\left(\frac{dT_t}{dt}\right)_{t\to 0}}{c_v T_1+RT_1-c_v T_0}$$

式中

$$\rho_0=\frac{p_0}{RT_0}=\frac{(1.00+1.01)\times 10^5}{287\times(273+20)}=2.39\text{kg/m}^3$$

$$Q_m=\frac{2.39\times 0.1\times 717\times 0.06}{717\times 283+287\times 283-717\times 293}=1.4\times 10^{-4}\text{kg/s}$$

§ 4-8 不可压缩流体恒定总流的能量方程

在（4-34）式中，如流动是恒定的，$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\left(e_i+gz+\frac{u^2}{2}\right)\rho dV=0$，积分形式的能量方程又简化为

$$\frac{\Delta E_H}{\Delta t}=\int_{CS}\left(e_i+gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)\rho\vec{u}\cdot d\vec{S} \tag{4-35}$$

将此式应用于不可压缩流体的恒定总流。在没有流量分出或汇入、并各自满足缓变流条件的流段，取过流断面①、②，其面积分别为A_1、A_2，以该两过流断面和总流侧壁组成的封闭表面为控制面（如图4-18所示）。流体仅从断面②流出，从断面①流入，故（4-35）成为

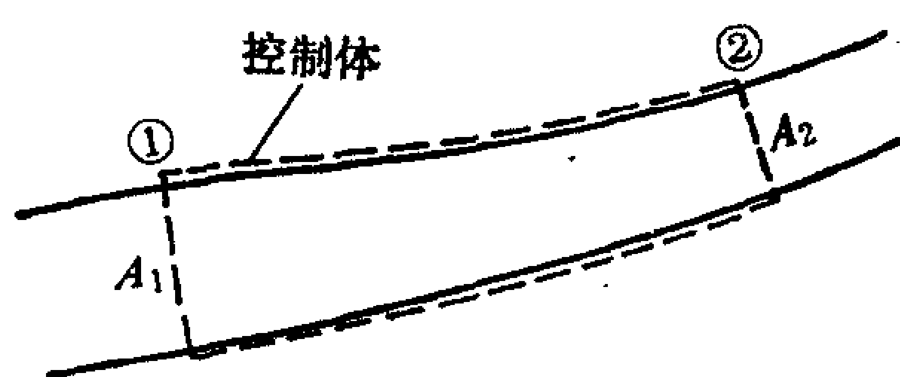


图 4-18 总流的控制体

$$\frac{\Delta E_H}{\Delta t}=\int_{A_2}\left(e_{i2}+gz_2+\frac{p_2}{\rho}+\frac{u_2^2}{2}\right)\rho u_2 dA_2-\int_{A_1}\left(e_{i1}+gz_1+\frac{p_1}{\rho}+\frac{u_1^2}{2}\right)\rho u_1 dA_1 \tag{4-36}$$

现在来讨论上式中的几个积分：

积分$\int_A e_i\rho u dA$为单位时间通过断面A的全部流体质量所具有的内能，可令它等于单位质量流体所具有的平均内能$\bar{e}_i$与通过断面A的质量流量的乘积，即

$$\int_A e_i\rho u dA=\bar{e}_i Q_m$$

由§4-4已知，如过流断面A位于缓变流段上，A上各点的$Z+\frac{p}{\gamma}=$常数，因此

$$\int_A\left(gz+\frac{p}{\rho}\right)\rho u dA=g\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)\int_A\rho u dA=g\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)Q_m$$

积分$\int_A\frac{u^2}{2}\rho u dA$为单位时间通过断面$A$的流体动能。前已提到，总流问题通常可按一元流动处理，即以断面平均流速v代替不知其分布规律的u。如按断面平均流速计算单位时间通过A的动能，则为$\frac{v^2}{2}\rho v A$。由于断面平均流速是按通过过流断面的体积流量相等来定义的，因而用断面平均流速计算的动能与通过的实际动能不完全相等，现引进一个动能修正系数α加以修正，即令

$$\int_A \frac{u^2}{2}\rho u dA = \alpha\frac{v^2}{2}\rho vA = \frac{\alpha v^2}{2}Q_m$$

$$\alpha = \frac{1}{v^3 A}\int_A u^3 dA \qquad (4\text{-}37)$$

α的意义显然是单位时间通过过流断面的实际动能与按断面平均流速计算的动能的比值。α一定大于1，它的值与过流断面上流速分布的不均匀程度有关❶，流速分布越不均匀，α值越大。但在管道和明渠流动中，除流体的粘性很大而流速又很小的情况外，α约在1.05到1.10之间。工程计算中常取$\alpha=1$。

于是（4-36）式可写成

$$\frac{\Delta E_H}{\Delta t} = \left[\dot{e}_{i2} + g\left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2}\right]Q_{m2} - \left[\dot{e}_{i1} + g\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2}\right]Q_m$$

以重量流量gQ_m除式中各项，并考虑到$Q_{m2}=Q_{m1}=Q_m$，则

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \frac{\dot{e}_{i2}}{g} - \frac{\dot{e}_{i1}}{g} - \frac{\Delta E_H}{\Delta t g Q_m}$$

令

$$h_w = \frac{\dot{e}_{i2}}{g} - \frac{\dot{e}_{i1}}{g} - \frac{\Delta E_H}{\Delta t g Q_m}$$

即得不可压缩流体恒定总流的能量方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w \qquad (4\text{-}38)$$

（4-38）式常称为**总流的伯诺里方程**，它是流体力学中用来求解总流问题的主要工具。从推导过程不难看出，它的应用条件是：1）不可压缩流体；2）恒定流动；3）质量力中仅有重力；4）过流断面必须取在缓变流段上；5）两过流断面之间没有分流或汇流。

§4-9 恒定总流能量方程的物理意义 总水头线和测压管水头线

伯诺里方程表达了恒定总流沿程各种机械能之间的转换和总能量守恒的关系。式中：

z为过流断面上任一点距所选基准面的高度，称为**位置水头**，它是单位重量流体所具有的位能。

---

❶ (4-37)式中令$u=v+\Delta u$，Δu为平均流速与点流速的差值，它在断面A的不同位置上有正有负。

$$\alpha = \frac{1}{v^3 A}\int_A (v+\Delta u)^3 dA = \frac{1}{v^3 A}\int_A [v^3 + 3v^2\Delta u + 3v\Delta u^2 + \Delta u^3]dA$$

$$= 1 + \frac{1}{A}\left[3\int_A\left(\frac{\Delta u}{v}\right)dA + 3\int_A\left(\frac{\Delta u}{v}\right)^2 dA + \int_A\left(\frac{\Delta u}{v}\right)^3 dA\right]$$

按断面平均流速定义

$$v = \frac{1}{A}\int_A u dA = \frac{1}{A}\int_A (v+\Delta u)dA = v\left[1 + \frac{1}{A}\int_A\left(\frac{\Delta u}{v}\right)dA\right]$$

故 $\int_A\left(\frac{\Delta u}{v}\right)dA = 0$

而 $\int_A\left(\frac{\Delta u}{v}\right)^2 dA > \int_A\left(\frac{\Delta u}{v}\right)^3 dA$，因此$\alpha>1$

$\frac{p}{\gamma}$为过流断面上与Z同一点的压强水头。从物理意义看，这一项是流体在压强场中移动时压力作功而使流体获得的能量。测压管内流体质点能自动上升到$\frac{p}{\gamma}$高度的现象，说明压强也是一种能量，称为压能。$\frac{p}{\gamma}$为单位重量流体所具有的压能。

单位重量流体的位能和压能之和为单位势能，以H_p表示，即$H_p=z+\frac{p}{\gamma}$。H_p称为测压管水头。位于缓变流段的过流断面上，虽然各点的z和$\frac{p}{\gamma}$都不相同，但两者之和H_p是一样的，所以测压管水头H_p也就是过流断面上的平均单位势能。

$\frac{\alpha v^2}{2g}$也具有长度的量纲

$$\left[\frac{\alpha v^2}{2g}\right]=\left(\frac{L}{T}\right)^2\Big/\frac{L}{T^2}=L$$

它也是一个高度，称为流速水头。它是流体以初速v垂直向上喷射所能达到的理论（不计空气阻力）高度。前已提及，$\frac{u^2}{2}$为单位质量流体所具有的动能，因而$\frac{\alpha v^2}{2g}$为通过过流断面的单位重量流体所具有的平均动能。

伯诺里方程中这三项之和为过流断面上单位重量流体所具有的平均机械能，也称为该过流断面的总水头，以H_d表示，即

$$H_d=z+\frac{p}{\gamma}+\frac{\alpha v^2}{2g} \tag{4-39}$$

最后一项$h_w=\frac{\bar{e}_{i2}}{g}-\frac{\bar{e}_{i1}}{g}-\frac{\Delta E_H}{\Delta t g Q_m}$也具有长度的量纲。其中$\frac{\bar{e}_{i2}}{g}-\frac{\bar{e}_{i1}}{g}$为流出和流入控制体的单位重量流体所具有的平均内能的差值，$-\frac{\Delta E_H}{\Delta t}$为单位时间由控制体传至外界的热能，分摊到单位重量流体上即为$-\frac{\Delta E_H}{\Delta t g Q_m}$。实际流体具有粘性，在流动过程中内摩擦力作功，使流体的一部分机械能不可逆地转变为热能，其中一部分热能将使流体的温度和内能不断增高，因而流出控制体的平均单位内能$\frac{\bar{e}_{i2}}{g}$要比流入的$\frac{\bar{e}_{i1}}{g}$大；另一部分则通过控制面耗散于外界。从机械能的角度看都是能量的损失，通常称它为水头损失。实际流体总流的伯诺里方程表明，恒定总流沿程各过流断面上各种单位机械能可以相互转化，但它们的总和（即总水头）只能是沿程递减的。

如控制体内有流体机械存在，恒定总流的能量方程一样适用。只因（4-33）式中系统对流体机械所作的功$\frac{\Delta W_m}{\Delta t}$不为零，（4-38）式中需增加一项单位重量流体对流体机械所作的功$H_m=\frac{\Delta W_m}{\Delta t g Q_m}$，

即
$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\pm H_m=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w \tag{4-40}$$

如流体机械对流体作功（如泵或风机），流动的能量增加，式中H_m取“+”号；如流体

对流体机械作功（如水轮机），H_m应取“－”号。

如流体是理想的，流动过程不会出现内摩擦力，也就没有能量损失，因而$h_w=0$。于是理想流体恒定总流的能量方程为

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} \qquad (4-41)$$

此式表明，理想流体恒定总流沿程各过流断面上，流体的平均单位机械能是相等的。

既然恒定总流能量方程中的各项都是长度量纲，我们就可以用一个几何图形把总流沿程的能量转化情况形象地表示出来。图4-19就是这种图形。先画出基准线0－0和总流的中心线。总流各断面距基准线的高度就是位置水头。在各断面的中心线向上作铅垂线，截取长度按比例尺等于各断面的压强水头，得各断面的测压管水头。各断面测压管水头的连线称为**测压管水头线**。在测压管水头线上再截取长为$\frac{\alpha v^2}{2g}$的铅垂高度，即得各断面的总水头。各断面的总水头的连线称为**总水头线**。有了总水头线、测压管水头线、总流的中心线和基准线，能量方程中各项沿流程的变化就一目了然了。总水头线和测压管水头线之间铅垂距离的变化，反映了平均流速沿程的变化；测压管水头线与总流轴线之间铅垂距离的变化，反映了总流各断面压强沿程的变化。在总流起始断面的总水头顶端，作一根与基准线平行的直线，这根水平线与总水头线之间铅垂距离的变化，反映了水头损失沿程的变化。

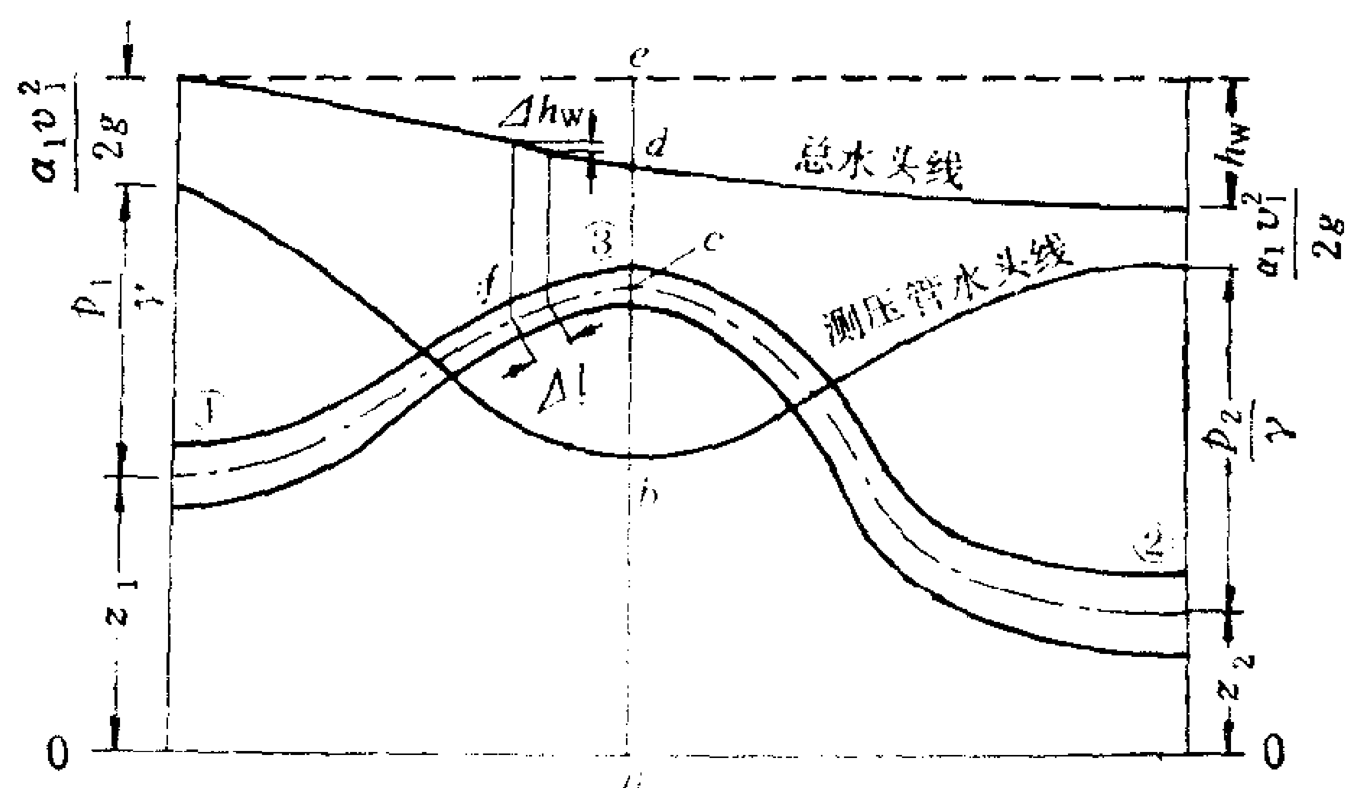


图 4-19　总水头线和测压管水头线

如测压管水头线延伸到总流中心线以下，这表明该处的相对压强为负值，即出现了真空。例如图4-19中的断面③，线段ac为位置水头，bd为流速水头，压强水头则为$-bc$，三者之和ad为该断面的总水头。

实际流体的流动必然有水头损失，在控制体内没有流体机械作功的条件下，总水头线一定是沿流程下降的。但测压管水头线却不一定总是下降的，图4-19清楚地表明了这一点。所以流体不一定总是从压强大的断面流向压强小的断面，但只能从总水头大的断面流向总水头小的断面。

总水头线下降的坡度叫**水力坡度**。如总水头线是曲线，水力坡度沿程是个变量。在图4-19中于断面f附近取一微元流段Δl，设总流在Δl流段的水头损失为Δh_w，则当Δl趋近于零时，比值$\frac{\Delta h_w}{\Delta l}$的极限即为总流在$f$断面处的水力坡度，以$J$表示。

$$J=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta h_w}{\Delta l}=\frac{dh_w}{dl}=-\frac{dH_d}{dl} \qquad (4-42)$$

由于总水头H_d沿流程的增量总是负的，所以用总水头的变化来表达水力坡度时，前面要加一“－”号。

如①、②两断面间的总水头线是倾斜的直线，则水力坡度为

$$J = \frac{h_{w1-2}}{l_{1-2}} = \frac{H_{d1} - H_{d2}}{l_{1-2}} \tag{4-43}$$

§ 4-10 恒定总流能量方程的应用

恒定总流的能量方程是工程中用来分析、计算各种流体力学问题的主要工具．有着重大的实用意义。下面对这个方程在应用时要注意的问题做几点说明。

1）应用总流的能量方程也先要选取控制体，但由于没有流量通过的控制面，对列出的方程无影响，所以应用时只要选定流进和流出控制体的过流断面的位置就行了。

2）在选取过流断面时应使未知量最少，但必须包括要求的未知量。此外还应注意，过流断面应选在缓变流处。

3）基准面的位置可以任意选定，它不会影响计算结果。为了使列出的方程尽量简单，常把基准面选在通过较低断面的中心，这样能量方程中一个断面的z为零，另一个为正值。

4）方程中的压强p本应采用绝对压强，但对于液体流动，由于在选定的两个断面处，因高程差引起的当地大气压的差别可以忽略，习惯上常采用相对压强。这相当于在等式两侧各减去一个等值的大气压，等式仍成立。不过不论采用哪种压强，等式两侧必须用得一致。

5）应用伯诺里方程时对其应用条件的理解不能绝对化。例如恒定流条件、不可压缩性条件，都应视其对所得结果的影响程度作具体分析，灵活掌握。对于两过流断面之间没有分流或汇流的条件，在推导恒定总流的能量方程的过程中是不可缺少的，但在工程实际问题的计算中，这个条件一般都不予考虑。即在图4-20所示的流动中，对断面①和②（或①和③）同样可以列总流的能量方程。这是因为能量方程（4-38）式表达的是两过流断面的单位重量流体的平均能量关系，而不是总能量的关系，这样列方程在物理概念上并非完全不合理。其次，在计算有分流或汇流的两断面间流动的水头损失时，是根据与实际情况相似的试验数据确定的。因而理论上的不够严密处可以通过采用实测的试验资料加以弥补。

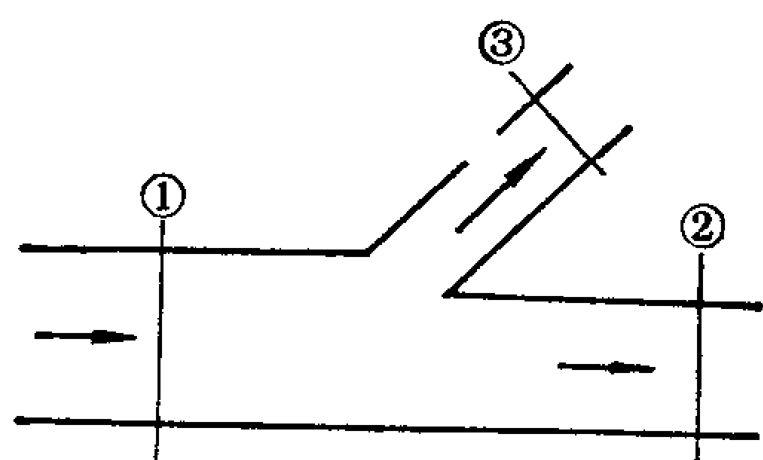


图 4-20　有流量分出的总流

下面举几个应用能量方程的实例。

一、文丘里（Venturi）流量计

文丘里流量计是测管道流量的装置，由渐缩段、喉道和渐扩段三部分组成（如图4-21）。当流体通过时，由于喉道断面缩小，流速增大。动能的增加必然导致势能的减小，因而测压管水头下降。在渐缩段进口前断面①和喉道断面②装上压差计，测出它们的测压管水头差，根据能量方程即可算出通过的流速和流量。

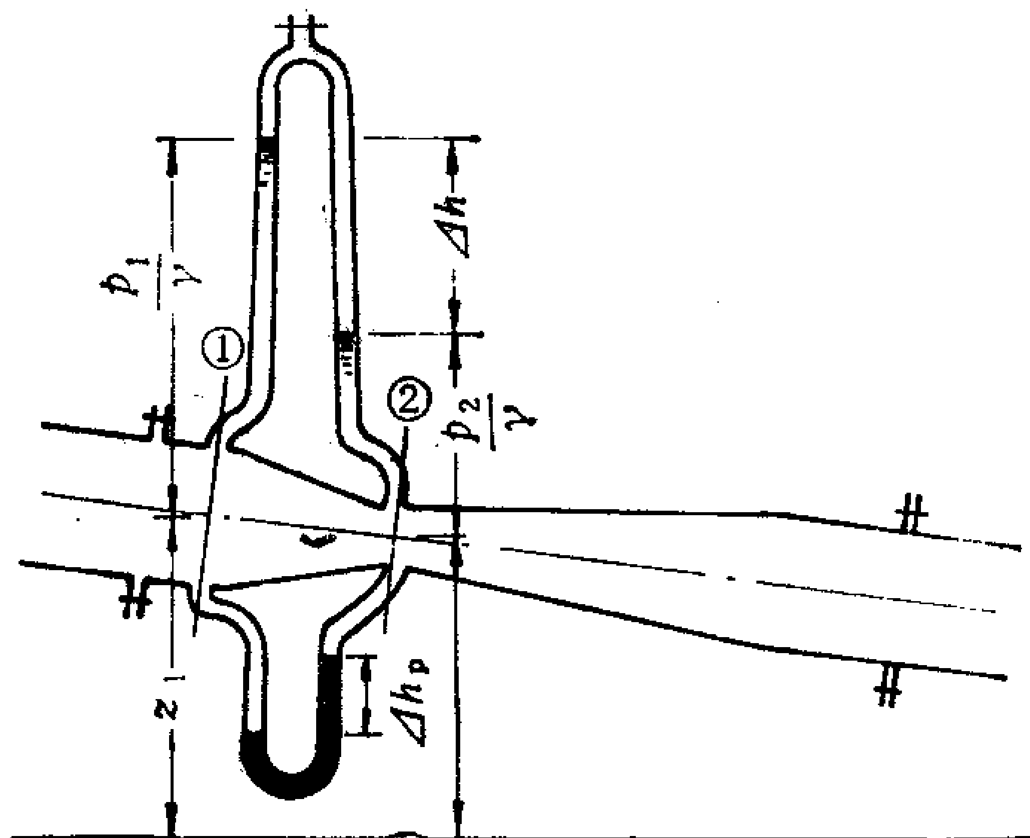


图 4-21　文丘里流量计

取①、②断面列能量方程，令$\alpha_1=\alpha_2=1$，暂不考虑水头损失。可得

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)=\frac{v_2^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g}$$

此式等号左侧即为①、②两断面的测压管水头差$\varDelta h$，因此

$$\varDelta h=\frac{v_2^2}{2g}-\frac{v_1^2}{2g} \tag{a}$$

由连续性方程

$$v_2=v_1\frac{A_1}{A_2}=v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \tag{b}$$

将（b）代入（a）

$$\varDelta h=\frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1\right]$$

或

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}\sqrt{2g\varDelta h} \tag{c}$$

于是

$$Q=v_1A_1=\frac{\pi d_1^2}{4}\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}\sqrt{\varDelta h}$$

令 $K=\frac{\pi d_1^2}{4}\frac{\sqrt{2g}}{\sqrt{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}$，当$d_1$、$d_2$已知，$K$为定值，称为仪器常数。

考虑到两断面间有能量损失，再乘上一个流量系数μ，得实际流量的计算公式为

$$Q=\mu K\sqrt{\varDelta h} \tag{4-44}$$

标准文丘里流量计的μ值一般不小于0.96。

借助于收缩断面增大流速，测出收缩段前后的测压管水头差来计算流量的装置称为节流式流量计。除文丘里流量计外，常用的节流式流量计还有喷嘴流量计和孔板流量计（如图4-22）。这两种流量计的作用原理与文丘里流量计相同，因而计算流量的公式也一样，只是流量系数不同。尤其是孔板流量计，能量损失较大，流量系数较小。但它制作简便，造价低廉，应用较普遍。

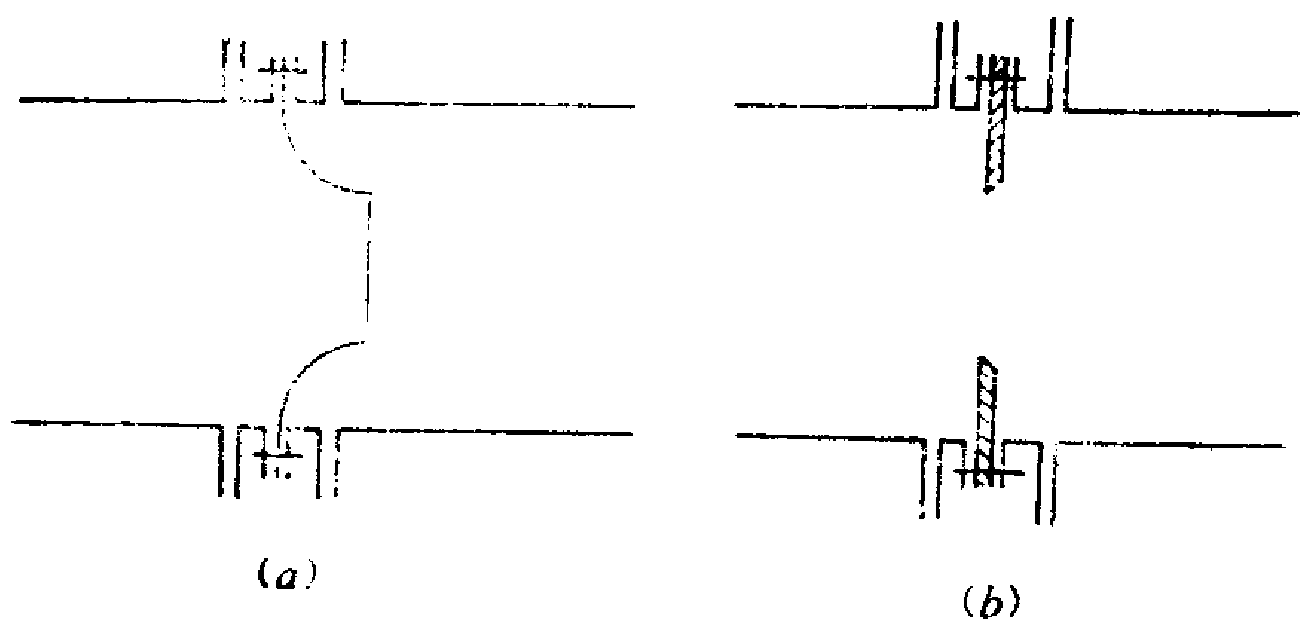


图 4-22 其它流量计

(a)喷嘴流量计；(b)孔板流量计

【例 4-7】 图4-21所示的文丘里管，若$d_1=200\text{mm}$，$d_2=100\text{mm}$，连接①、②断面的水银压差计内水银柱高差$\varDelta h_p=18\text{cm}$，求通过的水流量。

【解】 该文丘里流量计的仪器常数为

$$K=\frac{\pi\times0.2^2}{4}\frac{4.43}{\sqrt{\left(\frac{0.2}{0.1}\right)^4-1}}=0.0359\text{m}^{2.5}/\text{s}$$

①、②两断面的测压管水头差为

$$\Delta h=\Delta h_{p}\frac{\gamma_{p}-\gamma}{\gamma}=0.18\times12.6=2.27\mathrm{mH_2O}$$

取流量系数$\mu=0.98$，故流量为

$$Q=0.98\times0.0359\times\sqrt{2.27}=0.053\mathrm{m^3/s}=53\mathrm{L/s}$$

二、毕托(Pitot)管

当流体绕过一个固定不动的物体流动时，在物面上流体向四周分散的点(图4-23中的A点)称为驻点。驻点上流体的速度为零，动能全部转化为压能。利用这个原理可以制成一种量测流速的仪器。

将一根两端开口的细管弯成90°，将弯管的一端放在要测定其流速的A点(图4-24)，管口要正对来流方向。由于A点是驻点，管内液面上升的水头h不仅是A点的压强水头，而且还包括了由动能转化来的压能，即

$$h=\frac{p_A}{\gamma}+\frac{u_A^2}{2g}$$

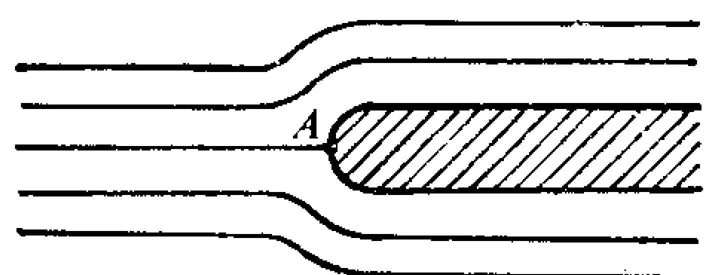


图 4-23　驻点

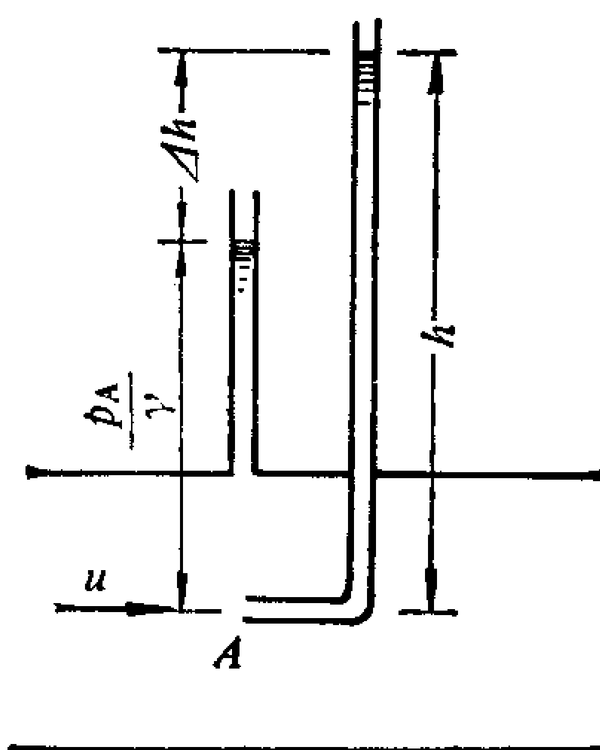


图 4-24　流速水头

如流动是流线相互平行的均匀流，$\frac{p_A}{\gamma}$可在与A点位于同一过流断面的管壁上装一测压管，量得两管内的液面差Δh即为A点的流速水头

$$\Delta h=\frac{u_A^2}{2g}$$

由此得A点的流速为

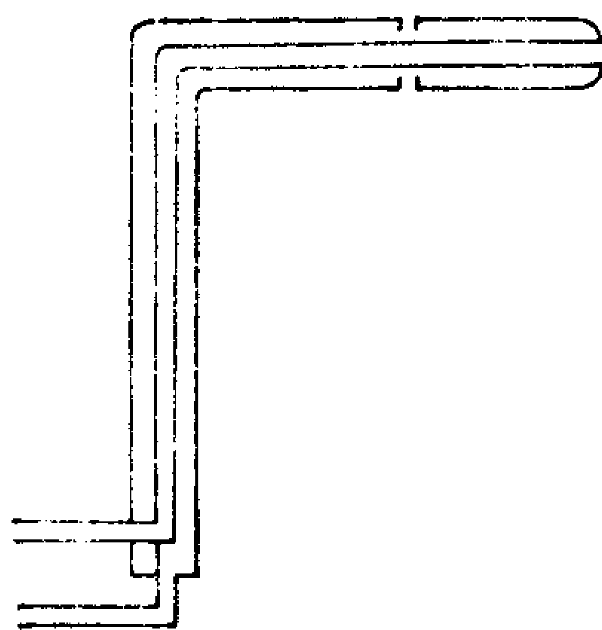
$$u_A=\sqrt{2g\Delta h} \tag{4-45}$$

可以把量测驻点压强的弯管和测压管组合在一起，这种可以直接测定点流速的仪器称为毕托管。前端的开口测驻点压强，旁侧的开孔量测点的实际压强，用连通管把它们分别接在压差计的两端，即可直接测得流速水头Δh。见图4-25。

三、孔口出流

在容器的侧壁或底板上开一个小孔，流体由这个孔口流出，这样的现象称为孔口出流。在通风空调设备中，很多过流设施的计算都可简化为孔口出流问题。

孔口出流需要解决的主要是过流能力问题。设容器是封闭的，容器内液面距孔口中心的高度为H，液面上气体压强为p_1，现确定其流量。如容器的断面很大，孔口出流过程中容器内液面下降的速度很慢，流动可认为是恒定的。取通过孔口中心的水平面为基准面。为了选取缓变流断面，先要分析孔口附近的局部流动现象。容器中的液体是沿着各个方向趋向孔口的(如图4-26中虚线所示)。沿着侧壁流来的质点到达孔口时，因惯性作用不能突然转折，流股在孔口外侧出现收缩现象，过水断面不断减小，直到离孔口平面二分之


图 4-25 毕托管

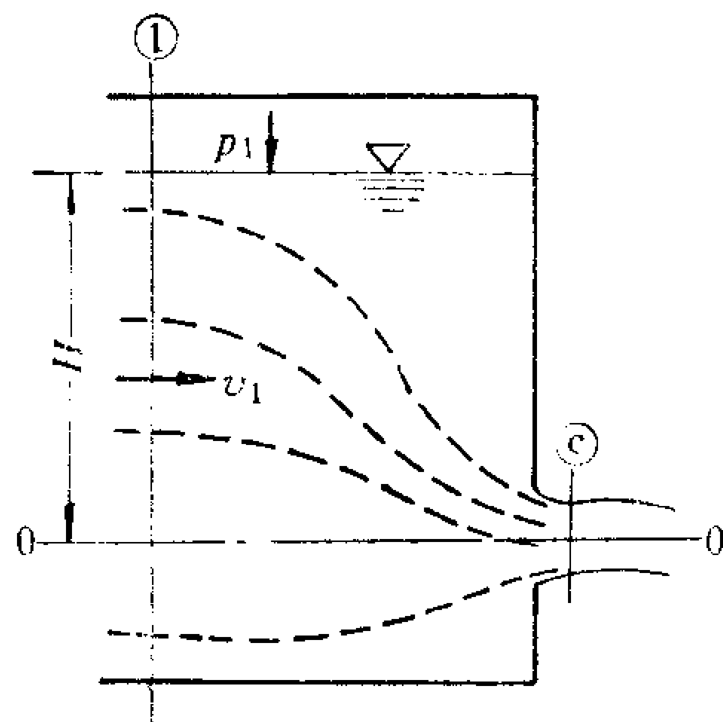


图 4-26 孔口出流

一孔口直径处，断面收缩到最小，这个断面称为收缩断面。在收缩断面ⓒ处，流线近似平行，缓变流条件基本满足。

在孔口前流线尚为平行直线处取断面①及收缩断面ⓒ列能量方程

$$H+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=0+\frac{p_c}{\gamma}+\frac{\alpha_c v_c^2}{2g}+h_w$$

令 $H_0=H+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}-\frac{p_c}{\gamma}$，$H_0$称为作用水头，它是①断面的总水头与ⓒ断面的测压管水头的差值，也是促使流体由孔口流出的推动力。

流体力学中的水头损失h_w常以流速水头的倍数来表示，因此孔口出流的水头损失可写成

$$h_w=\zeta_0\frac{v_c^2}{2g}$$

ζ_0为孔口出流的阻力系数。

将上两式代入能量方程中，可得收缩断面的流速

$$v_c=\frac{1}{\sqrt{\alpha_c+\zeta_0}}\sqrt{2gH_0}=\varphi_0\sqrt{2gH_0} \tag{4-46}$$

$\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{\alpha_c+\zeta_0}}$称为孔口出流的流速系数。

通过孔口的流量为收缩断面的流速v_c与收缩断面面积A_c的乘积。由于A_c是未知量，可令$A_c=\varepsilon A_0$，A_0为孔口面积，ε为孔口的收缩系数。

$$Q=v_cA_c=\varepsilon A_0\varphi_0\sqrt{2gH_0}$$

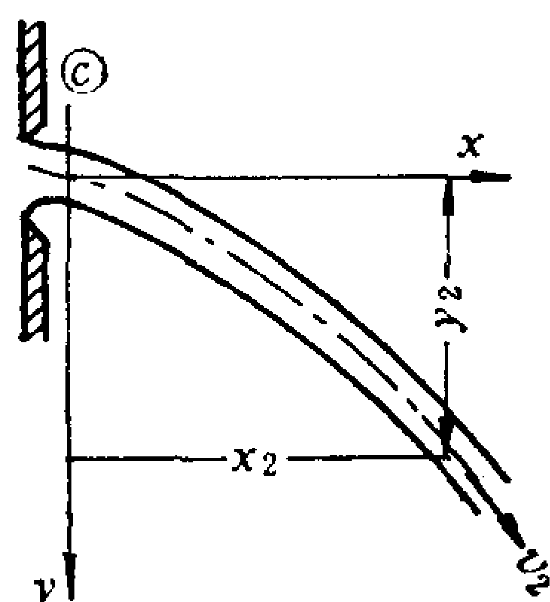
令$\mu_0=\varphi_0\varepsilon$，$\mu_0$为孔口的流量系数。则

$$Q=\mu_0A_0\sqrt{2gH_0} \tag{4-47}$$

这就是计算孔口过流能力的公式。μ_0与孔口的形状、孔口距边壁的距离及孔口边缘的情况有关。如孔口是圆形或方形的，离边壁的距离大于孔口直径（或孔口边长）的3倍，并具有尖锐的边缘，这种孔口称为完善收缩的薄壁孔口，其阻力系数、流速系数、收缩系数和流量系数可分别采用下值：$\zeta_0=0.06$；$\varphi_0=0.97$；$\varepsilon=0.63$；$\mu_0=0.61$。

【例 4-8】 如图4-26所示的孔口出流，如水箱内水面高出孔口中心1 m，水面上的表面压强为4905N/m²，孔口直径为4cm，收缩断面处为大气压，求孔口的流量。如水股射出

后在铅垂方向下落1.6m（见本例图），求该处水股的流速及水股在水平方向射出的距离（空气阻力不计）。



例 4-8图

【解】 1）求流量

已知$H=1$ m，$\frac{p_1}{\gamma}=\frac{4905}{9.81\times1000}=0.5$m，$\frac{p_c}{\gamma}=0$，$v_1\approx0$

故 $H_0=1+0.5+0+0=1.5$m

$$Q=0.61\frac{\pi\times0.04^2}{4}\sqrt{2\times9.81\times1.5}=0.00416\text{m}^3/s=4.16\text{ L}/s$$

2）求水股下落1.6m处的流速先求收缩断面上的流速

$$v_c=0.97\times\sqrt{2\times9.81\times1.5}=5.26\text{m}/s$$

取收缩断面©及欲求其流速的水股断面②列能量方程，以通过②断面的水平面为基准面

$$y_2+\frac{v_c^2}{2g}=0+\frac{v_2^2}{2g}$$

$$\therefore\quad v_2=\sqrt{2gy_2+v_c^2}=\sqrt{2\times9.81\times1.6+5.26^2}=7.69\text{m}/s$$

射流在大气中流动，沿程各断面的压强皆为大气压，故其压能沿程不变。随着断面位置不断下降，位能不断转化为动能，所以流速不断增大。

3）求②断面到孔口收缩断面的水平距离

收缩断面上流速沿水平方向，它在铅垂方向没有分量。而质点的加速度只有铅垂方向的重力加速度，因此质点的轨迹方程为

$$x=v_ct$$

$$y=\frac{1}{2}gt^2$$

消去t，得

$$x=v_c\sqrt{\frac{2y}{g}}$$

将已知数代入，得

$$x_2=5.26\sqrt{\frac{2\times1.6}{9.81}}=3.00\text{m}$$

四、圆柱形外管嘴出流

在孔口外侧接一段长为3～4倍孔口直径的短管，液体经短管流出，这就是管嘴出流。和孔口出流一样，液流因惯性作用，不能突然改变流向，在进入管嘴不远处形成收缩断面，随后再扩大到整个管嘴。在收缩断面周围出现旋涡区，如图4-27所示。

如同分析孔口出流那样，取上游①断面和收缩断面©列能量方程，可得与（4-46）式相同的计算式

$$v_c=\varphi_0\sqrt{2gH_0'} \qquad (4\text{-}48)$$

式中φ_0与H_0'的计算式也和孔口出流相同，即

$$\varphi_0=\frac{1}{\sqrt{\alpha_c+\zeta_0}}$$

$$H_0'=H+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1v_1^2}{2g}-\frac{p_c}{\gamma}$$

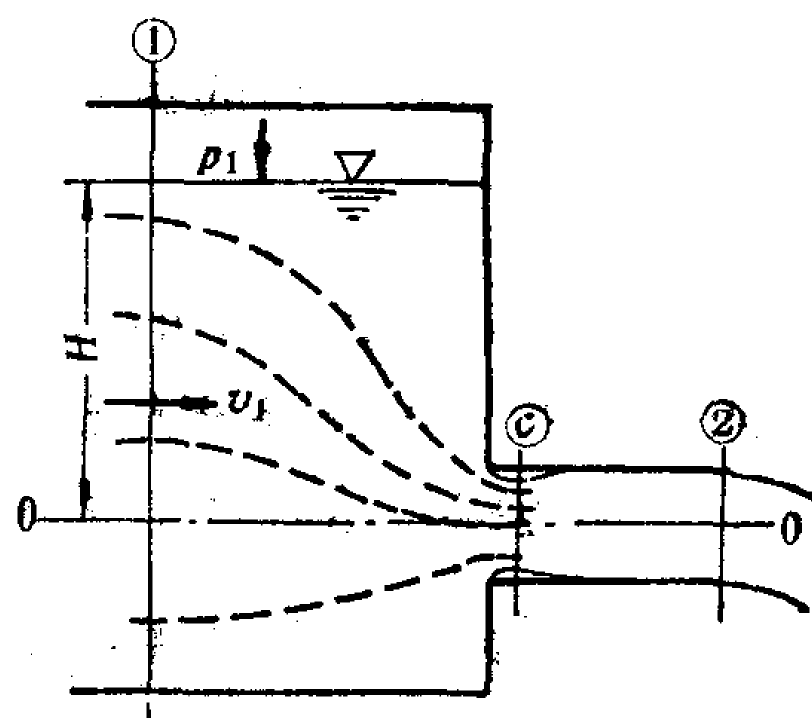


图 4-27 管嘴出流

由于①至©断面的流动情况与孔口出流完全一样，所以这里的ζ_0和φ_0就是孔口出流的阻力系数和流速系数。但两者的作用水头是不同的。如孔口出流如图4-26所示，收缩断面处压强为大气压，即$\frac{p_c}{\gamma}=0$。而管嘴出流中，出口断面②处为大气压，$\frac{p_c}{\gamma}\neq 0$。取©断面和②断面列能量方程，可知

$$\frac{p_c}{\gamma}=\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}-\frac{\alpha_c v_c^2}{2g}+h_{wc-2}$$

式中$\frac{p_2}{\gamma}=0$，$\frac{\alpha_c v_c^2}{2g}>\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$，而©至②断面的水头损失 h_{wc-2} 因管嘴很短，其值很小，故$\frac{p_c}{\gamma}<0$。这就是说，当其它条件相同时，管嘴出流的作用水头H_0'比孔口出流的大，因而管嘴出流的流量也大于孔口出流。流量增大的原因显然是管嘴收缩断面处出现真空的缘故。

通常p_c不是直接给出的已知值，用（4-48）式计算管嘴出流的流速和流量十分不便。为此改取①断面和②断面列能量方程，可得类似的计算式

$$v_2=\varphi_m\sqrt{2gH_0} \tag{4-49}$$

式中，$\varphi_m=\frac{1}{\sqrt{\alpha_2+\zeta_m}}$，$\zeta_m$为①至②断面的阻力系数；$H_0=H+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}-\frac{p_2}{\gamma}$，如出口处为大气压，$\frac{p_2}{\gamma}=0$。

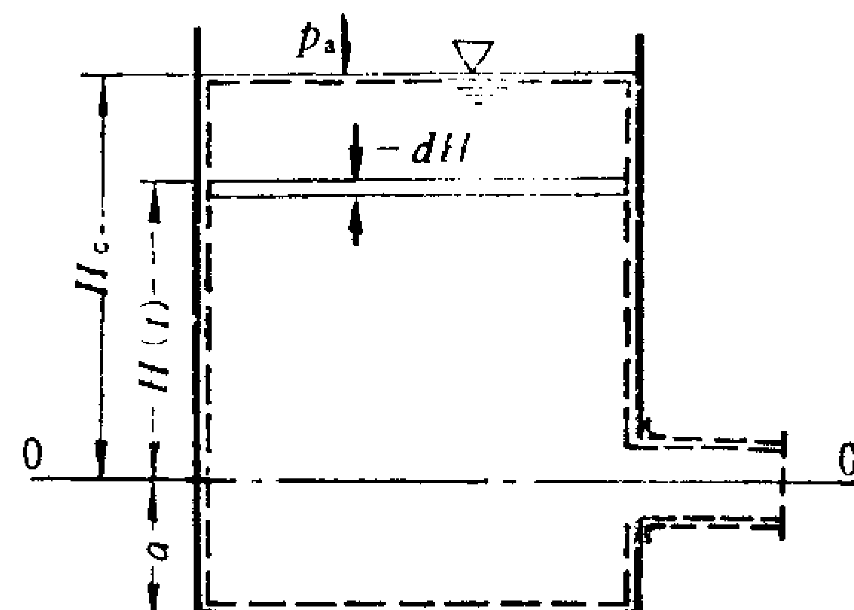
管嘴出流的流量公式为

$$Q=v_2 A=\mu_m A\sqrt{2gH_0} \tag{4-50}$$

μ_m为管嘴的流量系数，A为管嘴的断面面积。管嘴出口处流束没有收缩，故管嘴的流量系数与流速系数相等。

实验表明，如$H_0>10d$，管嘴出流的μ_m随作用水头的变化不大。对于圆柱形外管嘴，可采用$\mu_m=\varphi_m=0.82$。

【例 4-9】 有一圆桶形水箱，底面积$A_T=0.4$ m²，箱内水面高出孔口中心1.5m，自由表面为大气压，孔口直径$d=4$cm，如在孔口外再接一内径也为4cm的管嘴(见本例图)。



例 4-9图

1）试比较两种情况的流速和流量；

2）如为管嘴出流，水箱无水补充，试计算箱中水位放至最低处所需的时间。

【解】 1）比较流速和流量

已知水箱水面及孔口或管嘴出口处皆为大气压，故$p_1=p_c=p_2=0$，由于A_T远大于孔口面积可认为$v_1\approx 0$，因此$H_0=H_c=1.5$m

孔口流速 $v_c=0.97\times\sqrt{2\times 9.81\times 1.5}=5.26$m/s

管嘴流速 $v_2=0.82\times\sqrt{2\times 9.81\times 1.5}=4.45$m/s

$$\frac{v_2}{v_c}=\frac{4.45}{5.26}=0.846$$

孔口流量 $Q_0 = 0.61 \times \frac{\pi \times 0.04^2}{4} \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 1.5} = 0.00416\text{m}^3/\text{s}$

管嘴流量 $Q_m = 0.82 \times \frac{\pi \times 0.04^2}{4} \times \sqrt{2 \times 9.81 \times 1.5} = 0.00559\text{m}^3/\text{s}$

$$\frac{Q_m}{Q_0} = \frac{0.00559}{0.00416} = 1.34$$

其它条件相同时，圆柱形外管嘴的出口流速只有孔口收缩断面处流速的84.6%，但通过的流量，圆柱形外管嘴却比孔口大34%。

2）求水箱水位放至最低处所需时间t_c。

需先求出箱内水位随时间的变化关系$H(t)$，这是非恒定流问题。水位下降是因水体由管嘴流出造成的，可用非恒定流连续性方程（4-28）式分析。

取控制体如图中虚线所示。设t瞬时箱内水位为$H(t)$，由于水位下降很慢，在该瞬时由管嘴流出的流量可按恒定流计算，故（4-28）式中

$$\int_{CS} \rho \vec{u} \cdot \vec{dS} = \mu_m \rho A \sqrt{2gH(t)}$$

$\int_{CV} \rho dV$为控制体内的流体质量，本题中应为$\rho A_T[H(t)+a]$，它仅是时间的函数，所以

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \rho dV = \frac{d}{dt}\{\rho A_T[H(t)+a]\} = \rho A_T \frac{dH(t)}{dt}$$

根据（4-28）式

$$\mu_m \rho A \sqrt{2gH(t)} = -\rho A_T \frac{dH(t)}{dt}$$

分离变量，并积分

$$-\int \frac{dH}{\sqrt{H}} = \int \mu_m \frac{A}{A_T}\sqrt{2g}\, dt$$

$$-2\sqrt{H} = \mu_m \frac{A}{A_T}\sqrt{2g}\, t + c$$

根据初始条件，$t=0$时$H=H_c$，得积分常数 $c=-2\sqrt{H_c}$。水位随时间的变化关系为

$$\sqrt{H_c} - \sqrt{H} = \frac{\mu_m A}{2A_T}\sqrt{2g}\, t$$

将$H_c = 1.5\text{m}$，$H = 0$，$\mu_m = 0.82$，$A = \frac{\pi \times 0.04^2}{4} = 0.001257\text{m}^2$，$A_T = 0.4\text{m}^2$等值代入上式中，即得水箱水位放至最低处所需时间

$$t_c = 215\text{s} = 3'35''$$

五、管道中的气体流动

当气体的流速不太高（小于60m/s），管道不太长，压强变化不太大的条件下，可以把气体当作不可压缩流体看待，因此前面得到的恒定总流的能量方程也适用于满足上述条件的气流。不过，气流中水头的概念不像液体流动时那样直观，故应用时常把它写成下面的形式

$$\gamma z_1 + p_1' + \frac{\rho v_1^2}{2} = \gamma z_2 + p_2' + \frac{\rho v_2^2}{2} + p_{w1-2} \qquad (4\text{-}51)$$

它反映了单位体积气体的各种平均机械能之间的转化关系。式中p_{w1-2}为①、②两断面间的压强损失。

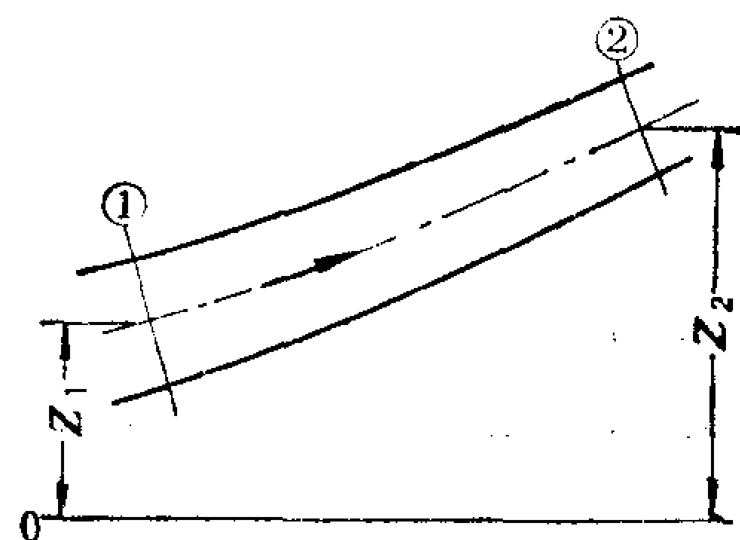


图 4-28 气体总流

必须注意，对气流如用（4-51）式，压强必须采用绝对压强。这是因为管内气体的重度一般与管外空气的重度相差不大，①、②两断面的位能差与该两断面的当地大气压的差值为同一量级，因此必须考虑两断面当地大气压的不同。

对于气流，工程上也习惯采用相对压强。为此需将（4-51）式改写成适用于相对压强的形式。

令$p_1' = p_1 + p_{a1}$，$p_2' = p_2 + p_{a2}$，p_{a1}、p_{a2}分别为①、②两断面的当地大气压。而

$$p_{a1} = p_{a2} + g\rho_a(z_2 - z_1)$$

式中ρ_a为大气的密度。

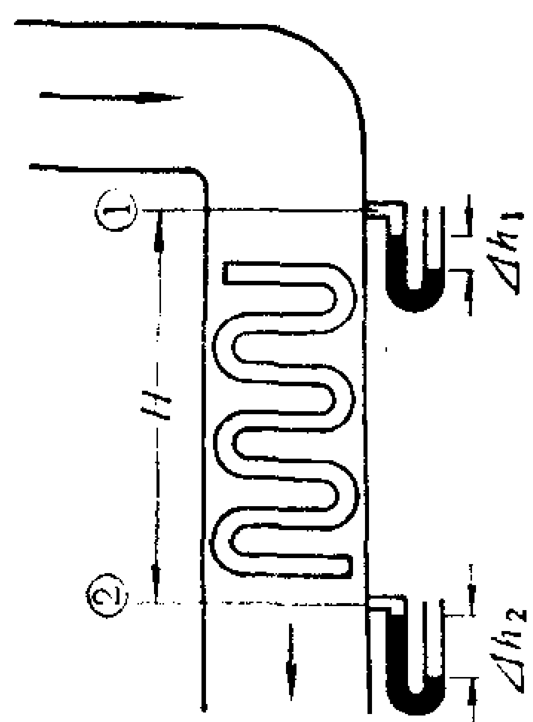
将上述关系代入（4-51）式中，整理后

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + g(\rho_a - \rho)(z_2 - z_1) = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + p_{w1-2} \qquad (4\text{-}52)$$

这就是用相对压强表示的气流能量方程。式中p工程界习惯称它为**静压**，$\frac{\rho v^2}{2}$称为**动压**，两者之和称为**全压**，而$g(\rho_a - \rho)(z_2 - z_1)$称为**位压**。如气流的密度小于大气的密度（$\rho_a - \rho > 0$），在上升气流中（$z_2 - z_1 > 0$），气体受到浮力的推动，增大了前进的能量，位压项为正值；在下降气流中（$z_2 - z_1 < 0$），位压项为负值，浮力作用减小了气流前进的能量(见图4-28)。

如管内气体的密度与大气的密度相差无几，或两断面间的高程相差不大，位压项可不计，气流能量方程可简化为

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + p_{w1-2} \qquad (4\text{-}53)$$



例 4-10图

【例 4-10】 如图所示在锅炉省煤器的进口断面测得负压$\Delta h_1 = 10.5\text{mmH}_2\text{O}$，出口断面负压$\Delta h_2 = 20\text{mmH}_2\text{O}$，两断面的高差$H = 5\text{m}$，烟气的平均密度$\rho_g = 0.6\text{kg/m}^3$，炉外空气的密度$\rho_a = 1.2\text{kg/m}^3$，求烟气流过省煤器的压强损失。

【解】 ①、②两断面的相对压强分别为

$$p_1 = -\frac{\Delta h_1}{1000} g\rho_w = -\frac{10.5}{1000} \times 9.81 \times 1000 = -103\text{N/m}^2$$

$$p_2 = -\frac{20}{1000} \times 9.81 \times 1000 = -196.2\text{N/m}^2$$

可见，要把毫米水柱换算成N/m^2只需乘以9.81。

将已知数代入（4-52）式，因烟气自上流向下，$z_1 > z_2$，式中$z_2 - z_1$为负值

$$-103 + \frac{\rho_g v^2}{2} + 9.81 \times (1.2 - 0.6) \times (-5) = -196.2 + \frac{\rho_g v_2^2}{2} + p_{w1-2}$$

省煤器进、出口断面面积相等，$v_1 = v_2$，式中两断面的动压互相抵消，故烟气流过省煤器的压强损失为

$$p_{w1-2}=63.77\text{N/m}^2$$

如不考虑两断面大气压的不同，即将相对压强直接代入（4-51）式计算

$$(p_{w1-2})_{\rho a=\text{const}}=\rho_g g(z_1-z_2)+p_1-p_2=0.6\times9.81\times5-103-(-196.2)$$
$$=122.63\text{N/m}^2$$

算出的压强损失与考虑了大气压沿高程变化的结果差别很大。因此，在管内气流与管外大气的密度相差较大，以及两断面具有较大高程差的情况下，必须考虑大气压沿高程的变化。

§4-11 不可压缩流体非恒定总流的能量方程

如总流是非恒定的，控制体内流体的总能量随时间而变，能量方程（4-34）式中

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\left(ei+gz+\frac{u^2}{2}\right)\rho dV\neq0$$

而同一瞬时的其它各项则与恒定流相同。因此只要在恒定总流的能量方程中增加一项，用来考虑控制体内流体的能量随时间的变化率，就得到了非恒定总流的能量方程。

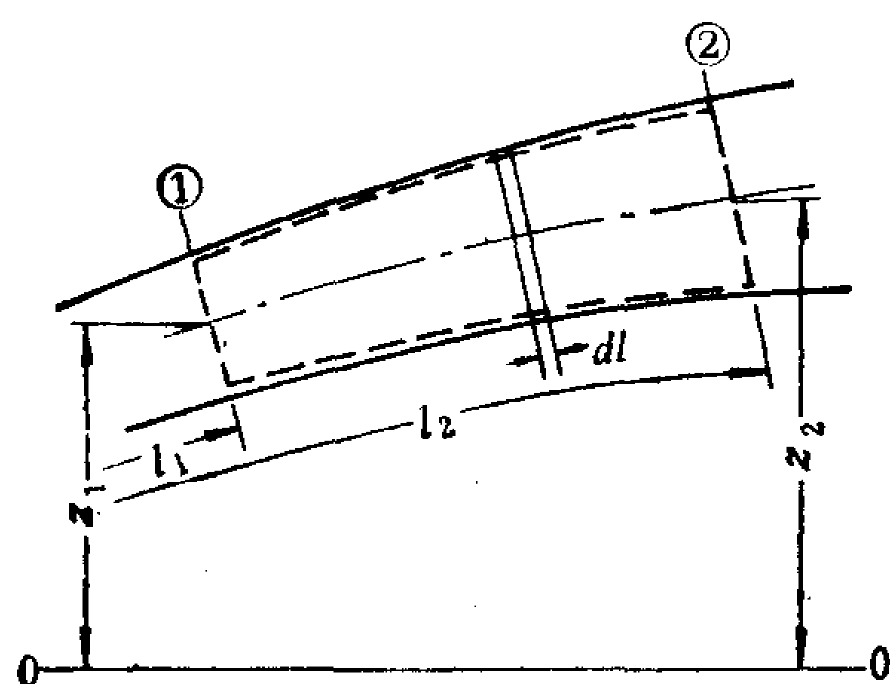


图 4-29 非恒定流

对于理想不可压缩流体的总流，这一项可以简化。图4-29为某一瞬时的非恒定总流，取控制体如图中虚线所示。现分别考虑该控制体内流体的内能，位能和动能随时间的变化率。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\left(ei+gz+\frac{u^2}{2}\right)\rho dV=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}ei\rho dV+\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}gz\rho dV+\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\frac{u^2}{2}\rho dV$$

对于理想不可压缩流体而言，式中ρ和ei皆为定值，既不随空间位置也不随时间而变，因此若总流的侧壁为不随时间而变的固定边界，则控制体内流体的总内能$\int_{CV}ei\rho dV$和总位能$\int_{CV}gZ\rho dV$都不会随时间而变，这两项对时间的偏导数都等于零，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}ei\rho dV=0\qquad\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}gz\rho dV=0$$

控制体内只有动能是随时间变化的。

前已指出，总流一般可简化为一元流动，即认为在同一过流断面上各点的速度皆等于断面平均流速v，但在不同过流断面上它是不等的，也就是说，$v=v(l,\ t)$。同时考虑到一般情况下过流断面的动能修正系数$\alpha=1$，此外，令所取的微元体积$dV=A(l)dl$，$A(l)$为控制体内l处总流的过流断面面积，则控制体内动能的变化率可表示为

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\frac{u^2}{2}\rho dV=\frac{\partial}{\partial t}\int_{l_1}^{l_2}\frac{v^2}{2}\rho Adl=\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial v}{\partial t}\rho vAdl=\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial v}{\partial t}Q_m dl$$

式中Q_m是通过控制体任一过流断面的质量流量。根据连续性方程，如总流侧壁是不动的

固定边界，则同一瞬时通过总流沿程各断面的质量流量皆相等，即Q_m仅是时间 t 的函数，它不随 l 而变。因此对 l 积分时可将它从积分号内提出。由于恒定总流能量方程中的各项是对单位重量流体而言的，因此以重量流量gQ_m除上式，即得单位重量流体的平均动能对时间的变化率

$$\frac{1}{g}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial v}{\partial t}dl$$

这一项通常称为**惯性水头**项。

在理想流体恒定总流的能量方程（4-41）中增加惯性水头项，即得理想不可压缩流体非恒定总流的能量方程

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{1}{g}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial v}{\partial t}dl+z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g} \tag{4-54}$$

如流体是具有粘性的实际流体，还需在上式中增加水头损失项，即

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=\frac{1}{g}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial v}{\partial t}dl+z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+h_w \tag{4-55}$$

在应用不可压缩流体非恒定总流的能量方程时必须注意：1）总流的侧壁应是相对于坐标系不动的固定边界；2）式中各物理量应是同一瞬时的。

【例 4-11】 水位恒定的水箱底部有一长$L=30$m的输水管，水头$H=4$ m，水头损失为管内流速水头的15倍，若管道末端的阀门瞬时开启，求出口流速随时间的变化。

【解】 取水箱水面和管道出口断面列非恒定总流的能量方程。由图可知：$z_1=H$，$z_2=0$，$p_1=p_2=0$，$v_1\approx 0$，故

$$H=\frac{1}{g}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial v}{\partial t}dl+\frac{v_2^2}{2g}+15\frac{v^2}{2g}$$

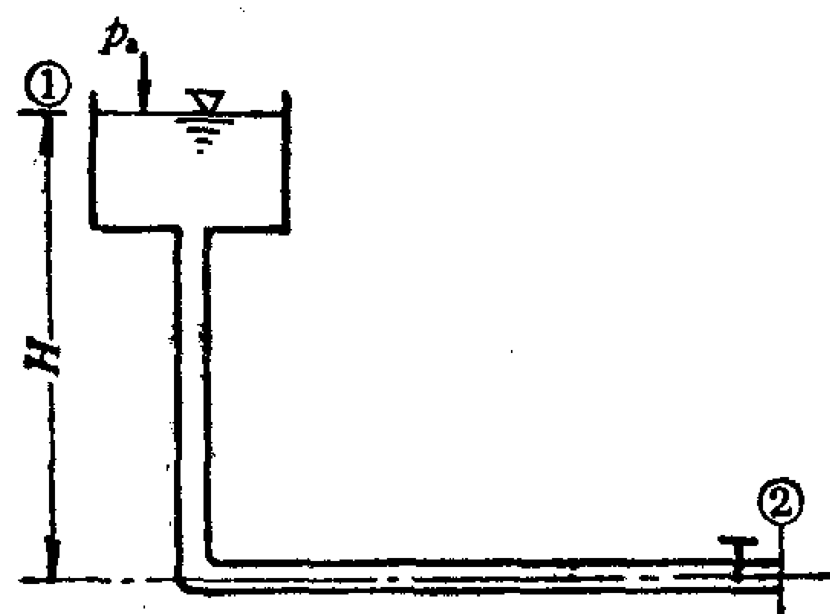
管道是等直径的，出口断面流速v_2与管内流速v 相等，且 v 及其对时间的偏导数$\frac{\partial v}{\partial t}$沿流程不变，都只是时间 t 的函数，故把$\frac{\partial v}{\partial t}$改写成$\frac{dv}{dt}$，并从积分号内提出。如忽略水箱内水流的惯性水头

$$H=\frac{dv}{dt}\frac{L}{g}+16\frac{v^2}{2g}$$

分离变量

$$\frac{dv}{\left(\sqrt{\frac{gH}{8}}\right)^2-v^2}=8\frac{dt}{L}$$

积分此式，积分上下限为：$t=0$时，$v=0$；$t=t$时，$v=v_2(t)$。得



例 4-11 图 1

$$\ln\frac{\sqrt{\frac{gH}{8}}-v_2}{\sqrt{\frac{gH}{8}}+v_2}=-16\sqrt{\frac{gH}{8}}\frac{t}{L}$$

将已知数代入

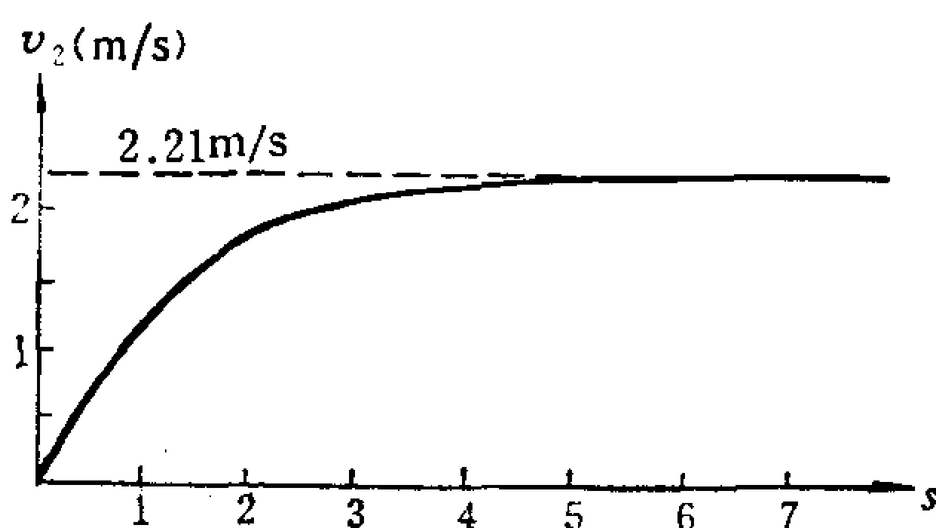
$$\ln\frac{2.21-v_2}{2.21+v_2}=-1.179t \quad 或 \quad \frac{2.21-v_2}{2.21+v_2}=e^{-1.179t}$$

$$\therefore \quad v_2=2.21\frac{e^{1.179t}-1}{e^{1.179t}+1}$$

算出第1至5秒的各v_2值如下：

t	s	1	2	3	4	5
v_2	m/s	1.17	1.83	2.08	2.17	2.20

如$t=\infty$，$v_2=2.21\text{m/s}$。可见至第5秒时，流速已很接近其稳定值。如用图表示$v_2(t)$，则为



例 4-11 图 2

§ 4-12 积分形式的动量方程和动量矩方程

一、动量方程

将动量定理应用于流体的系统上，即可得流体的动量方程。动量定理可表达如下：物体的动量$m\vec{U}$对时间的变化率等于作用于该物体上的所有外力的合力$\Sigma\vec{F}$，即

$$\frac{D}{Dt}\left(m\vec{U}\right)=\Sigma\vec{F}$$

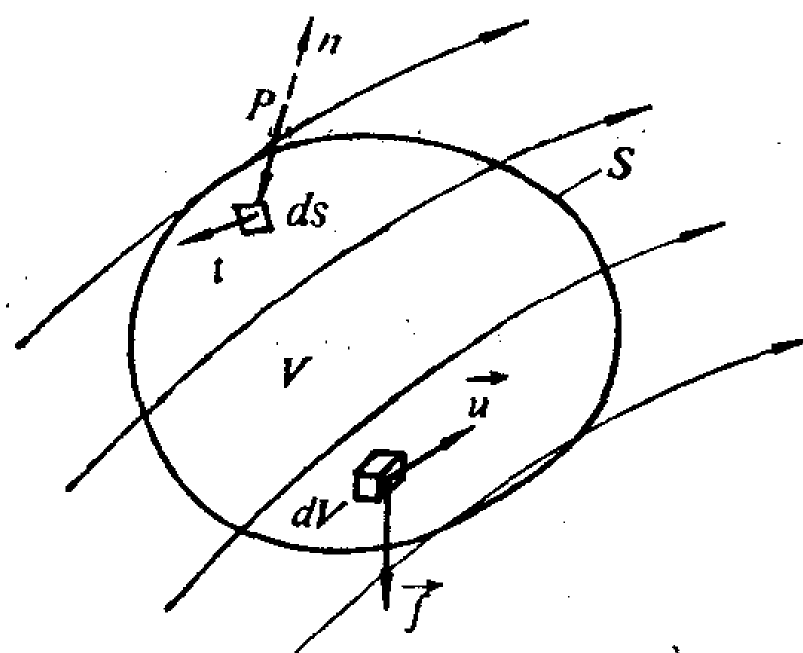


图 4-30 连续介质中的系统

对于流体的某一系统V（如图4-30），则有

$$\frac{D}{Dt}\left(m\vec{U}\right)=\frac{D}{Dt}\int_V\rho\vec{u}\,dV=\Sigma\vec{F}$$

利用输运公式(4-24)，将动量的系统导数转换成以控制体为对象的欧拉形式。单位质量流体的动量就是$\vec{u}$，以$\vec{u}$取代式中的ϕ

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\vec{u}\,dV+\int_{CS}\rho\vec{u}(\vec{u}\cdot d\vec{S})=\Sigma\vec{F} \tag{4-56}$$

这就是欧拉型的动量方程，可叙述如下：作用在控制体内流体上的外力的合力，等于单位时间控制体内流体动量的增量与通过控制面净流出的（流出与流进的差值）动量之和。

对于恒定流，上式等号左侧第一项为零

$$\int_{CS}\rho\vec{u}(\vec{u}\cdot d\vec{S})=\Sigma\vec{F} \tag{4-57}$$

对于总流，此式还可以进一步简化为代数方程，便于工程应用。在总流各自满足缓变流动的区段取过流断面①、②，面积分别为A_1、A_2（见图4-31）。以该两断面和它们之间的总流侧壁组成的封闭表面为控制面。由于流体仅从断面②流出，从断面①流入，侧壁上没有流体通过。同时在断面②上$\vec{u}$与$d\vec{S}$方向一致，故$(\vec{u}\cdot d\vec{S})_2=u_2dA_2$；在断面①上$\vec{u}$与$d\vec{S}$指向相反，$(\vec{u}\cdot d\vec{S})_1=-u_1dA_1$。于是（4-57）式成为

$$\int_{A_2}\rho_2\vec{u}_2u_2dA_2-\int_{A_1}\rho_1\vec{u}_1u_1dA_1=\Sigma\vec{F} \qquad (4\text{-}58)$$

上式等号左侧两项分别为单位时间通过断面②、①的流体动量。为使总流问题能按一元流动处理，现以平均流速$\vec{v}$代替点流速$\vec{u}$。如按平均流速计算单位时间通过过流断面A的动量，则为$\rho vA\vec{v}$。和计算动能的情况类似，用断面平均流速计算的动量与通过的实际动量不完全相等，为此引进一个动量修正系数α_0加以修正。

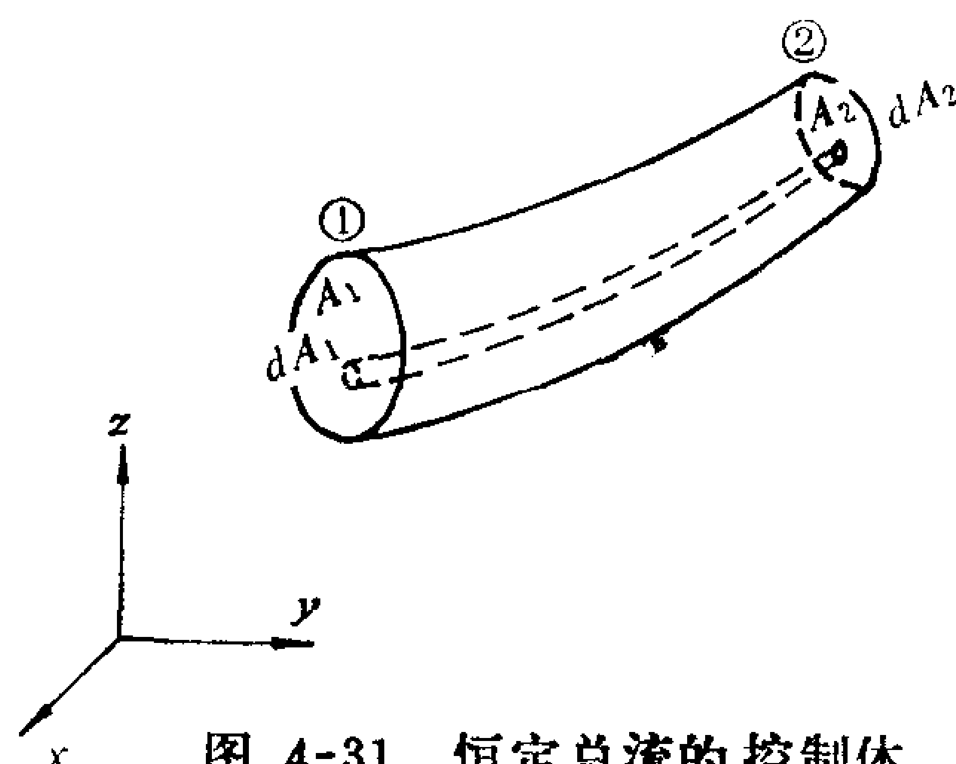


图 4-31　恒定总流的控制体

$$\int_A\rho\vec{u}udA=\alpha_0\rho vA\vec{v}$$

总流同一过流断面上的ρ一般认为是相等的，故

$$\alpha_0=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{\vec{u}}{\vec{v}}\right)\left(\frac{u}{v}\right)dA$$

由于断面选在缓变流段处，A上各点的速度$\vec{u}$近似平行，且与平均流速$\vec{v}$为同一指向，因而该两矢量的比值$\frac{\vec{u}}{\vec{v}}$即等于其模的比值$\frac{u}{v}$。

$$\alpha_0=\frac{1}{A}\int_A\left(\frac{u}{v}\right)^2dA \qquad (4\text{-}59)$$

动量修正系数的意义显然是单位时间通过过流断面的实际动量与按平均流速计算的动量的比值。α_0一定大于1。它的值与断面上流速分布的不均匀程度有关，流速分布越不均匀❶，α_0值越大。但在管道和明渠流动中，除个别流速分布极不均匀的过流断面外，α_0值约在1.03到1.07之间。在通常的计算中可认为$\alpha_0=1.0$。

有了系数α_0就可以用平均流速计算通过过流断面的动量。再令$v_2A_2=Q_2$，$v_1A_1=Q_1$，则（4-58）式可写成

$$\alpha_{02}\rho_2Q_2\vec{v}_2-\alpha_{01}\rho_1Q_1\vec{v}_1=\Sigma\vec{F} \qquad (4\text{-}60)$$

它在三个坐标轴的投影式为

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{02}\rho_2Q_2v_{2x}-\alpha_{01}\rho_1Q_1v_{1x}&=\Sigma F_x\\ \alpha_{02}\rho_2Q_2v_{2y}-\alpha_{01}\rho_1Q_1v_{1y}&=\Sigma F_y\\ \alpha_{02}\rho_2Q_2v_{2z}-\alpha_{01}\rho_1Q_1v_{1z}&=\Sigma F_z\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}61)$$

---

❶ 在（4-59）式中令$u=v+\Delta u$

$$\alpha_0=\frac{1}{A}\int_A\frac{(v+\Delta u)^2}{v^2}dA=\frac{1}{A}\left[\int_A dA+\frac{2}{v}\int_A\Delta u\,dA+\frac{1}{v^2}\int_A\Delta u^2dA\right]$$

在讨论动能修正系数α时已指出，根据断面平均流速定义$\int_A\Delta u\,dA=0$，故$\alpha_0=1+\frac{1}{Av^2}\int_A\Delta u^2dA$因$\Delta u^2$恒为正值，故$\alpha$一定大于1。断面上流速分布越不均匀，$\Delta u$越大，因而$\alpha_0$也越大。

（4-60）或（4-61）式就是恒定总流的动量方程，它表明作用于控制体内流体上的外力仅与过流断面上的流动参数有关，而与控制体内部流体的流动情况无关，这就大大便利了动量方程的实际应用。动量方程常用来求流体和固体之间的作用力。

二、动量矩方程

在推导动量方程的过程中，如以力和动量对某O点的矩来代替力和动量，则可得下列形式的动量矩方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\vec{r}\times\vec{u}\,dV+\int_{CS}(\rho\vec{r}\times\vec{u})(\vec{u}\cdot d\vec{S})=\Sigma(\vec{r}\times\vec{F}) \tag{4-62}$$

式中$\vec{r}$为矩心O点到各力或动量作用点的矢径。$\vec{r}\times\vec{F}$是个矢量，它垂直于$\vec{r}$和$\vec{F}$所在的平面，指向由右手定则确定。它的绝对值为$Fr\sin\theta$，故为F对O点的力矩（如图4-32）。等式左侧第一项为单位时间控制体内动量矩的增量，第二项为单位时间通过控制面净流出控制体的动量矩。

在分析转动式流体机械时，动量矩方程是很有用的。

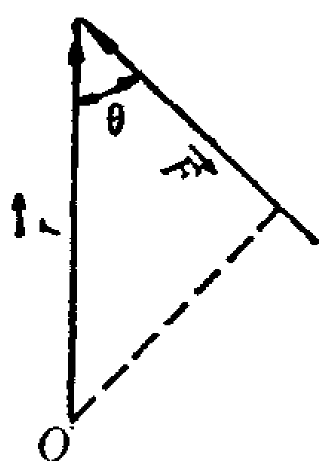


图 4-32 $\vec{F}$对O点的力矩

§ 4-13 动量方程和动量矩方程的应用

动量方程和动量矩方程都是针对通过控制体的流体导出的，因此应用这两个方程时第一步是正确选取控制体。选取控制体应注意的问题是：1）列出的方程应含有所要求的未知量，因此如要求的是流体的作用力，控制体应正好包括需要确定的流体作用力的边界。2）有流体通过的控制面尽量选在未知量最少的地方，没有流体通过的控制面一般来说就选在流体与固体（或液体与气体）接触的边界面上。如边界面对流体的作用力在列出的方程中不是以已知量出现，没有流体通过的控制面可以任意选取，但须将所讨论的流段完全包括在内。3）如用总流的动量方程，有流体通过的控制面应取缓变流段内的过流断面，以便用断面平均流速计算过流断面的动量。

动量方程是一个矢量方程，式中的力和流速都是矢量，动量也是矢量。分析问题时要先标出流速和作用力的方向，然后以分析简便为原则选定坐标轴方向。在应用总流动量方程的投影式（4-61）时，应特别注意各项的正负号。可规定与坐标轴方向相同的分量取正号，反之取负号。对于待求的边界面作用于流体的力，可先假定一个方向，如解出的结果为正值，说明假定的方向正确；如为负值，则作用力的方向与假定的方向相反。

方程中的$\Sigma\vec{F}$为作用在控制体内流体上的所有外力，既有表面力，也有质量力。表面力中包括垂直于控制面的压力和平行于控制面的切力。列方程时应注意不要遗漏。由于整个控制面一般都直接或间接地处于大气压的作用下，计算作用于控制面上的压力时一般宜采用相对压强。

下面对动量和动量矩方程在不同情况的应用举例，还有些应注意的问题将在例中做补充说明。

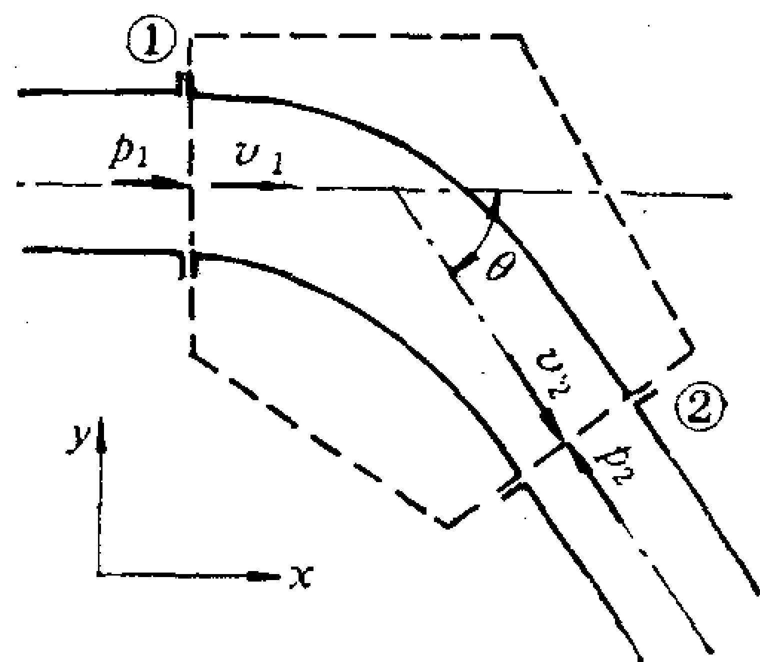
一、动量方程和动量矩方程在静止控制体上的应用

积分形式的动量方程和动量矩方程是在牛顿运动定律的基础上导出的，而牛顿定律仅适用于惯性坐标系。因此，对于在惯性坐标系中处于静止的控制体，可直接利用上述方程

求解。

【例 4-12】 输水管道的变径水平弯管，转角 $\theta = 60°$，直径由$d_1 = 200\text{mm}$变为$d_2 = 150\text{mm}$。已知弯管前后两断面的压强分别为$p_1 = 18\text{kN/m}^2$，$p_2 = 6\text{kN/m}^2$，通过的流量$Q = 0.1\text{m}^3/\text{s}$，求水流对弯管的作用力。

【解】 这是恒定总流的问题，可以用（4-61）式求解。首先考虑如何选取控制体。取正好包括整个弯管的过流断面①、②为有流体通过的控制面，而没有流体通过的边界对水流的作用力在列出的方程中是待求的量，故控制面的其余部分可任意选取。今取整个控制面如本例图中虚线所示。



例 4-12图

第二步是确定坐标系。令x轴与v_1方向一致，y轴方向如图所示。在把力和速度等矢量投影到坐标轴上时，如采用下述方法，正负号就不容易出错：某矢量在x轴（或y轴）上的投影等于矢量的绝对值乘以该矢量与x轴（或y轴）夹角（矢量沿顺时针方向转至坐标轴方向的角）的余弦。

设R_x和R_y分别为弯管对水流的作用力在x、y方向的分量，假设它们都与坐标轴方向一致，则作用在控制体内流体上的所有外力分量为

$$\Sigma F_x = P_1\cos 0° + P_2\cos(180° - \theta) + R_x = P_1 - P_2\cos 60° + R_x$$

$$\Sigma F_y = P_2\cos(90° - \theta) + R_y = P_2\sin 60° + R_y$$

根据动量方程，作用力的合力等于单位时间净流出控制体的动量，故

$$P_1 + P_2\cos 60° + R_x = \rho Q[\alpha_{02}v_2\cos(360° - \theta) - \alpha_{01}v_1\cos 0°]$$
$$= \rho Q[\alpha_{02}v_2\cos 60° - \alpha_{01}v_1]$$

$$P_2\sin\theta - R_y = \rho Q[\alpha_{02}v_2\cos(270° - \theta) - \alpha_{01}v_1\cos 270°]$$
$$= \rho Q[-\alpha_{02}v_2\sin 60° - 0]$$

设$\alpha_{01} = \alpha_{02} = 1$，而

$$P_1 = p_1\frac{\pi d_1^2}{4} = 18\frac{\pi\times 0.2^2}{4} = 0.565\text{kN}$$

$$P_2 = p_2\frac{\pi d_2^2}{4} = 6\frac{\pi\times 0.15^2}{4} = 0.106\text{kN}$$

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4\times 0.1}{\pi\times 0.2^2} = 3.18\text{m/s}$$

$$v_2 = \frac{4Q}{\pi d_2^2} = \frac{4\times 0.1}{\pi\times 0.15^2} = 5.66\text{m/s}$$

将已知量代入，得

$$R_x = -0.80\text{kN} \qquad R_y = -0.58\text{kN}$$

故水流对弯管的作用力为

$$F_x = -R_x = 0.80\text{kN} \qquad F_y = -R_y = 0.58\text{kN}$$

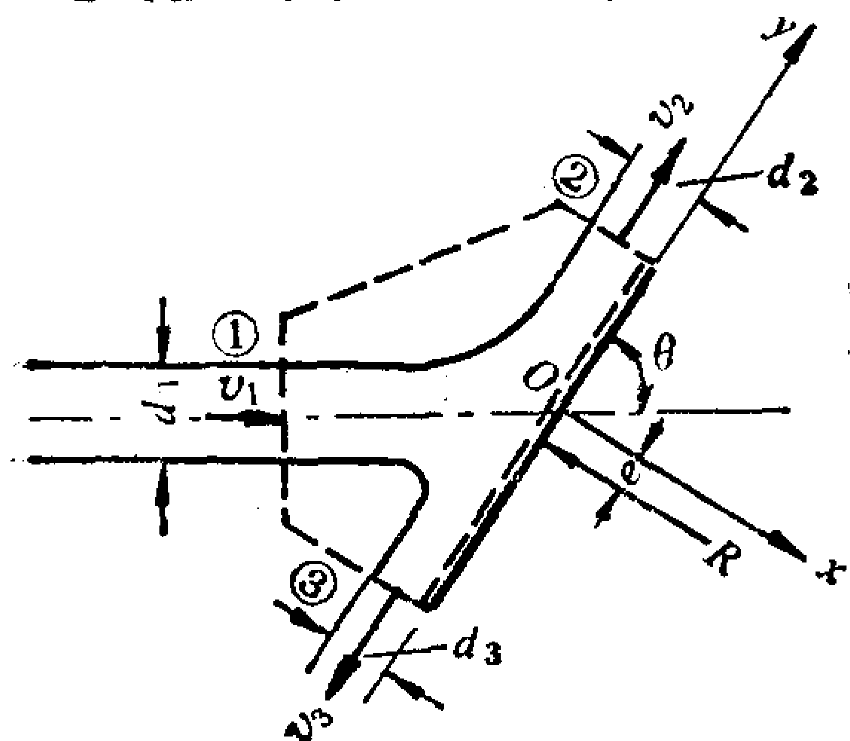
【例 4-13】 有一平面水射流，冲击在与射流轴线成θ角的光滑平板上，已知其单宽流量为Q_1，流速为v_1，如射流平面为水平面，不计水流在平板上的阻力，试求：

1）流量Q_1和Q_2；

2）水流对平板的作用力F；

3）F在平板上的作用点E的位置。

【解】 取控制体如本例图中的虚线所示。除与平板接触的面外，控制面上各点的压强皆可认为等于大气压（在过流断面②和③上，压强实际上是不均匀分布的，如水股厚度d_2、d_3不大，可近似认为等于大气压）。不计平板与水流之间的摩擦阻力，平板对水流的作用力R必然垂直于平板。



例 4-13图

由于过流断面①、②、③位于同一水平面上，其压强相等，摩擦阻力又忽略不计，根据伯诺里方程，可得$v_2=v_3=v_1$。

1）求流量Q_2和Q_3

选坐标系xOy如图所示。列y方向的恒定总流动量方程，设各断面的$\alpha_0=1$

$$\rho Q_2 v_2 \cos 0° + \rho Q_3 v_3 \cos 180° - \rho Q_1 v_1 \cos(360° - \theta) = 0$$

简化后为

$$Q_2 - Q_3 = Q_1 \cos\theta$$

再列连续性方程

$$Q_2 + Q_3 = Q_1$$

解这两个方程，得

$$Q_2 = \frac{Q_1}{2}(1+\cos\theta) \qquad Q_3 = \frac{Q_1}{2}(1-\cos\theta) \tag{a}$$

2）求F

列x方向的总流动量方程

$$\rho Q_2 v_2 \cos 90° + \rho Q_3 v_3 \cos 270° - \rho Q_1 v_1 \cos(90° - \theta) = R$$

射流对平板的作用力为 $F = -R = \rho Q_1 v_1 \sin\theta$

3）求E点的位置

对控制体内的流体列动量矩方程，因流动是恒定的，故（4-62）式简化为

$$\int_{CS} (\rho \vec{r} \times \vec{u})(\vec{u} \cdot d\vec{S}) = \Sigma(\vec{r} \times \vec{F})$$

上式左侧为单位时间净流出控制体的动量矩，在本题中如对射流轴线与平板的交点O取矩，则由断面②流出的动量矩为$-\rho Q_2 v_1 \frac{d_2}{2}$，由断面③流出的动量矩为$+\rho Q_3 v_1 \frac{d_3}{2}$。由断面①流入的动量因其轴线通过矩心$O$，其动量矩为零。故

$$\int_{CS} (\rho \vec{r} \times \vec{u})(\vec{u} \cdot d\vec{S}) = \left[-\rho Q_2 v_1 \frac{d_2}{2} + \rho Q_3 v_1 \frac{d_3}{2}\right]\vec{k} \tag{b}$$

作用在控制体内流体上的外力只有平板对水流的反力R

$$\Sigma(\vec{r} \times \vec{F}) = -e\ |R|\ \vec{k} = -\rho Q_1 v_1 \sin\theta e\ \vec{k} \tag{c}$$

令（b）等于（c），简化后

$$e = \frac{Q_2 d_2 - Q_3 d_3}{2Q_1 \sin\theta} \tag{d}$$

由于 $$Q_1=v_1d_1,\ Q_2=v_1d_2,\ Q_3=v_1d_3 \tag{e}$$

代入（a）式，有

$$d_2=\frac{d_1}{2}(1+\cos\theta) \qquad d_3=\frac{d_1}{2}(1-\cos\theta) \tag{f}$$

将（e）、（f）式代入（d）式，简化后为

$$e=\frac{d_1}{2}\cot\theta$$

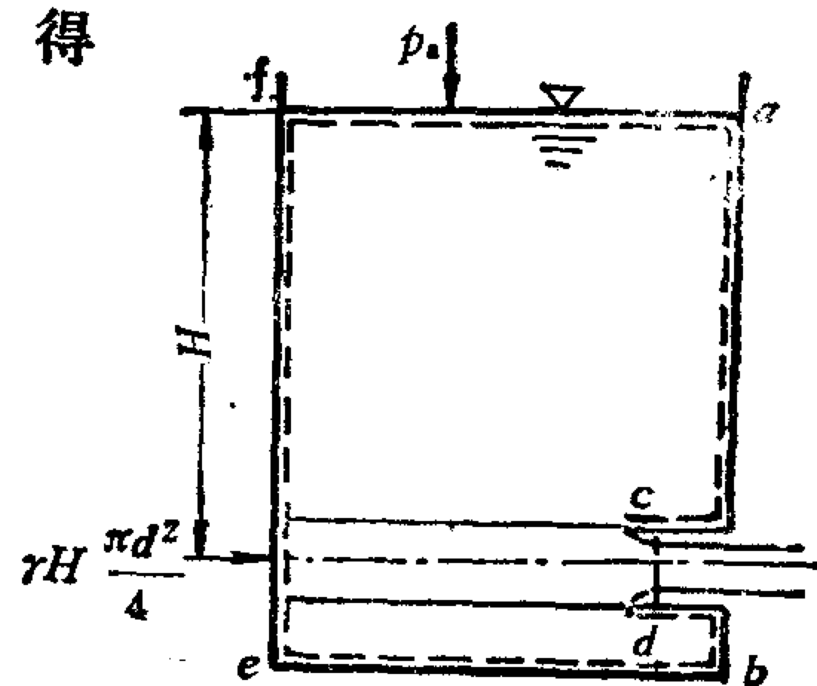
【例 4-14】 在水箱壁开一圆孔，内侧装有一个长约一倍直径的薄壁短管，由于短管很短，进入短管的水股收缩后来不及扩大到整个断面即由短管流出。这种短管称为包达管嘴。今测得包达管嘴的收缩系数$\varepsilon=0.57$，求：

1）该管嘴的流速系数φ；

2）如$H=3$m，短管直径$d=50$mm，求流出的速度v和流量Q。

【解】 1）求φ

水流不是满管流出，包达管嘴实际上是一个特殊的孔口，故本题利用孔口出流公式是可以的。如能根据已知数求得孔口收缩断面上的流速v，再利用孔口出流公式$v=\varphi\times\sqrt{2gH}$，即可求得$\varphi$。怎样才能求得$v$呢？利用总流动量方程可以解决这个问题。先选取控制面。有水体通过的控制面选在收缩断面（即图中的cd断面）上，没有水体通过的控制面选在水箱壁及管壁与水体的接触面上，以及箱内水体的自由表面上。整个控制体如图中虚线所示。在水箱侧壁ab和ef上，除包达管嘴占有的一小块面积外，流速都接近于零，因而各点压强可认为按静水压强分布。亦即在ab和ef的对应点上，压强的大小相等，方向相反，相互抵消。只有在对应于管嘴所占有的面积上，ef壁的作用力为$\gamma H\frac{\pi d^2}{4}$，而控制面上的作用力为零。因此，对上述控制体列动量方程，得



例 4-14图

$$\gamma H\frac{\pi d^2}{4}=\rho Q(\alpha_{02}v-0)$$

令$\alpha_{02}=1$，$Q=v\frac{\pi d^2}{4}\varepsilon$，代入上述，简化后

$$v=\sqrt{\frac{gH}{\varepsilon}}$$

再将孔口出流公式$v=\varphi\sqrt{2gH}$代入，即得

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}$$

$$\therefore\quad \varphi=\frac{1}{\sqrt{2\times0.57}}=0.936$$

2）求v和Q

$$v=\varphi\sqrt{2gH}=0.936\sqrt{2\times9.81\times3}=7.18\text{m/s}$$

$$Q=\varepsilon\varphi\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gH}=0.57\times0.936\ \frac{\pi\times0.05^2}{4}\sqrt{2\times9.81\times3}=0.008\text{m}^3/\text{s}$$

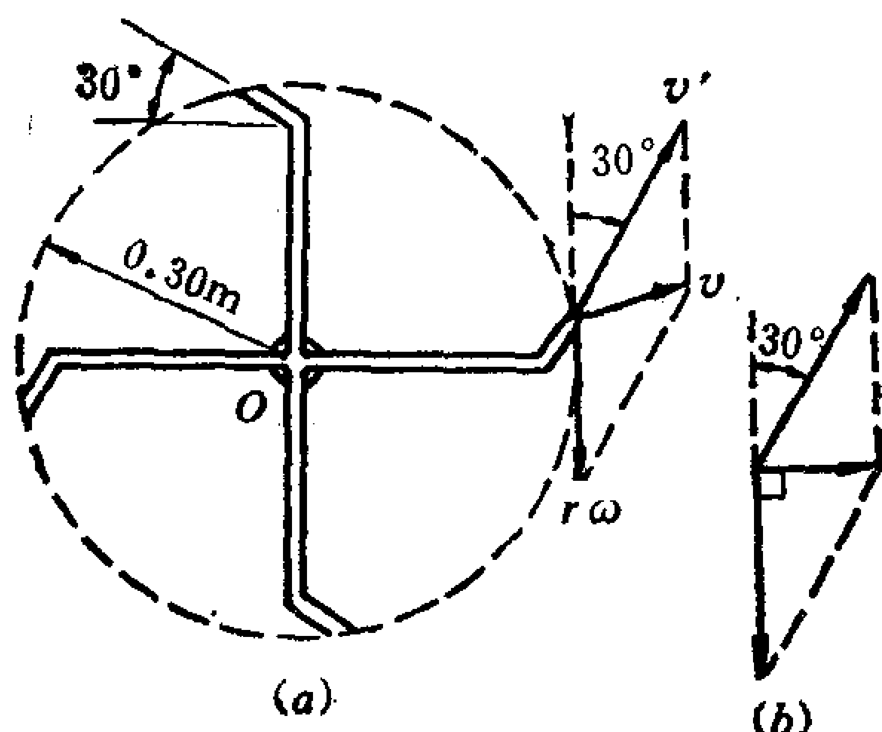
【例 4-15】 水沿轴向由旋转轴心进入一个具有四条转臂的洒水器，再由喷嘴直径为1cm的转臂出口流出，转臂长0.30m，出口射流与旋转圆周切线的夹角为30°，如进入洒

水器的流量为2.5L/s，不计机械摩擦，求：

1）不让臂转动需施加的力矩；

2）转臂旋转的最大转速；

3）转速为120r/min（每分钟的旋转周数）时的功率。



例 4-15图

【解】 1）求使转臂不动需施加的力矩

转臂不动时，可取喷嘴出口断面的旋转圆周面为控制面，对O点取矩列动量矩方程。由于四条转臂对O点是轴对称置放的，转臂本身及其内水体的重量对O点的矩相互抵消，因此施加在转臂上的力矩应等于由控制体流出的动量矩与流进的动量矩之差。

已知四个喷嘴的总流量$Q=2.5\text{L/s}=0.0025\text{m}^3/\text{s}$，水由喷嘴流出的相对速度$v'$为

$$v'=\frac{1}{4}\frac{4Q}{\pi d^2}=\frac{0.0025}{\pi\times0.001^2}=7.96\text{m/s}$$

当喷嘴不动时，v'就是水由控制体流出的绝对速度，故四个喷嘴流出的动量对O点的矩为$r\rho Qv'\cos30°$，水流进入控制的动量对O点的矩为零，故需施加的力矩T为

$$T=r\rho Qv'\cos30°=0.3\times1000\times0.0025\times7.96\times0.866=5.17\text{N}\cdot\text{m}$$

2）求转臂可达到的最大转速

转臂旋转时，因外力及流进与流出转臂的动量对O点的矩皆不随转臂位置不同而改变，故仍可取1）中不动的控制体列动量矩方程。

由于没有机械摩擦，要使转臂维持等角速度旋转，水流必须没有力矩作用在转臂上，即水由控制体流出的动量矩应等于零。而水是以绝对速度v流出控制体的，因此v只能是径向的。绝对速度v是相对速度v'与牵连速度$v_e=r\omega$的矢量和。如v是径向的，由速度图（b）可知

$$r\omega=v'\cos30°$$

$$\omega=\frac{7.96\cos30°}{0.30}=22.98\text{rad/s}$$

$$n=\frac{60\omega}{2\pi}=\frac{60\times22.98}{2\pi}=219\text{r/min}$$

3）求$n=120\text{r/min}$时的功率

在此转速下喷嘴出口的圆周切线速度为

$$r\omega=r\frac{2\pi n}{60}=0.3\frac{2\times\pi\times120}{60}=3.77\text{m/s}$$

转臂作用于水流上的反力矩T等于净流出控制体的动量对转轴的矩。流入控制体的动量矩为零，流出控制体的动量矩等于绝对速度v在圆周切线方向的分量（$v'\cos30°-r\omega$）与旋转半径r及质量流量ρQ的乘积，即

$$T=r\rho Q(v'\cos30°-r\omega)=0.3\times1000\times0.0025(7.96\times0.866-3.77)$$
$$=2.34\text{N}\cdot\text{m}$$

功率N为

$$N = T\omega = \frac{2.34\times 2\pi\times 120}{60} = 29.41\text{W}$$

二、控制体作匀速直线运动时动量方程的应用

如解题时需要采用作匀速直线运动的控制体，则可以把坐标固结在控制体上，让它随控制体运动。由于作匀速直线运动时坐标系仍为惯性坐标系，故动量方程（4-56）或（4-60）式仍然适用。不过流体是以相对速度流进和流出控制体的，控制体内动量随时间的变化也是对动坐标系的，故式中所有速度都应用相对速度$\vec{u}_r$代替，即

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\vec{u}_r dV + \int_{CS}\rho\vec{u}_r(\vec{u}_r\cdot d\vec{S}) = \Sigma\vec{F} \qquad (4\text{-}63)$$

对于恒定总流，则为

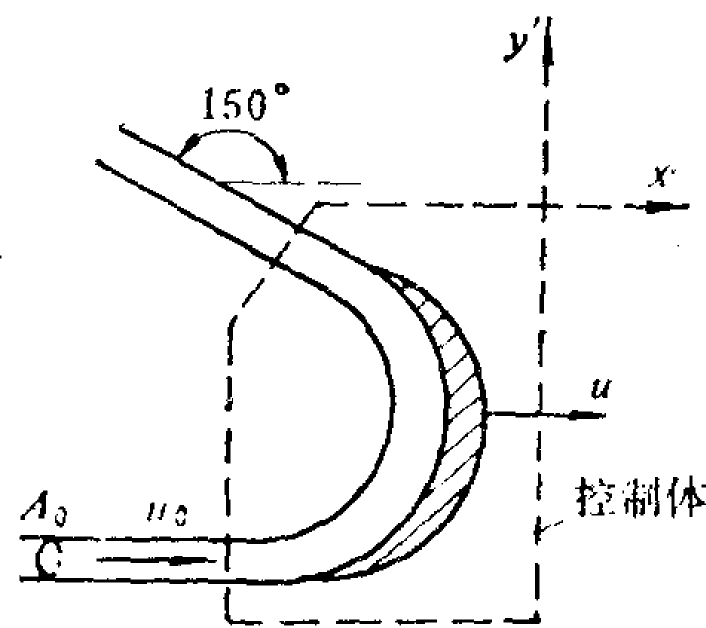
$$\alpha_{02}\rho_2 Q_2\vec{v}_{2r} - \alpha_{01}\rho_1 Q_1\vec{v}_{1r} = \Sigma\vec{F} \qquad (4\text{-}64)$$

Q_1、Q_2分别是流进、流出运动控制体的流量。

【例 4-16】 有一断面面积$A_0 = 0.001\text{m}^2$的水射流，喷射在一弧形叶片上，射流速度$u_0 = 60\text{m/s}$，射流离开叶片的方向比原先的方向偏$\theta = 150°$，叶片以$u = 36\text{m/s}$的速度后退，不计重力及水流阻力，求：

1）射流对叶片的冲击力及叶片输出的功率；

2）如A_0、u_0、Q不变，输出功率最大时的叶片后退速度。



例 4-16 图

【解】 1）求叶片受到的冲击力及其输出功率

取控制体和坐标系如图所示，它们皆以速度u随叶片向右运动。射流流入控制体的速度为$u_r = u_0 - u$，流入控制体的动量为$\rho A_0 u_r^2$。由于水流没有阻力，射流流出控制体的速度仍为$u_0 - u$，只是方向转了150°，而作用在射流上的外力只有叶片对水流的作用力，因此根据恒定总流的动量方程，射流冲击力在坐标方向的分量为

$$F_x = -R_x = -\rho A_0(u_0 - u)^2(\cos\theta - 1) = -1000\times 0.001\times(60-36)^2$$
$$\times(-0.866-1) = 1075\text{N} = 1.075\text{kN}$$
$$F_y = -R_y = -\rho A_0(u_0-u)^2[\cos(\theta - 90°) - 0]$$
$$= -1000\times 0.001\times(60-36)^2[0.5-0] = -288\text{N}$$
$$= -0.288\text{kN}$$

叶片的输出功率等于作用在叶片上的冲击力在叶片运动方向的分量与叶片运动速度的乘积，即

$$N = F_x u = 1.075\times 36 = 38.7\text{kW}$$

2）求输出功率最大时的叶片速度

$$N = F_x u = -\rho A_0(u_0 - u)^2(\cos\theta - 1)u$$

式中ρ、A_0、u_0、θ皆为常数，只有u是变量，令N对u的导数为零，即可求得最大功率时的叶片速度。

$$\frac{dN}{du} = -\rho A_0(\cos\theta - 1)[u_0^2 - 4u_0 u + 3u^2] = 0$$

解方括号内的二次方程，得最大功率时的叶片速度u_*为

$$u_* = \frac{1}{3} u_0$$

最大功率为

$$N_* = -\frac{4}{27} \rho A_0 u_0^3 (\cos\theta - 1)$$

将本题数据代入，得

$$u_* = 20\text{m/s} \qquad N_* = 59.7\text{kW}$$

【例 4-17】 飞机在密度$\rho = 1.2\text{kg/m}^3$的静止空气中飞行，速度为450km/h，飞机上有两个直径为2.3m的螺旋桨，通过螺旋桨的空气总流量为1200m³/s，如视空气为理想流体，求：

1）螺旋桨的推力；

2）螺旋桨所需的理论功率和效率。

例 4-17 图

【解】 1）求推力

螺旋桨的作用是改变通过它的流体的动量，从而产生一个推进力，推动飞机前进，因而螺旋桨的推力可以用动量方程求得。

首先考虑如何选取随螺旋桨一起前进的动控制体。由于螺旋桨的作用，流体在螺旋桨前后一定距离处相对速度是不断增大的。在螺旋桨前相对速度未受影响处取过流断面①及其后相对速度不再改变处取过流断面④作为有流体通过的控制面，以通过螺旋桨的流量正好全部包围在内的流管为没有流体通过的控制面。对这一控制体列动量方程。因控制面上各点的压强皆为大气压，螺旋桨的作用力F是作用于流体上的唯一轴向力，故有

$$F = \rho Q(u_4 - u_1) = (p_3 - p_2)A \qquad (a)$$

式中p_2、p_3为过流断面②、③上的压强，A为这两个过流断面的面积。

令$Q = vA$，v为流体通过过流断面②或③的平均流速。因此（a）式可写成

$$\rho v(u_4 - u_1) = p_3 - p_2 \qquad (b)$$

对断面①、②及断面③、④列伯诺里方程

$$\left.\begin{aligned} p_1 + \frac{1}{2}\rho u_1^2 &= p_2 + \frac{1}{2}\rho v^2 \\ p_3 + \frac{1}{2}\rho v^2 &= p_4 + \frac{1}{2}\rho u_4^2 \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

将（c）式中的p_2和p_3代入（b）式

$$\rho v(u_4 - u_1) = (p_4 - p_1) + \frac{1}{2}\rho(u_4^2 - u_1^2)$$

因$p_1 \approx p_4$，故

$$u_4 = 2v - u_1 \qquad (d)$$

将（d）代入（a），即得气流作用于螺旋桨的总推力

$$F_T = -F = -2\rho Q(v-u_1) \tag{e}$$

式中“-”号表示F_T作用方向与x轴相反。

将本题数值代入

$$u_1 = 450\times\frac{1000}{3600} = 125\text{m/s}$$

$$v = \frac{4\times1200}{\pi\times2.3^2\times2} = 144.4\text{m/s}$$

$$F_T = -2\times1.2\times1200\times(144.4-125) = -55908\text{N} = -55.9\text{kN}$$

2）求理论功率和效率

螺旋桨的推力使飞机产生u_1的速度，螺旋桨的有用功率是螺旋桨的推力与飞行速度的乘积，即

$$有用功率 = Fu_1 = \rho Q(u_4-u_1)u_1 \tag{f}$$

而螺旋桨在单位时间对单位质量流体所作的功是将其动能由$\frac{u_1^2}{2}$增加到$\frac{u_4^2}{2}$，故螺旋桨需要的理论功率是

$$所需功率 = \frac{1}{2}\rho Q(u_4^2-u_1^2) \tag{g}$$

所需功率也等于有用功率与单位时间在艉流中随流体带走的剩余动能（即损失功率）之和

$$\rho Q(u_4-u_1)u_1 + \frac{1}{2}\rho Q(u_4-u_1)^2 = \frac{1}{2}\rho Q(u_4^2-u_1^2)$$

螺旋桨的理论效率η为有用功率与所需功率之比

$$\eta = \frac{2u_1}{u_4+u_1} = \frac{u_1}{v} \tag{h}$$

设$\Delta u = u_4-u_1$，则

$$\eta = \frac{1}{1+\Delta u/2u_1} \tag{i}$$

显然，$\Delta u/u_1$越小，螺旋桨的理论效率越高。

将本题数据代入，得

$$有用功率 = Fu_1 = 55.9\times125 = 6988\text{kW}$$

$$理论效率\eta = \frac{u_1}{v} = \frac{125}{144.4} = 0.866 = 86.6\%$$

$$所需功率 = \frac{Fu_1}{\eta} = \frac{6988}{0.866} = 8069\text{kW}$$

三、控制体作加速直线运动时动量方程的应用

如所取控制体需作变速运动，同样可将动坐标系固结在控制体上，这时的动坐标系为非惯性坐标系，为此需建立适用于非惯性坐标系的动量方程。

根据牛顿第二定律，对于惯性坐标系中的某一系统有

$$\Sigma\vec{F} = \int \vec{a}\rho dV \tag{4-65}$$

如该系统在作任意运动的非惯性坐标系中有相对运动，由理论力学中关于点的加速度合成定理得知，上式中的绝对加速度$\vec{a}$等于牵连加速度$\vec{a}_e$、相对加速度$\vec{a}_r$和哥氏加速度a_k

三者的矢量和，即

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k \tag{4-66}$$

代入（4-65）式中

$$\Sigma\vec{F} = \int_V (\vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_k)\rho dV$$

或

$$\Sigma\vec{F} - \int_V \vec{a}_e\rho dV - \int_V \vec{a}_k\rho dV = \int_V \vec{a}_r dV$$

令 $\Sigma F = \vec{F}_s + \vec{F}_m = \vec{F}_s + \int_V \vec{f}\rho dV$，$\vec{F}_s$和$\vec{F}_m$分别为作用于系统上的表面力和质量力；$-\int_V \vec{a}_e\rho a'V$和$-\int_V \vec{a}_k\rho dV$分别为牵连惯性力和哥氏惯性力；而$\vec{a}_r = -\frac{Du_r}{Dt}$。于是

$$\vec{F}_s + \int_V (\vec{f} - \vec{a}_e - \vec{a}_k)\rho dV = \int_V \frac{D\vec{u}_r}{Dt}\rho dV = \frac{D}{Dt}\int_V \vec{u}_r\rho dV \tag{4-67}$$

由输运公式可得

$$\frac{D}{Dt}\int_V \vec{u}_r\rho dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{u}_r\rho dV = \int_{CS} \rho\vec{u}_r(\vec{u}_r\cdot d\vec{S})$$

由于在推导输运公式时取的控制面与系统的边界面重合，故（4-67）式中的$\vec{F}_s$也就是作用于控制体上的表面力，$\int_V (\vec{f} - \vec{a}_e - \vec{a}_k)\rho dV$也就是作用于控制体上的质量力和惯性力，所以

$$\vec{F}_s + \int_{CV} (\vec{f} - \vec{a}_e - \vec{a}_k)\rho dV = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{u}_r\rho dV + \int_{CS} \rho\vec{u}_r(\vec{u}_r\cdot u\vec{S}) \tag{4-68}$$

这就是非惯性坐标系的动量方程。

如在上式中令 $\Sigma F' = \vec{F}_s + \int_{CV} (\vec{f} + \vec{a}_e - \vec{a}_k)\rho dV$

$$\Sigma F' = \frac{\partial}{\partial t}\int_{CV} \vec{u}_r\rho dV + \int_{CS} \rho\vec{u}_r(\vec{u}_r\cdot d\vec{S}) \tag{4-69}$$

此式与惯性坐标系中的动量方程（4-56）式形式完全相同。因此可以认为，只要把牵连惯性力和哥氏惯性力归并到质量力中，并用相对速度$\vec{u}_r$代替绝对速度$\vec{u}$，（4-56）式就适用于作任意运动的控制体。我们在流体静力学中讨论相对平衡问题时曾把牵连惯性力看成是实际作用于流体质点上的质量力，原因与此类似。

【例 4-18】 密度为ρ的液体，由出口面积为A的喷嘴以速度v射出，冲击到一个尾部具有半圆弧面的小车上，射流转折180°，小车原先静止，其质量为M，如不计空气及车轮的阻力，求：

1）小车运行的加速度与时间的关系；

2）车速达到$U = \frac{v}{2}$时的时间。

【解】 1）求$a(t)$

取动控制体及动坐标系如图中虚线所示。列x'方向的非惯性坐标系动量方程

$$F_{sx}-\int_{CV}(f_x-a_{ex}-a_{kx})\rho dV=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}u_{rx}\rho dV+\int_{CS}\rho u_{rx}(\vec{u}_r\cdot d\vec{S})$$

由于：1.所有控制面上压强皆为大气压，$F_{sx}=0$；

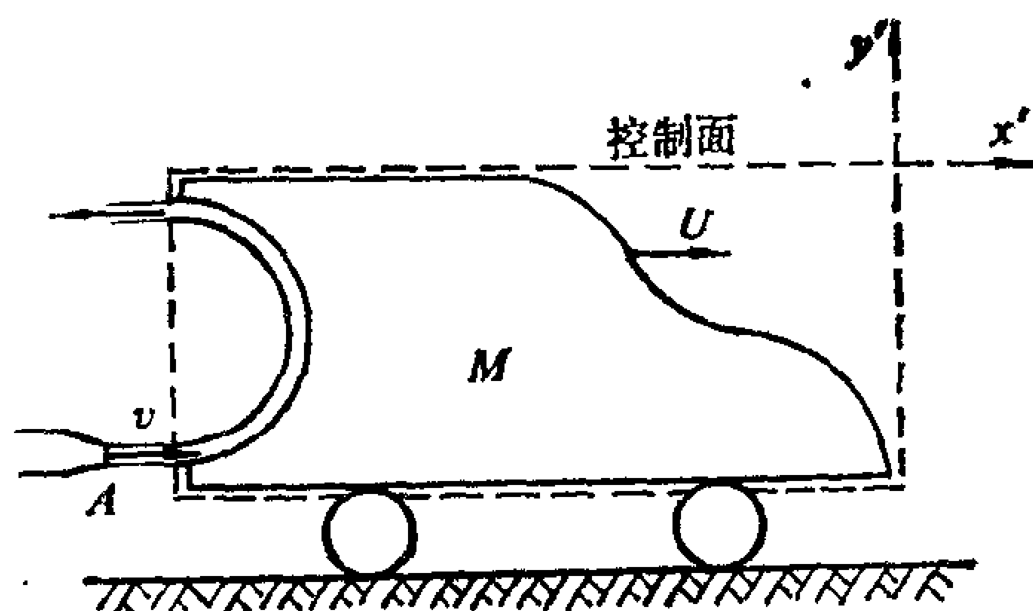
2.重力在x'方向的分量为零，$f_x=0$；

3.动坐标系没有旋转，$a_{kx}=0$；

4.流动是恒定的，小车的质量也不会随时间而变，$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}u_{rx}\rho dV=0$。

故本题中动量方程简化为

$$-\int_{CV}a_{ex}\rho dV=\int_{CS}\rho u_{rx}(\vec{u}_r\cdot d\vec{S}) \qquad (a)$$



例 4-18图

在控制体CV中各点的牵连加速度a_{ex}皆相等，它只是时间的函数，故可从积分号中提出。于是

$$-\int_{CV}a_{ex}\rho dV=a_{ex}\int_{CV}\rho dV=-Ma_{ex}=-Ma \qquad (b)$$

a为小车运行后的加速度，它就是牵连加速度a_{ex}。

$\int_{CS}\rho u_{rx}(\vec{u}_r\cdot d\vec{S})$为净流出动控制体的动量。流入的动量为$\rho(v-U)^2A$，流出的动量为$\rho(v-U)^2A\cos180°$，因此

$$\int_{CS}\rho u_{rx}(\vec{u}_r\cdot d\vec{S})=-2\rho(v-U)^2A \qquad (c)$$

将(b)、(c)代入(a)，得

$$a=\frac{2\rho(v-U)^2A}{M}=\frac{2\rho v^2A}{M}\left(1-\frac{U}{v}\right)^2 \qquad (d)$$

式中U是未知数，需要求出。

$$a=\frac{dU}{dt}=\frac{2\rho(v-U)^2A}{M}$$

对上式积分

$$\int_0^U\frac{dU}{(v-U)^2}=\int_0^t\frac{2\rho A}{M}dt$$

$$\frac{U}{v(v-U)}=\frac{2\rho A}{M}t$$

或

$$\frac{U}{v}=\frac{2\rho Avt}{M+2\rho Avt} \qquad (e)$$

将(e)代入(d)

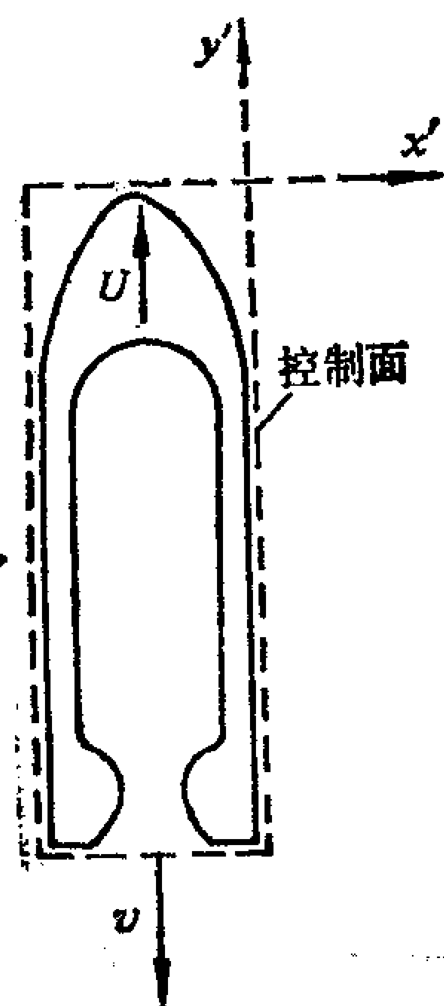
$$a=\frac{2\rho v^2A}{M}\left(\frac{M}{M+2\rho Avt}\right)^2=\frac{2\rho v^2A}{M}\left(1+\frac{2\rho Avt}{M}\right)^{-2} \qquad (f)$$

2）求$U=\frac{v}{2}$时的t

将$U=\frac{v}{2}$代入(e)式，整理后即得

$$t=\frac{M}{2\rho Av} \qquad (g)$$

【例 4-19】 有一火箭，初始时包括1000kg燃料在内的总质量$M=3000$kg，发射后以速度$U(t)$垂直向上飞行。燃料的耗量$m=75$kg/s，相对于火箭的排气速度$v=1000$m/s，如不计空气阻力，求发后第10秒钟火箭的加速度和速度。



例 4-19图

【解】 取动控制体和动坐标系如图中虚线所示，它们皆随火箭以速度$U(t)$垂直向上运动。列y'方向非惯性坐标系的动量方程

$$F_{sy}+\int_{CV}(f_y-a_{ey}-a_{ky})\rho dV=\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}u_{ry}\rho dV+\int_{CS}\rho u_{ry}(\vec{u}_r\cdot d\vec{S})$$

现针对本题情况讨论式中各项：

1.控制面上各点压强皆为大气压，空气阻力又忽略不计，$F_{sy}=0$。

2.火箭向上作直线加速运动，设加速度为$a(t)$，因而$a_{ey}=a$、$a_{ky}=0$、$f_y=-g$，且在控制体内各点的牵连加速度和重力加速度皆相等，故$\int_{CV}(f_y-a_{ey}-a_{ky})\rho dV=-(g+a)\int_{CV}\rho dV$。而$\int_{CV}\rho dV$为$t$时刻控制体内火箭的总质量，它等于初始时刻的总质量减去t时刻消耗掉的燃料质量。故

$$\int_{CV}(f_y-a_{ey}-a_{ky})\rho dV=-(g+a)(M-mt) \qquad (a)$$

3.火箭在动坐标系中是不动的，$\vec{u}_r=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}u_{ry}\rho dV=0 \qquad (b)$$

4.在控制面上$u_{ry}=-v$，加负号是因为v的方向与y'相反。

$$\int_{CS}\rho u_{ry}(\vec{u}_r\cdot d\vec{S})=-v\int_{CS}\rho(\vec{u}_r\cdot d\vec{S})$$

$\int_{CS}\rho(\vec{u}_r\cdot d\vec{S})$为单位时间由控制体排出的气体质量，它就是燃料的耗量，所以

$$\int_{CS}\rho u_{ry}(\vec{u}_r\cdot d\vec{S})=-mv \qquad (c)$$

将(a)、(b)、(c)式代入动量方程

$$-(g+a)(M-mt)=-mv$$

$$a=\frac{mv}{M-mt}-g=\frac{75\times1000}{3000-75\times10}-9.81=23.5\text{m/s}^2$$

现在再来求速度。由于

$$a=\frac{dU}{dt}=\frac{mv}{M-mt}-g$$

$$U=\int\frac{mvdt}{M-mt}-\int gdt$$

m和v皆不随时间变化，积分得

$$U=-v\ln(M-mt)-gt+C$$

$t=0$时，$U=0$。将初始条件代入，得$C=v\ln M$。故

$$U=v\ln\frac{M}{M-mt}-gt$$

将各项数值代入

$$U=1000[\ln 3000-\ln(3000-75\times 10)]-9.81\times 10=189.7\text{m/s}$$

习　题

4-1　已知速度场为

$$\vec{u}=(2x+2y)\vec{i}+(-y+x)\vec{j}+(x-z)\vec{k}\qquad(\text{m/s})$$

求（2，4，2）点的速度（大小和方向）。

4-2　已知速度场为

$$\vec{u}=(t+3x)\vec{i}+(2t-2y^2)\vec{j}+(4y-3)z\vec{k}\qquad(\text{m/s})$$

求第二秒钟位于坐标原点和（2，2，1）点的速度。

4-3　已知平面流动的速度场为

$$\vec{u}=(4y-6x)t\vec{i}+(6y-9x)t\vec{j}\qquad(\text{m/s})$$

问：1）$t=2$s时，（2，4）点的加速度为多少？

2）此流动是恒定的还是非恒定的？是均匀的还是非均匀的？

4-4　20°C的空气在大气压下流过0.5m直径的管道，断面平均流速为30m/s，试求其体积流量、质量流量和重量流量。

4-5　求两平行平板间流体的单宽体积流量，如流速分布为

$$u=u_{max}\left[1-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]$$

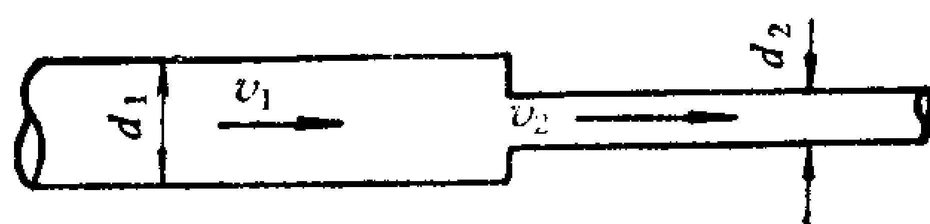
式中$y=0$为中心线，$y=\pm b$为平板所在的位置，u_{max}为常数。

4-6　题[4-3]中，如$t=1$s，

1）求该瞬时的流线方程；

2）绘出$x=0$至$x=4$区间穿过x轴的四条流线图形。

4-7　有一变直径的管道如图所示，已知$d_1=100$mm，$d_2=75$mm，d_1管段的断面平均流速$v_1=1.2$m/s，求d_2管段的断面平均流速。



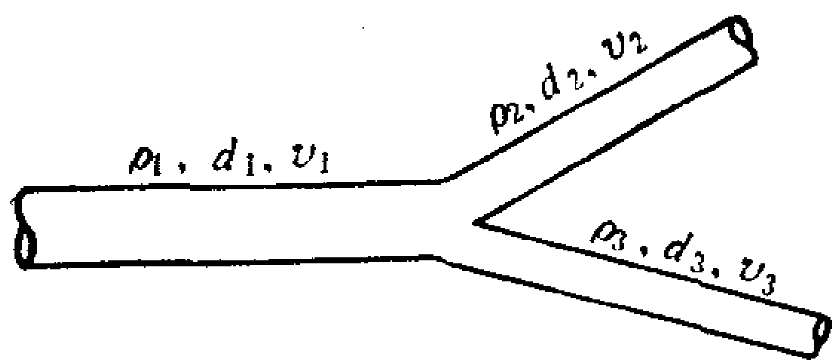
题 4-7图

4-8　如在150mm直径管道内的断面平均流速为200mm直径管道内的一半，求流过该两管道的流量比。

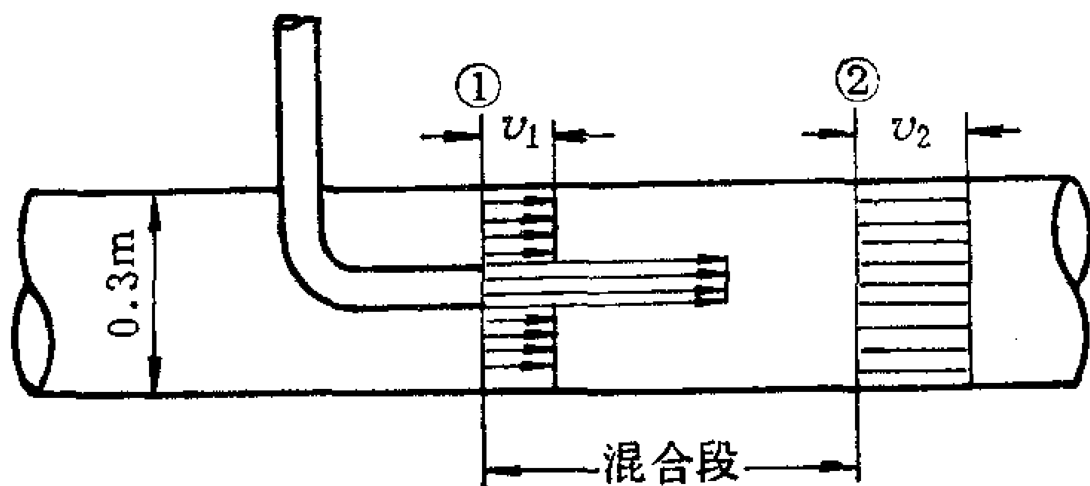
4-9　蒸气管道的干管直径$d_1=50$mm，断面平均流速$v_1=25$m/s，密度$\rho_1=2.62$kg/m³，蒸气分别由两支管流出。支管直径$d_2=45$mm，$d_3=40$mm，出口处蒸气密度分别为$\rho_2=2.24$kg/m³，$\rho_3=$

2.30kg/m³，求保证两支管质量流量相等的出口流速v_2和v_3。

4-10 水射器如图所示，高速水流v_j由喷嘴射出，带动管道内的水体。已知①断面管道内的水流速度和射流速度分别为$v_1=3$m/s和$v_j=25$m/s，管道和喷嘴的直径分别为0.3m和85mm，求断面②处的平均流速v_2。



题 4-9图



题 4-10图

4-11 已知圆管中流速分布为$u=u_{max}\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}$，$r_0$为圆管半径，$y$为离管壁的距离，$u_{max}$为管轴处的最大流速，求流速等于断面平均流速的点离管壁的距离y。

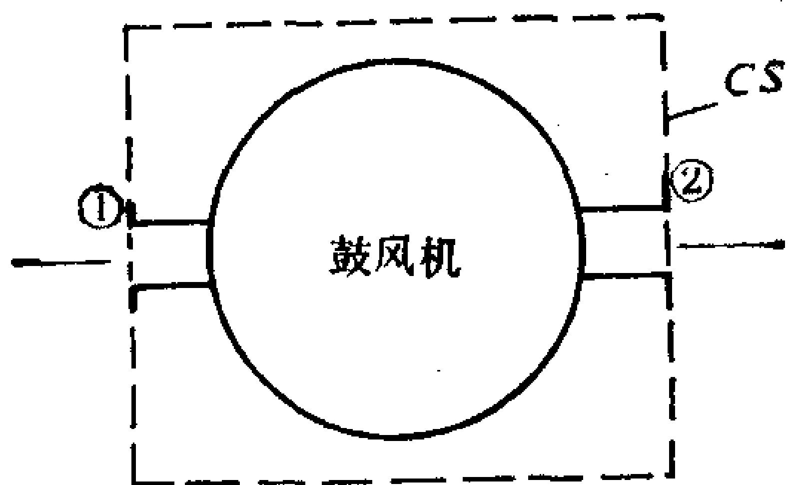
*4-12 空气由绝对压强为98kPa、密度为1.2kg/m³的大气中进入压气机，进口流速为75m/s，压气机出口处表压强为400kPa，出口流速为100m/s，通过压气机的流量为0.8kg/s。如流动是恒定的，压缩过程是绝热的，求压缩机输出的轴功率。

空气的气体常数$R=287$J/kg·K，定容比热$C_v=718$J/kg·K，绝热指数$k=1.4$。空气按完全气体考虑。

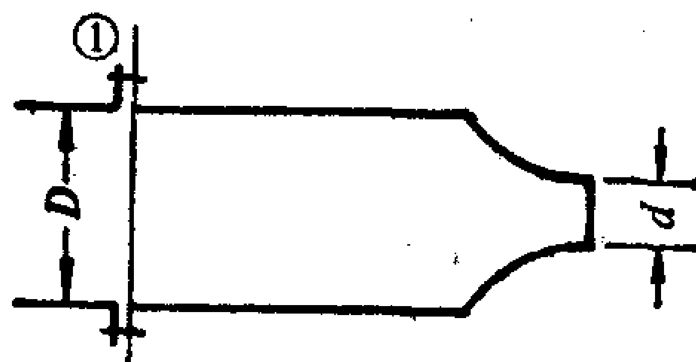
*4-13 空气进入鼓风机的压强为98kN/m²，温度为20°C，由鼓风机排出时压强为330kN/m²，温度为40°C。鼓风机排气管面积为0.1m²，鼓风机的流量为9kg/s，输出功率为440kW，如不计进气管内气流的动能，求鼓风机每秒钟排出的热量。

空气的气体常数$R=287$J/kg·K，定容比热$C_v=718$J/kg·K，可按完全气体考虑。

4-14 管道末端装一喷嘴，管道和喷嘴直径分别为$D=100$mm和$d=30$mm，如通过的流量为0.02 m³/s，不计水流过喷嘴的阻力，求断面①处的压强。

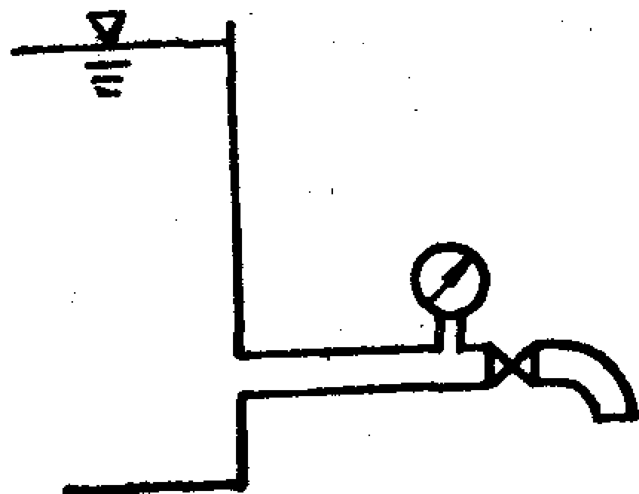


题 4-13图



题 4-14图

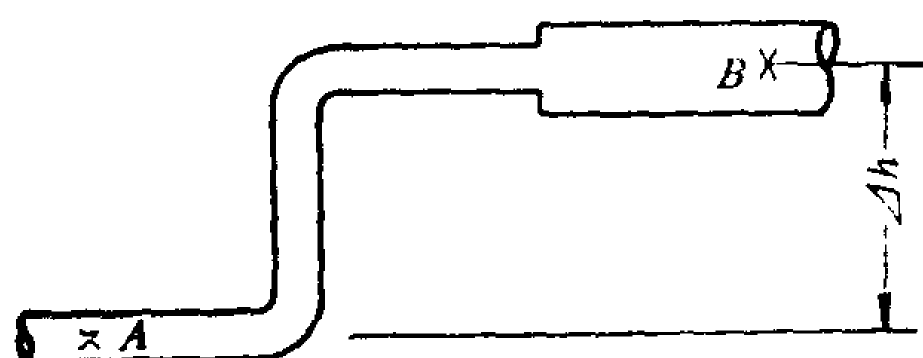
4-15 水管直径50mm，末端的阀门关闭时，压力表读值为21kN/m²，阀门打开后读值降至5.5 kN/m²，如不计管中的水头损失，求通过的流量。



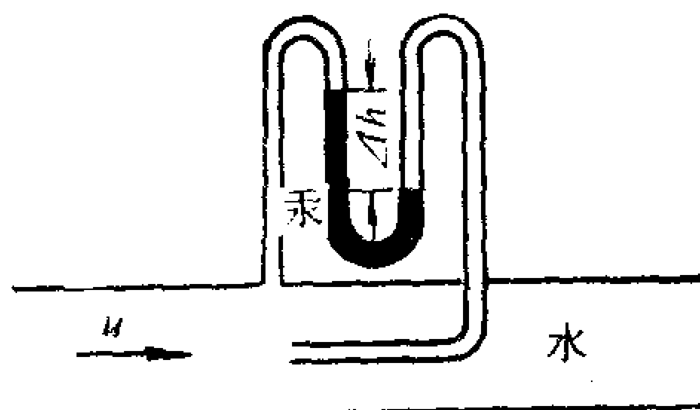
题 4-15图

4-16 一变直径的管段AB，直径$d_A=0.2\text{m}$，$d_B=0.4\text{m}$，高差$\Delta h=1.5\text{m}$，今测得$p_A=30\text{kN/m}^2$，$p_B=40\text{kN/m}^2$，B点处断面平均流速$v_B=1.5\text{m/s}$，试判断水在管中的流动方向。

4-17 用水银压差计测量水管中的点流速u，如读值$\Delta h=60\text{mm}$，求该点流速。



题 4-16图



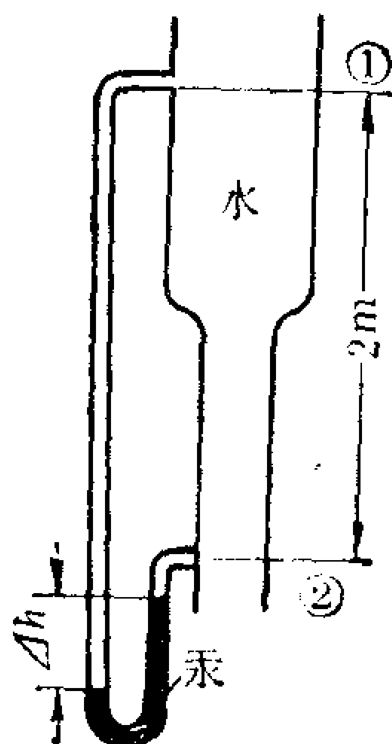
题 4-17图

4-18 流量为$0.06\text{m}^3/\text{s}$的水，流过如图所示的变直径管段，断面①处管径$d_1=250\text{mm}$，断面②处管径$d_2=150\text{mm}$，①、②两断面高差为2m，①断面压强$p_1=120\text{kN/m}^2$，试求：1）如水向下流，②断面的压强及水银压差计的读数；

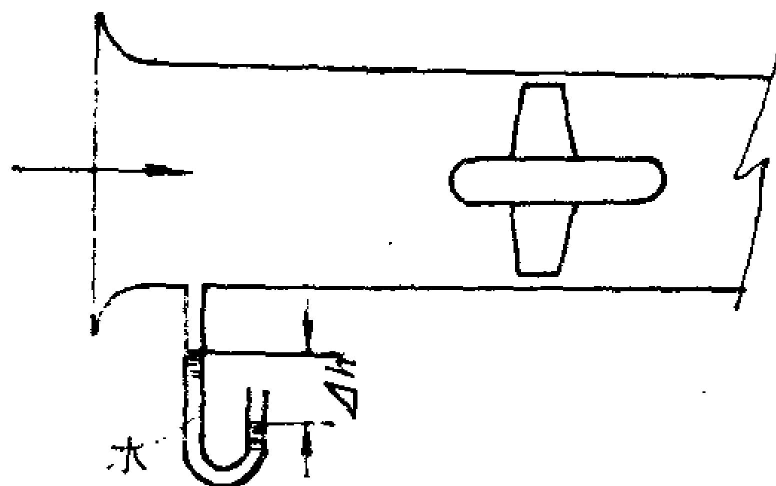
2）如水向上流，②断面的压强及水银压差计的读数。

水头损失不计。

4-19 风机进气管首端装有一流线形渐缩管，可用来量测通过的流量。这种渐缩管的局部损失可忽略不计，且气流在其末端可认为是均匀分布的。如装在渐缩管末端的测压计读值$\Delta h=25\text{mm}$，空气的温度为20°C，求通过的流量。



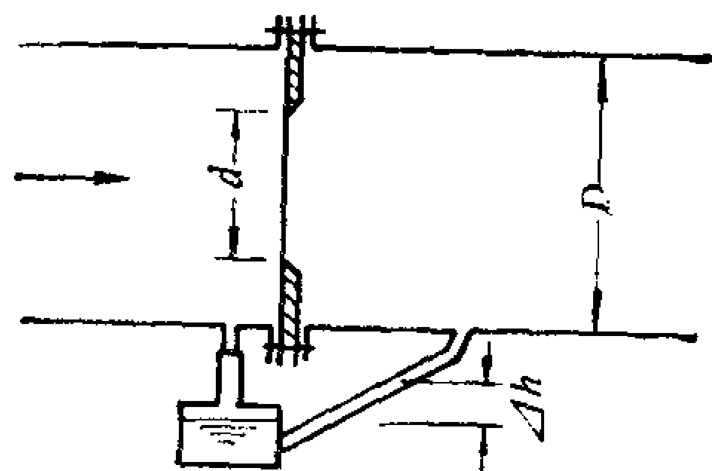
题 4-18图



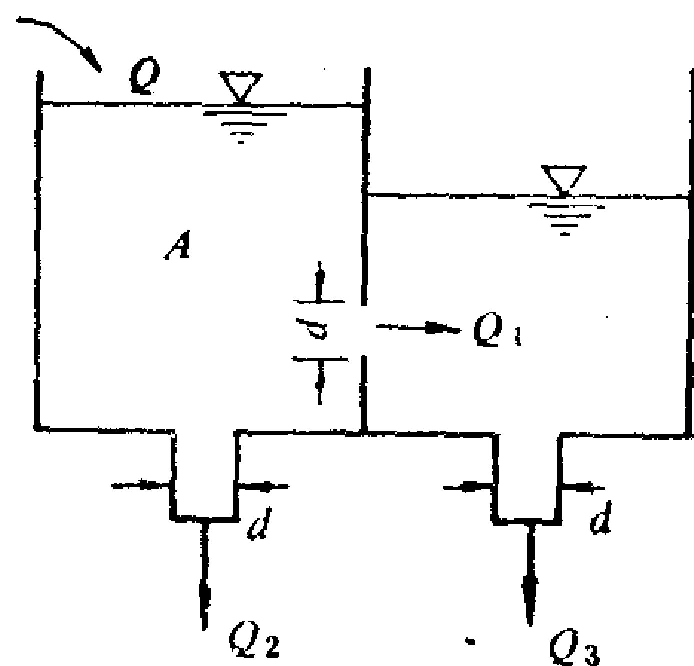
题 4-19图

4-20 用孔板流量计量测管道中的空气流量，管道直径$D=200\text{mm}$，孔口直径$d=100\text{mm}$，空气温度为25°C，微压计读值$\Delta h=120\text{mmH}_2\text{O}$，孔板的流量系数$\mu=0.64$，求流量。

4-21 有恒定的流量$Q=80\text{L/s}$注入水箱A中，如孔口和管嘴的直径d均为100mm，管嘴长度皆为400mm，求流量Q_1、Q_2和Q_3。



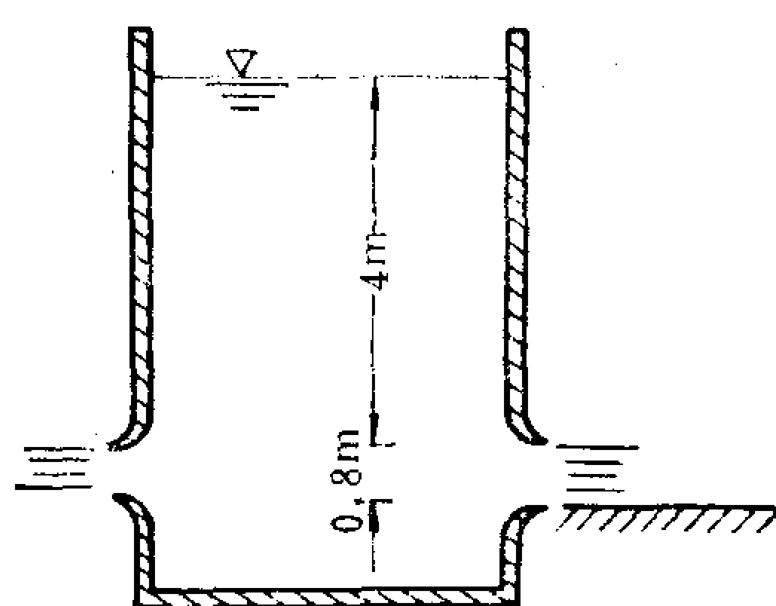
题 4-20图



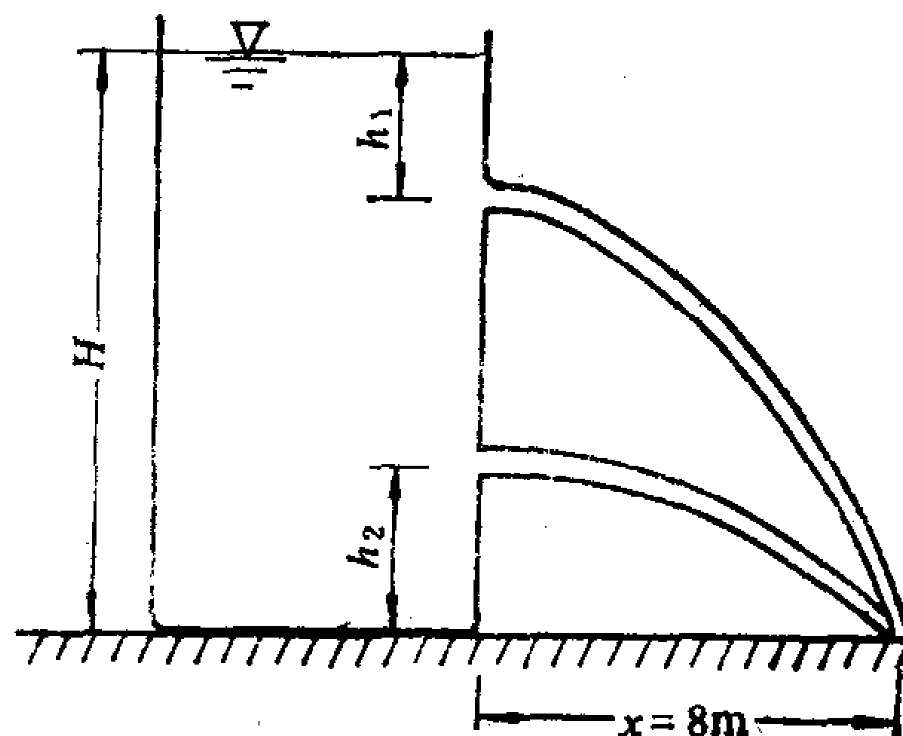
题 4-21图

4-22 水箱两侧各有一高0.8m、宽2m的流线型矩形管嘴，两者不仅面积相同，且位于同一高程上，只是右侧的管嘴出口处有一底板承托着水股。流线型管嘴出流的阻力可不计，通过这两个管嘴的流量是否相同？各为多少？

4-23 如图所示的容器，有上下两个孔口，如射流落地的水平距离皆为8m，$H=10\text{m}$，孔口出流的阻力不计，求h_1和h_2。



题 4-22图



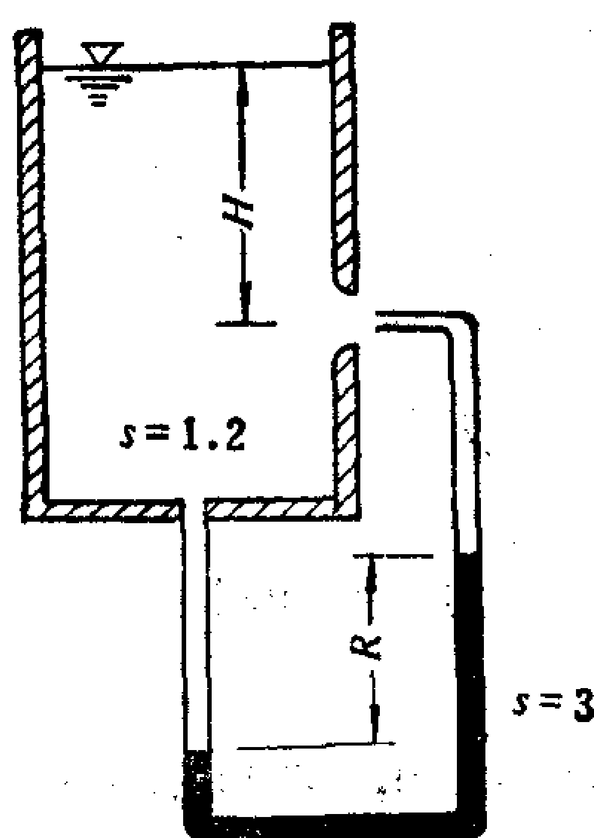
题 4-23图

4-24 如图所示的装置，箱内液体的比重为1.2，压差计内液体的比重为3，问：

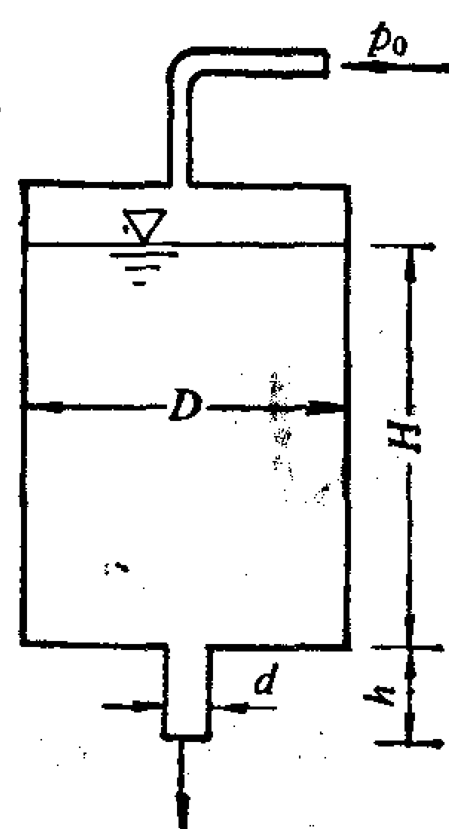
1）如流线型管嘴出流无水头损失，R和H是什么关系？

2）如流线型管嘴出流的水头损失为$0.1H$，R和H是什么关系？

4-25 圆筒形封闭水箱底部有一长$h=100\text{mm}$、直径$d=25\text{mm}$的圆柱形外管嘴，其流量系数$\mu=0.82$，箱内水深$H=900\text{mm}$，水箱直径$D=800\text{mm}$，问箱内表面相对压强p_0应保持多大，该水箱放空时间可比敞口水箱减少一半？



题 4-24图

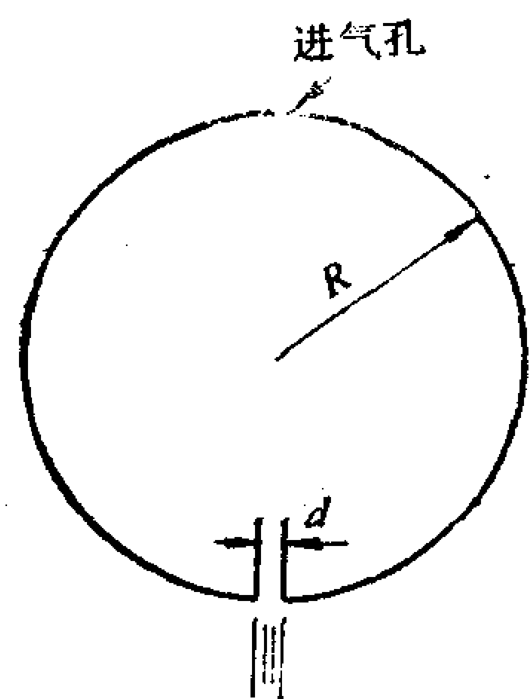


题 4-25图

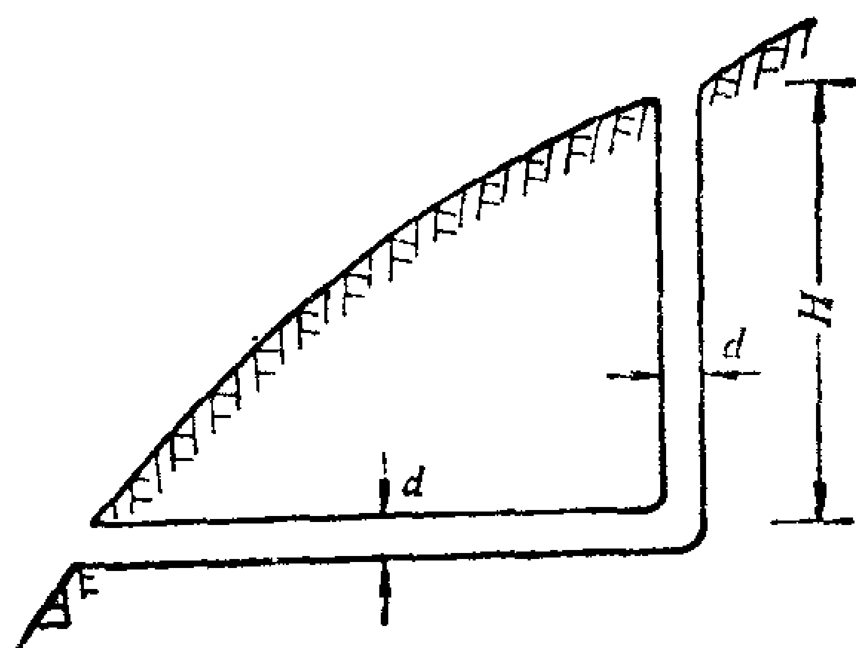
4-26 球形容器半径$R=0.6\text{m}$，上端有孔与大气相通，下端有一直径$d=50\text{mm}$的孔口，$\mu_0=0.62$，容器内原装满液体，求容器放空所需的时间。

4-27 水平坑道和竖井相连，直径皆为2m，竖井高$H=200\text{m}$，水平坑道长300m，竖井和坑道中的温度经常保持为15°C（$\rho_{15}=1.18\text{kg/m}^3$），外界空气温度在清晨为5°C（$\rho_5=1.29\text{kg/m}^3$），中午为20°C（$\rho_{20}=1.16\text{kg/m}^3$）。设竖井和坑道内的压强损失为$9\dfrac{\rho v^2}{2}$，计算清晨和中午的洞内气流速度和方向。

4-28 烟囱直径$d=1\text{m}$，通过的烟气量$Q_G=176.2\text{kg/h}$，烟气密度$\rho=0.7\text{kg/m}^3$，周围大气密度$\rho_a=1.2\text{kg/m}^3$，烟囱的压强损失$\Delta p_w=0.035\dfrac{H}{d}\dfrac{v^2}{2g}$，为保证烟囱底部断面①的负压不少于10mm



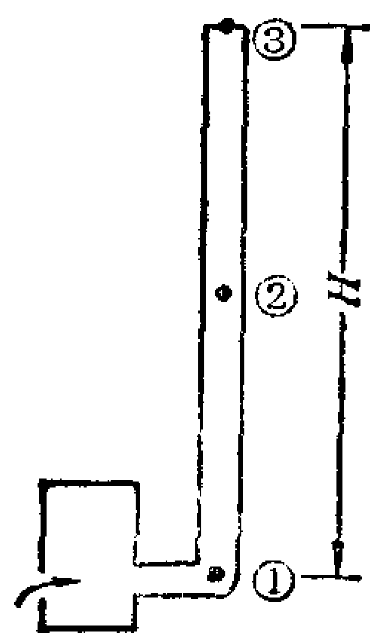
题 4-26图



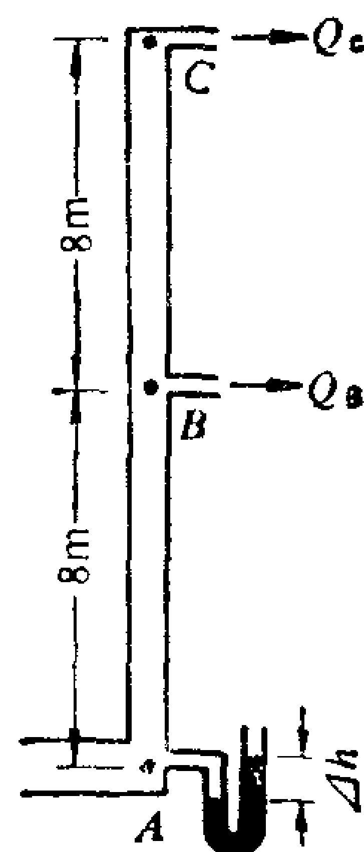
题 4-27图

H_2O，烟囱高度H应为多少？如H为满足上述要求的最小高度，烟囱半高处（断面②）的压强为多少？

4-29　楼房的煤气立管，分层供气量$Q_B = Q_C = 0.02\text{m}^3/\text{s}$，管径皆为50mm，煤气密度$\rho = 0.6\text{kg/m}^3$，室外空气密度$\rho_a = 1.2\text{kg/m}^3$，$AB$段的压强损失为$2\frac{\rho v_{AB}^2}{2}$，$BC$段的压强损失为$3.6\frac{\rho v_{BC}^2}{2}$，要求$C$点的余压$p_C = 300\text{N/m}^2$，$A$点酒精测压计的液面高差$\Delta h$应为多少？酒精重度$\gamma_{ac} = 7.9\text{kN/m}^3$。

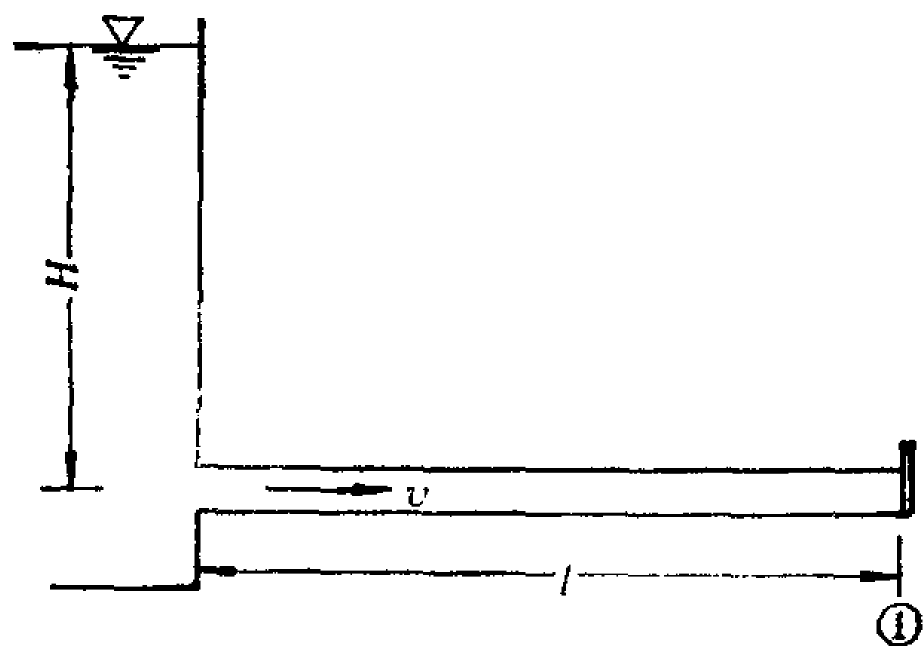


题 4-28图

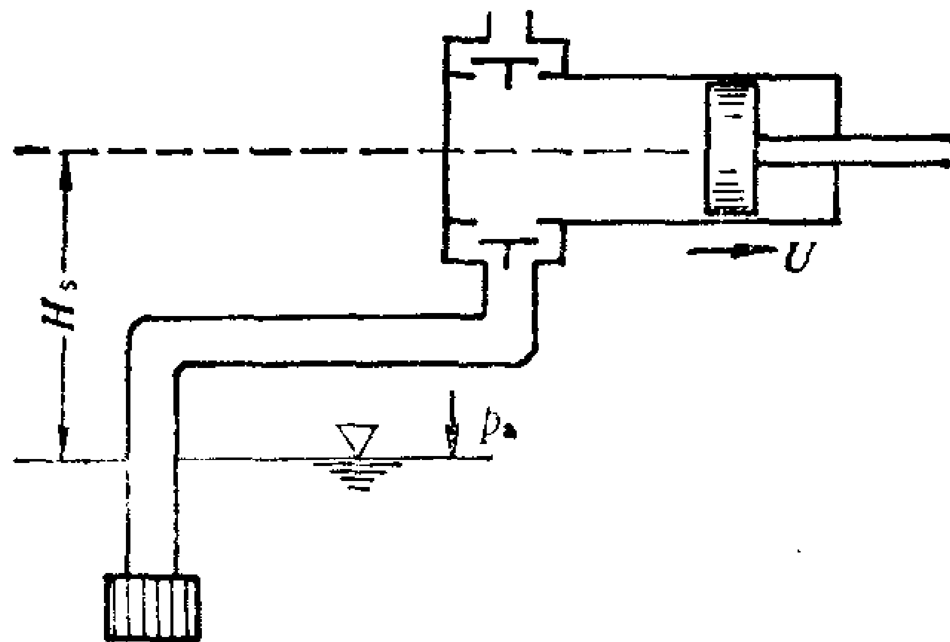


题 4-29图

4-30　水由水箱经水平管道流入大气，已知管中流速$v = 2.4\text{m/s}$，管长$l = 50\text{m}$，箱中水位与管道出口的高差$H = 5\text{m}$，管道内①断面以前的水头损失为2m，如突然将管道末端的障碍物拿走，求该瞬间管内水流的加速度。



题 4-30图



题 4-31图

4-31　活塞泵正在由水库中吸水，已知吸水高度$H_s = 3\text{m}$，吸水管长12m，吸水管直径$d = 100\text{mm}$，活塞缸直径$D = 150\text{mm}$，在图中所示的位置，活塞向右运动的速度$U = 1.0\text{m/s}$，加速度$\frac{dU}{dt} = 0.6\text{m/}$

s^2，吸水管内水流的总水头损失$h_w = 8\frac{v^2}{2g}$，求该瞬间活塞缸内的压强。

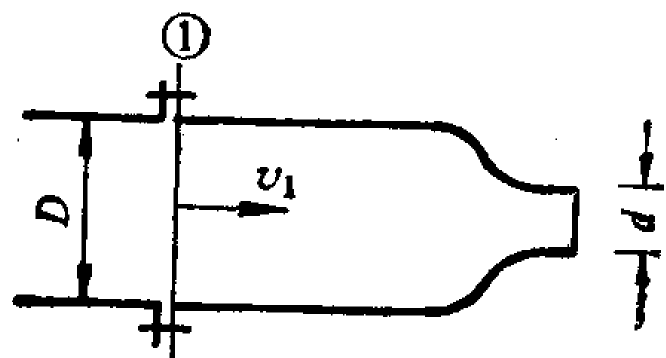
4-32　高压管末端装一喷嘴，管道和喷嘴的直径分别为$D = 100$mm和$d = 50$mm，如测得流过断面①的流速$v_1 = 4.0$m/s，压强$p_1 = 140$kN/m²，不计水和喷嘴的重量，求作用于螺栓的力F。

4-33　试根据[4-5]题和[4-11]题给出的流速分布，分别求出该两情况的动量修正系数α_0和动能修正系数α。

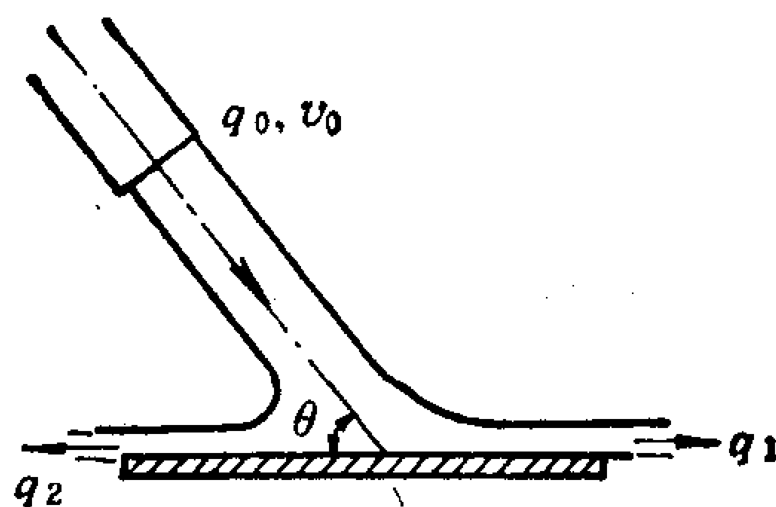
4-34　理想流体平面射流以θ角冲击在无限宽（垂直纸面方向）的平板上，如射流的单宽流量为q_0，速度为v_0，遇平板后两侧的单宽流量为q_1和q_2，求：

1）用θ函数表示的q_1/q_2；

2）射流对单宽平板的作用力。



题 4-32图



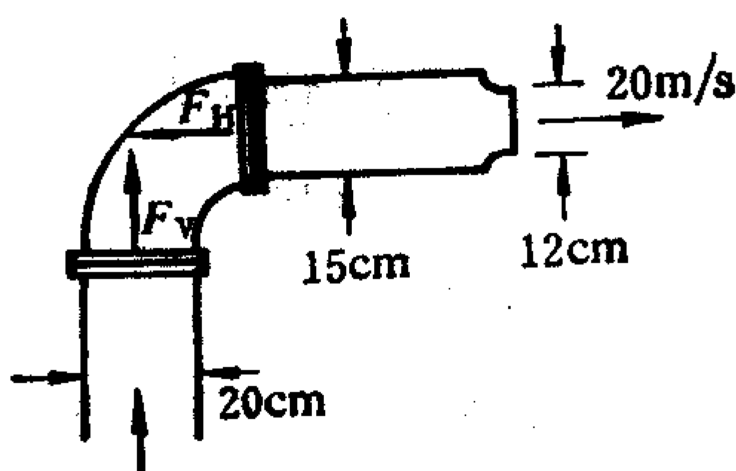
题 4-34图

4-35　有一直径由20cm变至15cm的90°变径弯头，其后端连一出口直径为12cm的喷嘴，水由喷嘴射出的速度为20m/s，求弯头所受的水平分力F_H和铅垂分力F_V。不计弯头内的水体重量。

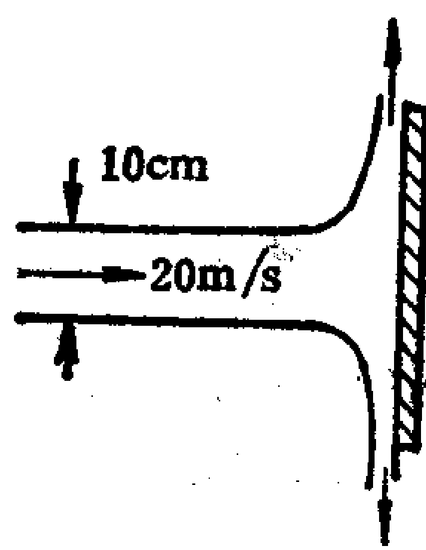
4-36　直径为10cm、速度为20m/s的水射流垂直冲击在一块圆形平板上，不计阻力，问：

1）平板不动时，射流对平板的冲击力多大？

2）如平板以速度5m/s向左运动，射流对平板的冲击力为多少？水流离开平板时，其流速的大小和方向是什么？



题 4-35图



题 4-36图

4-37　图示为一矩形容器，水由①、②两管流入，由③管流出，①、②、③管的直径分别为20cm、20cm和25cm，①、②两管的流量同为0.2m³/s，管口相压强压皆为32kN/m²，③管出口为大气压。三根短管都位于同一水平面上，如容器仅由A点支撑，求xOy平面上作用于A点的力和力矩。

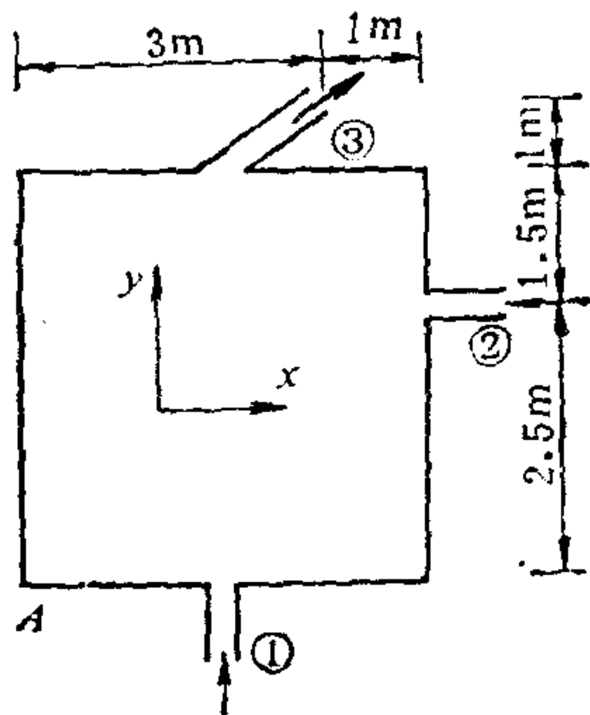
4-38　如图所示的盛水容器，已知$H = 6$m，孔口直径$d = 100$mm，孔口的流速系数$\varphi = 0.97$，收缩系数$\varepsilon = 0.63$，求：

1）容器不动时，水流作用在容器上的推力；

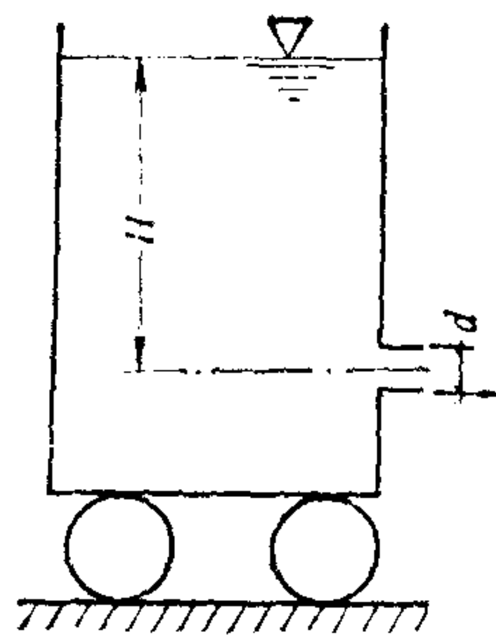
2）容器以2m/s的速度向左运动，水流作用在容器上的推力。

4-39　有一圆柱体放在两无限宽的平行平板中间，平板间距B为1m，圆柱体前水流原为均匀分布，流速$v_1 = 5$m/s，流过圆柱体后，流速近似三角形分布，求单宽圆柱体对水流的阻力。平板对水流的摩擦阻力不计。

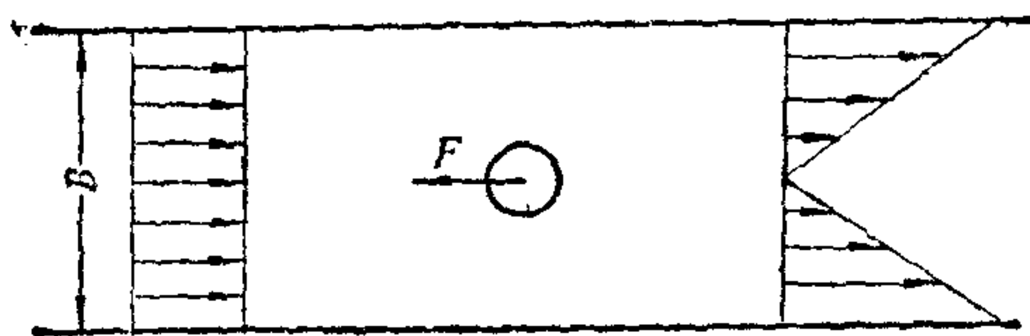
4-40　水射流由直径$d = 6$cm的喷嘴垂直向上喷射，离开喷口的速度为15m/s，若能支撑一块重100N的平板，射流喷射的高度Z为多少？



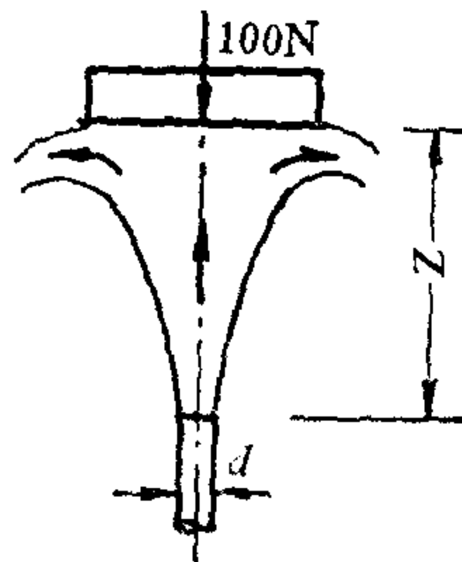
题 4-37图



题 4-38图



题 4-39图



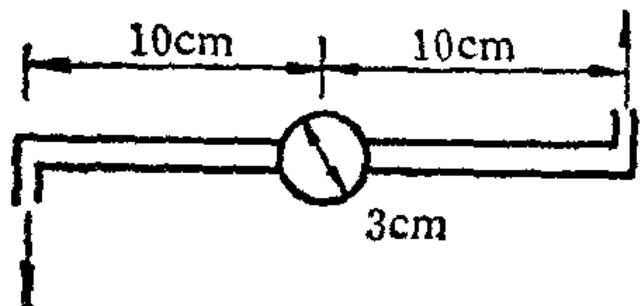
题 4-40图

4-41 臂长皆为10cm的双臂喷水装置，喷水口直径1cm，在3cm直径的中心供水管内水流速度为7m/s，求：

1）转臂不动时需施加的力矩；

2）使转臂以150r/min的转速反时针方向旋转需施加的力矩。

4-42 有一向后喷射水流作为动力的机动船逆水航行，河水流速为1.5m/s，相对于河岸的船速为9m/s，船尾喷口处相对于船体的流速为18m/s，流量为0.15m³/s，求射流对船体的推力。



题 4-41图



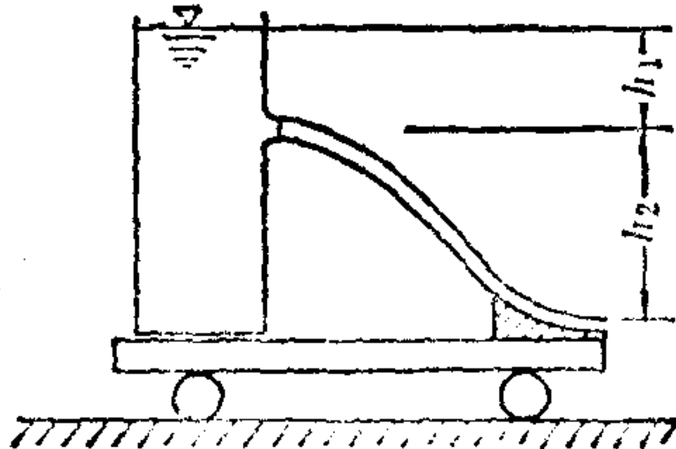
题 4-42图

4-43 装在小车上的水箱侧壁有一流线型喷嘴，直径为20mm，已知$h_1=1$m，$h_2=2$m，射流恰好平顺地沿小坎转向水平方向离开小车，求：

1）射流对小车的水平推力；

2）射流对小坎的水平推力；

3）射流对水箱的水平推力。

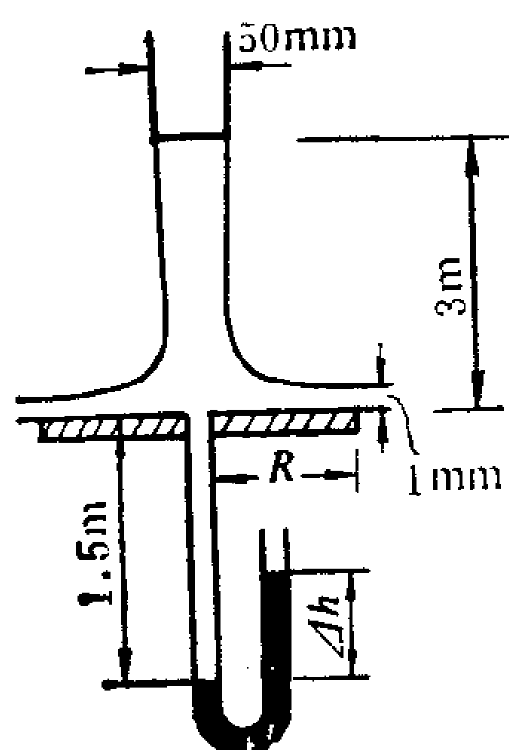


题 4-43图

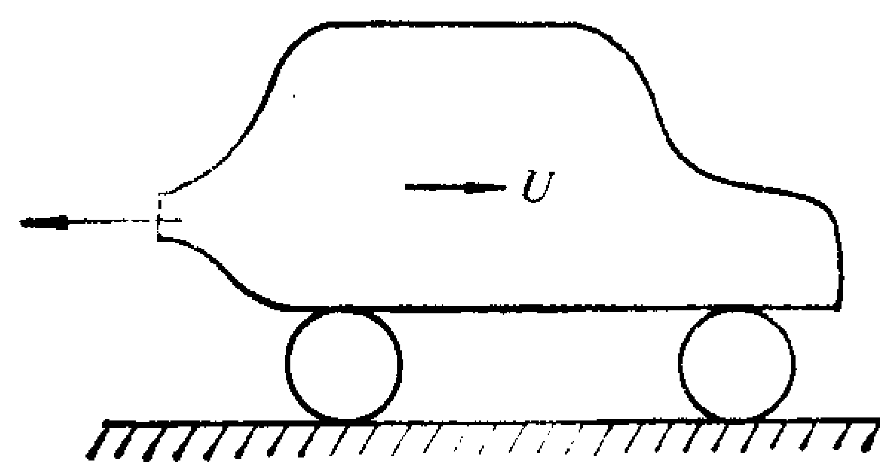
流线型喷嘴的水头损失不计。

4-44 水从直立竖管下端流出，立管直径为50mm，射流冲击一水平放置的半径 $R=150$mm的圆盘，若水层离开盘边的厚度$\delta=1$mm，求流量及水银压差计中的读数。水头损失不计。

4-45 喷气式汽车重包括燃油质量为4000kg（在国际单位制中kg为质量单位），行驶时空气和地面阻力为kU（U为车速，$k=150$N·s/m），燃气相对于喷气发动机喷射出来的速度为900m/s，燃油的耗量为40kg/s，求汽车由静止开始行驶10s时的速度。



题 4-44图



题 4-45图

第五章　流体运动的微元分析

在上一章中，我们取有限体积的控制体，导出了积分形式的基本方程。前已提到，这一组方程能用来求解所取控制体内流体和与它接触的物体之间的相互作用，以及控制面上各流动参数之间的关系。但它无法给出控制体内的流动细节，即各空间点上流动参数的分布。要了解流动的每个细节，还需采用微元体分析法，建立微分形式的基本方程，并寻求简化求解问题的途径，这就是本章所要讨论的问题。

§ 5-1　连续性微分方程

把 § 4-6中求得的欧拉型积分形式的连续性方程（4-27）式应用于微元控制体上，即可得欧拉型连续性微分方程。

在流动空间里取一平行六面体的微元控制体，其各边边长为dx、dy、dz，并分别平行于三个坐标轴（如图5-1所示）。连续性方程表明，单位时间由此微元控制体净流出的流体质量等于同时间控制体内流体质量的减少。

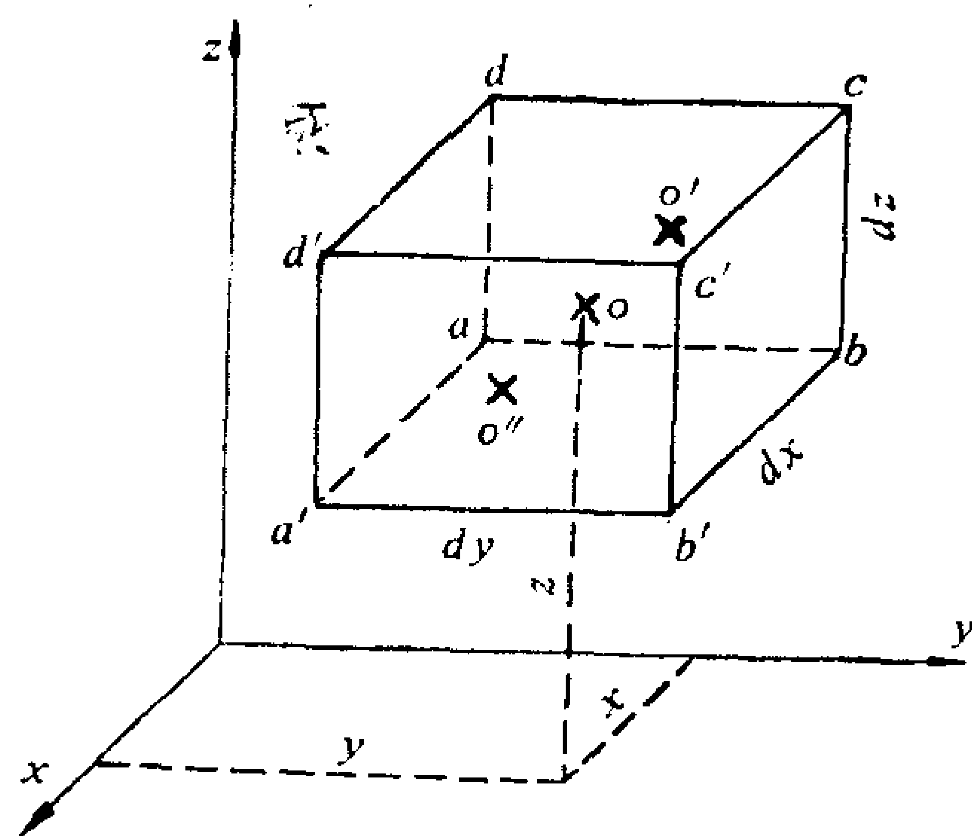


图 5-1　平行六面微元控制体

先讨论单位时间由微元控制体净流出的流体质量。由于所取的六面体为无限小，故任何两个相对的平面中必然有一个是流进流体的，而另一个是流出流体的。今假设速度的三个分量都是正值，即都与坐标轴的方向一致，则对与x轴垂直的一对平面，流体通过$abcd$平面流进控制体，由$a'b'c'd'$平面流出控制体。设六面体中心O点坐标为x、y、z，密度为ρ，速度为$\vec{u}=u_x\vec{i}+u_y\vec{j}+u_z\vec{k}$，它们都是空间坐标和时间的连续函数。如$\rho=f_1(x,y,z,t)$，那么，同一瞬时$abcd$平面中心$O'$点的密度为$\rho'=f_1\left(x-\frac{1}{2}dx,y,z,\ t\right)$。用泰勒级数展开此式，忽略高阶无穷小项，得

$$\rho'=\rho-\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

同理，O'点的速度在x轴方向的分量u'_x可表示为

$$u'_x=u_x-\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}$$

而O'点的速度在y轴和z轴方向的分量u'_y和u'_z皆不会使流体通过$abcd$平面，因此单位时间流体通过$abcd$平面流入六面体的质量为

$$\left[\rho-\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]\left[u_x-\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]dydz=\rho u_x dydz$$

$$-\frac{1}{2}\left[u_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\right]dxdydz$$

同理可得单位时间流体通过$a'b'c'd'$平面流出六面体的质量为

$$\left[\rho+\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]\left[u_x+\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\frac{dx}{2}\right]dydz=\rho u_x dydz$$

$$+\frac{1}{2}\left[u_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\right]dxdydz$$

于是单位时间通过这一对平面净流出六面体的流体质量为

$$\left[u_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\right]dxdydz$$

类似可得通过与y轴垂直的一对平面及与z轴垂直的一对平面净流出六面体的流体质量分别为

$$\left[u_y\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)+\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right]dxdydz$$

$$\left[u_z\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)+\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]dxdydz$$

因此单位时间由整个六面净流出的流体质量为

$$\left\{\left[u_x\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)+\rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)\right]+\left[u_y\left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)+\rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)\right]+\left[u_z\left(\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\right]\right\}dxdydz=\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right]dxdydz \tag{5-1}$$

再来讨论单位时间六面体内流体质量的减少量。已知t时刻O点的密度为$\rho(x,y,z,t)$，则$t+dt$时刻O点的密度为

$$\rho(x,y,z,t+dt)=\rho(x,y,z,t)+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt$$

dt时间内六面体中流体质量的减少量为

$$[\rho(x,y,z,t)-\rho(x,y,z,t+dt)]dxdydz=-\frac{\partial\rho}{\partial t}dtdxdydz$$

单位时间流体质量的减少量为

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydz \tag{5-2}$$

令（5-1）式和（5-2）式相等，即得可压缩流体的连续性微分方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0 \tag{5-3}$$

如用矢量表示，则为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot\rho\vec{u}=0 \tag{5-3'}$$

对于不可压缩流体，因密度既不随空间位置而变，也不随时间而变，即$\rho=$常数，故连续性微分方程可简化为

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \quad 或 \quad \nabla\cdot\vec{u}=0 \tag{5-4}$$

对于恒定的可压缩流体，密度不随时间而变，$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$，但随空间位置变化，故其连续性微分方程为

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0 \quad 或 \quad \nabla\cdot\rho\vec{u}=0 \tag{5-5}$$

如采用柱坐标系（r，θ，z），可取图5-2所示的微元控制体推导，用同样的方法，可得柱坐标的可压缩流体连续性微分方程

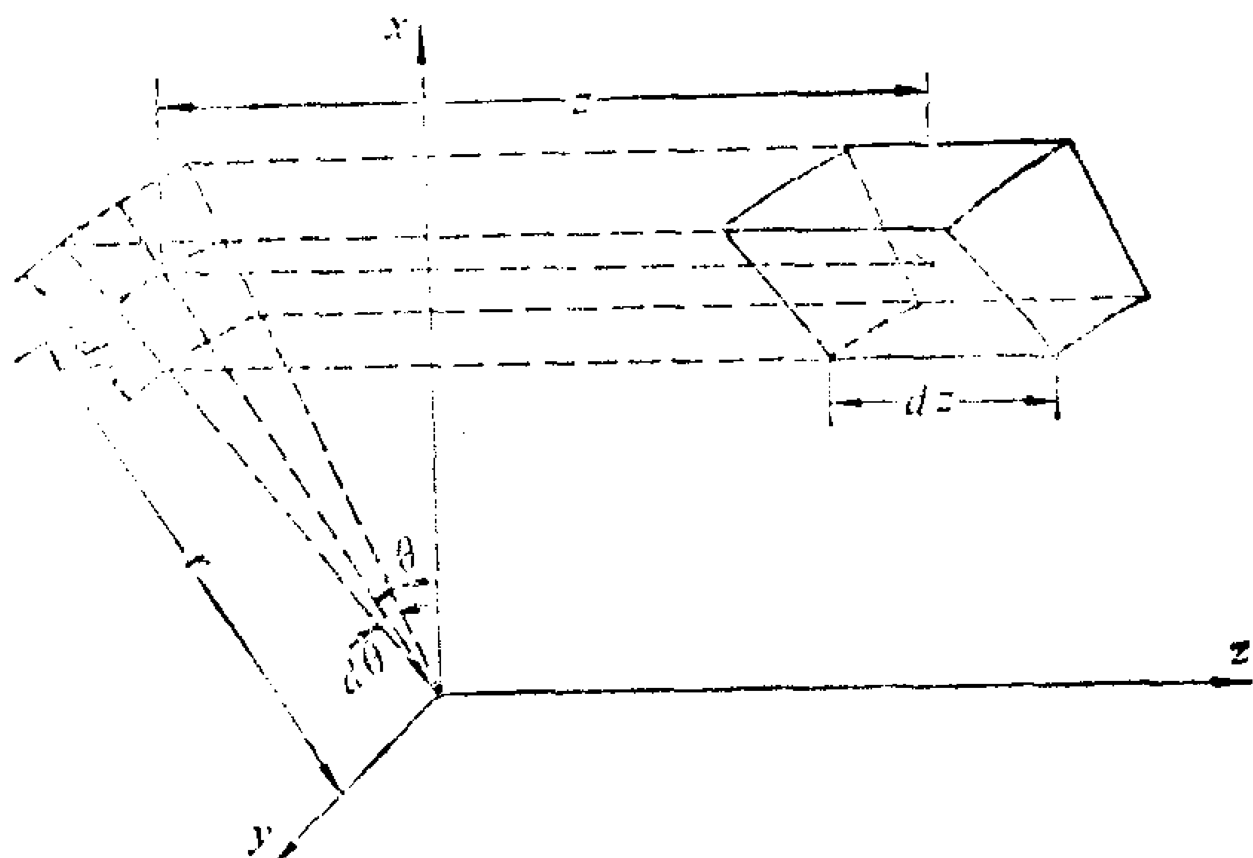


图 5-2　标坐标系中的微元控制体

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \tag{5-6}$$

对于不可压缩流体，ρ = 常数，上式简化为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{5-7}$$

对于可压缩流体的恒定流动，连续性微分方程为

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho u_r)}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial(\rho u_\theta)}{\partial \theta}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=0 \tag{5-8}$$

流体的连续性方程是根据质量守恒原理并考虑了流体连续性的条件推导出来的。自然界中的流体一般都符合连续性的假设，但也有些特殊情况，流体的连续性会遭到破坏，例如当水中某一区域的压强降到低于汽化压强时，水就会汽化。这时水里会出现大量气泡，从而使水体不再能保持连续性，这种现象称为**空化现象**。在出现空化现象的区域里，连续性方程就不适用了。

【例 5-1】 下列流动是否满足连续性微分方程？

$$\rho=t^2$$

$$u_x=\frac{1}{\rho}(y^2-x^2)$$

$$u_y=\frac{1}{\rho}(2xy)$$

$$u_z=\frac{1}{\rho}(-2tz)$$

【解】 求连续性微分方程（5-3）中的各项

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=2t$$

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(y^2-x^2)=-2x$$

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(2xy)=2x$$

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}(-2tz)=-2t$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}=2t-2x+2x-2t=0$$

此流动满足连续性微分方程。

【例 5-2】 已知$u_x=Cx^2yz$，$u_y=y^2z-Cxy^2z$，求满足不可压缩流体连续性微分方程的u_z表达式。

【解】

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}=2Cxyz$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}=2yz-2Cxyz$$

根据不可压缩流体的连续性微分方程

$$\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)=-2yz$$

积分上式，因是偏导数，可把y看成常数

$$u_z=-yz^2+f(x,\ y)$$

$f(x,\ y)$为变数x、y的任意函数。故满足连续性微分方程的u_z有无数个，最简单的情况是$f(x,\ y)=0$，于是$u_z=-yz^2$。

§5-2 运动微分方程——微分形式的动量方程

流体微团的运动不仅要满足连续性方程，还必须服从牛顿第二定律。也就是说，作用于流体微团上的外力的合力$\Sigma\vec{F}$应等于该微团的质量m与其加速度$\frac{D\vec{U}}{Dt}$的乘积

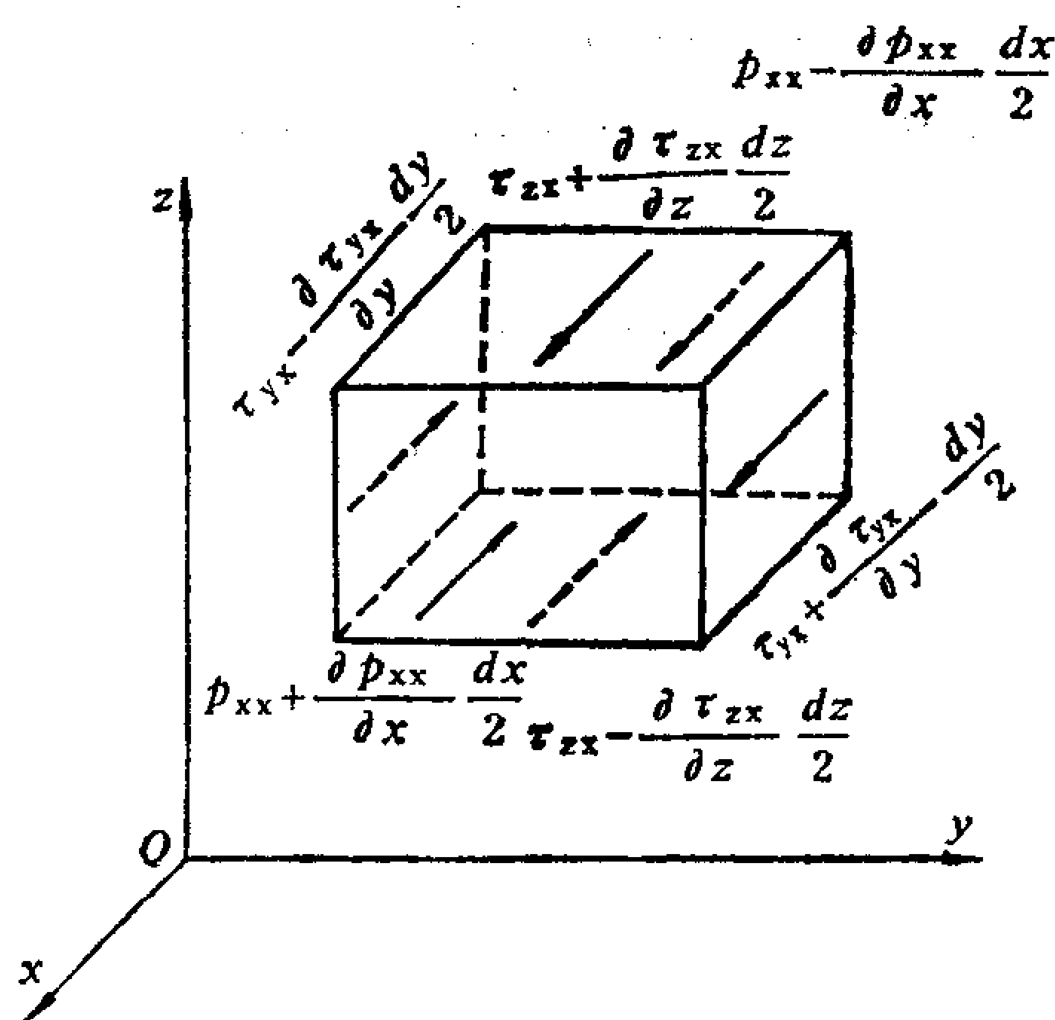


图 5-3 沿x方向作用在平行六面体微团上的表面力

$$\Sigma\vec{F}=m\frac{D\vec{U}}{Dt}$$

由于微团的质量m在运动过程中不随时间而变，故上式可写成

$$\Sigma\vec{F}=\frac{D}{Dt}(m\vec{U})$$

这就是动量定理。所以说，动量定理是牛顿第二定律的另一种表达形式。因此，微分形式的动量方程可以直接用牛顿第二定律导出。

在运动流体中任取一以$O(x,\ y,\ z)$点为中心的微元平行六面体的流体微团，边长为dx、dy、dz，分别平行于坐标轴x、y、z，现将牛顿第二定律应用于这个流体微团上。

我们已知，作用在流体上的力有表面力和质量力两大类。表面力的大小是用应力来度量的。在静止流体中应力的大小与作用面的方位无关，且垂直指向作用面。但在运动的粘

性流体中，应力却不具备这样的性质。粘性运动流体中的应力随作用面的方位不同而改变，且一般不垂直于作用面。因此在描述六面体每个面上的应力时，必须指明作用面的方位。同时每个面上不仅作用有法向应力，而且有切向应力。

设六面体中心O点在垂直于三个坐标轴方向的作用面上的法向应力和切向应力分别为

$$\begin{matrix} p_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p_{zz} \end{matrix}$$

应力符号的前一个角标表示作用面的方位（作用面的法线所平行的坐标轴），后一个角标表示应力的方向。于是六面体每个面上沿 x 轴方向的应力如图5-3所示。为了简明起见，图中没有绘出沿 y 轴和 z 轴方向的12个应力。因此。作用在六面体上的表面力在 x 方向的合力为

$$\begin{aligned} dF_{sx} = &\left(p_{xx} - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz - \left(p_{xx} + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)dydz \\ &+\left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz - \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)dxdz \\ &+\left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)dxdy - \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{dz}\frac{dz}{2}\right)dxdy \\ =&\left(-\frac{p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz \end{aligned}$$

作用在六面体上的质量力在三个坐标轴方向的分量等于单位质量力 $\overline{f}$ 与六面体的质量 $\rho dxdydz$ 的乘积。在 x 方向的分量为

$$dF_{mx} = f_x \rho dxdydz$$

因此，外力合力在 x 轴方向的分量为

$$\Sigma dF_x = dF_{sx} + dF_{mx} = \left(\rho f_x - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz$$

设六面体中心O点的速度为 $\vec{u}\,(x, y, z, t)$，$\frac{D\vec{u}}{Dt}$ 为六面体的加速度，这就是速度的质点导数。根据（4-6）式，质点导数在 x 方向的分量为

$$\frac{Du_x}{Dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}$$

令 x 方向的外力等于六面体的质量与该方向的加速度分量的乘积，得

$$\rho f_x - \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)$$

用同样方法可得 y、z 方向的微分方程

$$\rho f_y + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

$$\rho f_z + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = \rho\left(\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \tag{5-9}$$

这就是以应力表示的粘性流体运动微分方程，它是一个适用于一切流体的普遍方程。

若把所取的微元六面体看成是一个控制体，利用上一章得到的欧拉型动量方程（4-56）式，同样可以导出（5-9）式。实际上（5-9）式等号右侧的迁移加速度项 $\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}$ 就

是单位时间通过单位体积的控制体净流出的动量，局部加速度项$\rho\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$就是单位时间单位体积控制体内流体动量的增量。等号左侧则为作用在单位体积控制体上的各项外力。由于质点导数的概念就是系统导数概念的微化，因此在推导运动微分方程的过程中把加速度展开成局部加速度和迁移加速度，就相当于运用了输运公式将本来属于系统（质点）的加速度转换成以控制体为研究对象了。

（5-9）式中只有单位质量力f_x、f_y、f_z是已知数，即使是不可压缩流体，密度ρ是已知常数，也还有九个应力和三个速度分量是未知数，而方程只有四个（三个运动微分方程加一个连续性微分方程），因此方程组是不封闭的，要能求解还必须补充方程。这就需要联系到各种流体的具体性质。

对于牛顿流体，九个应力与速度梯度及流体物理性质的关系可表示如下❶：

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}=\tau_{yx}&=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\\ \tau_{yz}=\tau_{zy}&=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\\ \tau_{zx}=\tau_{xz}&=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\tag{5-10}$$

$$\left.\begin{aligned}p_{xx}&=p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}-2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\\ p_{yy}&=p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}-2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}\\ p_{zz}&=p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}-2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{5-11}$$

式中μ为流体的动力粘性系数；p为粘性运动流体中的点压强，等于过此点的任意三个相互垂直面上的法向应力的算术平均值。即

$$p=\frac{1}{3}(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})$$

它是空间坐标和时间的函数，与作用面的方位无关。

将（5-10）和（5-11）给出的关系式代入（5-9）式中，即得

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{Du_x}{Dt}&=\rho f_x-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{u}\right)\right]\\&\quad+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\right]\\ \rho\frac{Du_y}{Dt}&=\rho f_y-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\right]\\&\quad+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial u_y}{\partial y}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{u}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\right]\\ \rho\frac{Du_z}{Dt}&=\rho f_z-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)\right]\\&\quad+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\nabla\cdot\vec{u}\right)\right]\end{aligned}\right\}\tag{5-12}$$

❶ 关于这些关系式的推导，已超过对土建类本科学生的要求。读者如感兴趣可参阅本书附录A。

这就是牛顿可压缩流体的运动微分方程，一般称它为纳维——斯托克斯（Navier-Stokes）方程。对于不可压缩流体，由于μ是已知常数，且$\nabla\cdot\vec{u}=0$，上式可简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}&=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2u_x\\ \frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}&=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2u_y\\ \frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}&=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2u_z\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}13)$$

式中 $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。$\nabla^2$是个数性算子，称为拉普拉斯（Laplace）算子。（5-13）式的矢量形式为

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\nabla^2\vec{u}\qquad(5\text{-}13')$$

对于理想流体，因$\mu=0$，由（5-11）式可得

$$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p$$

即理想流体中，点压强p与作用面的方位无关，它是空间坐标和时间的函数。

理想流体的运动微分方程通常也称为欧拉运动方程，表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}&=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}&=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}&=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}14)$$

或

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u}=\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p\qquad(5\text{-}14')$$

在不可压缩流体或理想流体的运动微分方程中，ρ和μ是已知常数，只有u_x、u_y、u_z和p是未知变数。而运动微分方程和连续性微分方程共有四个方程，所以方程组是封闭的，原则上可以求解。对于可压缩流体，因ρ和μ都是未知变数，方程组不封闭，要能求解还需建立能量微分方程和补充其它方程。本课程以讨论不可压缩流体的流动为主，故不拟介绍空间流动的能量微分方程，只是在讨论可压缩流体一元流动的第十二章中，将建立一元恒定流的能量微分方程。

纳维—斯托克斯方程是研究牛顿流体运动的基本方程之一，它和连续性微分方程组成的微分方程组，是用微元分析法求解各种流体力学问题的基础，表达了牛顿流体运动所必须遵循的一般规律。从理论上说，任何一个具体的流动都是这一组方程的特解。虽然纳维—斯托克斯方程是非线性的，求解过程比较复杂。特别是遇到复杂的边界条件，求解会有很大困难。但这一组方程的建立为从理论上分析解决流体力学问题奠定了巩固的基础，具有重大的理论意义。

很多实际问题用柱坐标系求解较为方便，为此给出不可压缩流体柱坐标系的纳维—斯托克斯方程。其推导方法与迪卡尔坐标系的方程类似。

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}-\frac{u_\theta^2}{r}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}=f_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\\
&\qquad+\nu\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right)\\
&\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r u_\theta}{r}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}=f_\theta-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \theta}\\
&\qquad+\nu\left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right)\\
&\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\\
&\qquad+\nu\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{5-15}
$$

不可压缩流体柱坐标系的切应力和法向应力表达式分别为

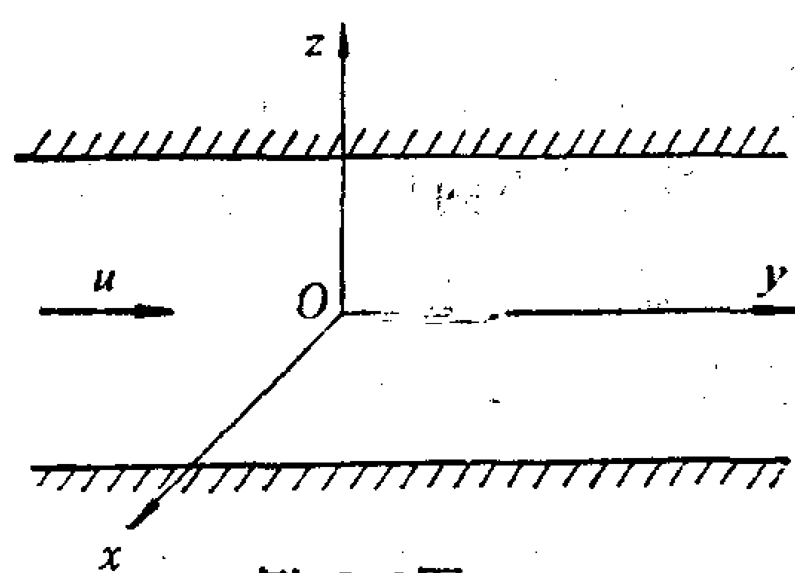
$$
\left.\begin{aligned}
\tau_{r\theta}&=\tau_{\theta r}=\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right]\\
\tau_{\theta z}&=\tau_{z\theta}=\mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}\right)\\
\tau_{zr}&=\tau_{rz}=\mu\left(\frac{\partial u_r}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{5-16}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
p_{rr}&=p-2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r}\\
p_{\theta\theta}&=p-2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_r}{r}\right)\\
p_{zz}&=p-2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{5-17}
$$

【例 5-3】 试用纳维—斯托克斯方程证明在恒定均匀流中：

1）任一点平行于水流方向与垂直于水流方向的法向应力相等，皆等于该点的动水压强 p；

2）过流断面上的动水压强按静水压强规律分布。



例 5-3图

【解】 1）设置坐标系，令 y 轴与均匀流的流动方向一致（见图）。根据已知条件：

恒定流中 $$\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial u_y}{\partial t}=\frac{\partial u_z}{\partial t}=0 \tag{a}$$

均匀流中 $$u_x=u_z=0,\quad u_y=u \tag{b}$$

将（b）式代入不可压缩流体的连续性微分方程（5-4）式中，得

$$\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{c}$$

这表明，速度 u 只是 x 和 z 的函数，它不随 y 值而变。由于均匀流中所有流线皆平行于 y 轴，故（c）式也就表明了均匀流同一流线上各点的速度相等。

将（5-4）式和（b）、（c）式代入法向应力表达式（5-11）中，得

$$p_{zz}=p_{yy}=p_{xx}=p \qquad (d)$$

这就证明了任一点平行于水流方向的法向应力p_{yy}与垂直于水流方向的法向应力p_{xx}、p_{zz}相等，且三者皆等于该点的动水压强p。本题中由于坐标系不是任意取的（必须有一个坐标轴与运动方向一致），故（d）式在这里不能表明点压强与作用面方位无关。

在粘性流体与固体壁面接触的表面上，$u_x=u_y=u_z=0$，因而也可以得到$p_{xx}=p_{yy}=p_{zz}=p$的结果。因此，在固体壁面上钻孔装测压管，测得的不仅是该点垂直于水流方向的法向应力，它也是该点的动水压强p。

2）我们只讨论过流断面xOz平面上的压强分布，不讨论压强沿y方向的变化。故将（a）、（b）、（c）三式代入x和z方向的纳维——斯托克斯方程（5-13）中，考虑到质量力中只有重力，其分量为$f_x=f_y=0$，$f_z=-g$，故得

$$o=o-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+o \qquad (e)$$

$$o=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+o \qquad (f)$$

积分（f）式

$$p=-\rho g z+C(x)=-\gamma z+C(x) \qquad (g)$$

由（e）式可知
$$\frac{\partial p}{\partial x}=C'(x)=0$$

因而$C(x)=$常数。代入（g）式，得

$$z+\frac{p}{\gamma}=\text{常数} \qquad (h)$$

此式虽然与静水压强基本方程（3-16）式形式相同，但意义不完全相同。它只表明在同一过流断面上z与$\frac{p}{\gamma}$之和为同一常数，在不同的过流断面上，则为不同的常数。

§5-3 边界条件和初始条件

连续性微分方程和运动微分方程描述的是流体运动的一般规律，自然界中一切牛顿流体的流动都满足这一方程组。所以它反映的是流体运动的共性。但是每个具体的流动都还有自己的特性，在问题的求解过程中，只有给出了具体的边界条件和初始条件，才能使该流动的特性得到反映，从而求得该问题的具体解答。反映在数学上，任何一个偏微分方程组都有无数组可能的解，要得到完全确定的解，必须给出它的定解条件，这就是边界条件和初始条件。

一、边界条件

边界条件是指在运动流体的边界上方程组的解应满足的条件。边界条件可分为两类：与速度有关的运动学条件和与力有关的动力学条件。边界条件实际上包括两个方面：给定边界面的几何形状；给定边界面的性质。

边界面的形式是多种多样的，要对具体情况做具体分析。下面只讨论三种常见的情况。

（1）固体壁面

固体壁面是不可渗透的。同时，在运动过程中流体始终紧贴着固体壁面，它们之间不存在任何空隙。因此，位于固体壁壁面上的任一流体质点在壁面法线方向的速度分量$(u)_{bn}$必然与该点的壁面速度在法线方向的分量u_{bn}相等

$$(u)_{bn}=u_{bn} \tag{5-18}$$

至于该流体质点沿壁面切线s方向的速度分量u_s，则视是否要考虑流体的粘性而定。如果是理想流体，质点沿壁面可以自由滑动，u_s不受限制，（5-18）式即为理想流体在运动的固体壁面上的运动学边界条件。

若已知该固体壁面方程

$$F(x,\ y,\ z,\ t)=0 \tag{5-19}$$

则上述运动学条件可以表达具体一些。设t瞬时位于物面上$M(x,\ y,\ z)$处的流体质点在$t+dt$瞬时流动到M'，则其坐标应为$x+u_xdt$、$y+u_ydt$、$z+u_zdt$（参见图5-4）。因M'仍位于固体壁面上，它仍能满足物面方程，故有

$$F(x+u_xdt,\ y+u_ydt,\ z+u_zdt,\ t+dt)=0$$



图 5-4 移动固体壁面的边界条件

用泰勒级数展开此式，忽略高价小量

$$F(x,y,z,t)+\frac{\partial F}{\partial x}u_xdt+\frac{\partial F}{\partial y}u_ydt+\frac{\partial F}{\partial z}u_zdt+\frac{\partial F}{\partial \tau}dt=0$$

将（5-19）式代入，得

$$u_x\frac{\partial F}{\partial x}+u_y\frac{\partial F}{\partial y}+u_z\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial t}=0 \tag{5-20}$$

这是理想流体在运动的固体壁面上运动学条件的另一种表达形式。也就是说，位于运动的固体壁面上的流体质点的速度分量应满足此微分方程。

如固体壁面是静止不动的，则理想流体的运动学边界条件为

$$(u)_{bn}=0 \tag{5-21}$$

或

$$u_x\frac{\partial F}{\partial x}+u_y\frac{\partial F}{\partial y}+u_z\frac{\partial F}{\partial z}=0 \tag{5-22}$$

对于粘性流体，实验证实位于固体壁面上的流体质点粘附在固体壁面上，随固体壁面一起运动。因而位于固体壁面上任一流体质点的速度$(\vec{u})_b$与该点的壁面速度$\vec{u}_b$相等，即

$$(\vec{u})_b=\vec{u}_b \tag{5-23}$$

这就是粘性流体在运动的固体壁面上的运动学边界条件。如固体壁面静止不动，则运动学条件为

$$(\vec{u}_b)=0 \tag{5-24}$$

流体在固体壁面上的压强和切应力一般是待求的量，其数值不受外界条件的限制。故固体壁面一般没有动力学条件，而只有运动学条件。

（2）自由表面

如忽略气体和液体的界面上气体对液体的摩擦切应力以及表面张力，液体在自由表面处的压强p与该处气体作用在液面上的压强p_0相等，故其动力学边界条件为

$$p = p_0 \tag{5-25}$$

若自由表面的方程$F(x, y, z, t)=0$为已知，由于自由表面上液体质点在流动过程中始终位于自由表面上，情况和理想流体在运动的固体壁面上流动类似，故其运动学边界条件为

$$u_x\frac{\partial F}{\partial x}+u_y+\frac{\partial F}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}+\frac{\partial F}{\partial t}=0 \tag{5-26}$$

式中u_x、u_y、u_z为自由表面上液体质点的速度分量。

（3）无穷远处

关于无穷远处来流对物体的绕流问题，一般无穷远处的流速$\vec{u}_\infty$和压强p_∞是给定的，因此无穷远处的运动学条件和动力学条件可写成

$$(\vec{u})_{\vec{r}\to\infty}=\vec{u}_\infty \tag{5-27}$$

$$(p)_{\vec{r}\to\infty}=p_\infty \tag{5-28}$$

$\vec{r}$是流体质点的矢径。

二、初始条件

当已知流动随时间的变化规律后，还不能求得任意指定时刻的流体运动情况，还需要给出某一特定时刻$t=t_0$的流体运动状态，即

$$\left.\begin{aligned}\vec{u}(x, y, z, t_0)&=\vec{f}_1(x, y, z)\\ p(x, y, z, t_0)&=f_2(x, y, z)\end{aligned}\right\} \tag{5-29}$$

式中$\vec{f}_1$、f_2为给定的已知函数。

应该指出，只有非恒定流才需要给出初始条件。对于恒定流，运动不随时间而变，故不需要初始条件。

§ 5-4 流体的速度分解定理

连续性微分方程和运动微分方程虽然在不可压缩流体的条件下是封闭的，原则上可以求解。实际上由于运动微分方程是一个二阶非线性偏微分方程，加上复杂的边界条件难以用数学方程来表达，因此求解十分困难。只有在极简单的边界条件下（如圆管、同心圆环、平行平板、平行圆盘等），才能求得解析解。但是运动方程在某些特殊条件下可以直接积分，把它变成一个代数方程，这就使问题得到很大简化。为了讨论运动方程能够积分的条件，先要分析流体微团的运动。

由理论力学得知，任何一个刚体的运动可以分解为平动和转动的合成。即刚体中任一点的速度$\vec{u}$可表示为

$$\vec{u}=\vec{u}_0+\vec{\omega}\times\vec{r}$$

式中$\vec{u}_0$为刚体中选定的基点O的平移速度；$\vec{\omega}$是刚体绕O点旋转的角速度矢量；$\vec{r}$为该点到O点的矢径。

流体的运动要比刚体运动复杂。流体的易流动性质使流体的运动除平动和转动外，还

会产生变形。下面就来分析流体微团的运动，证明其中任意点的速度都可以分解成三部分，它们各自使该流体微团产生平移、旋转和变形。

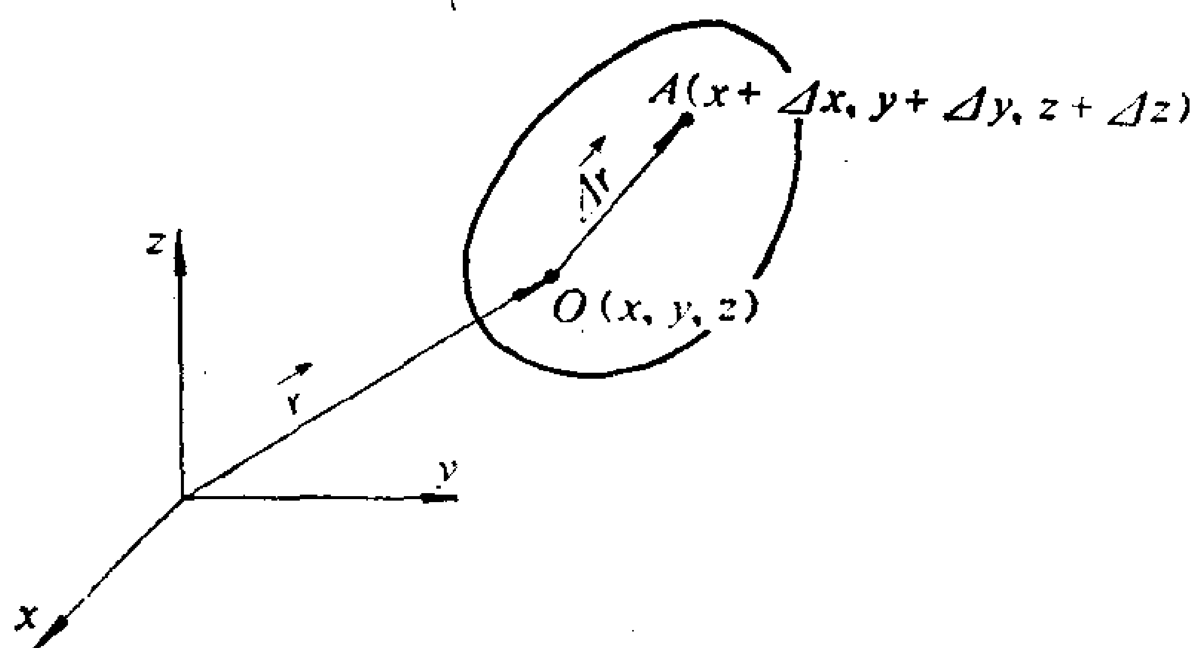


图 5-5 流体微团中的基点O及任一点A

在 t 瞬时的流场中任取一流体微团。在该微团中选定一$O(x, y, z)$点做为基点（参见图5-5），其速度为

$$\vec{u}_0(\vec{r}, t) = u_{x0}\vec{i} + u_{y0}\vec{j} + u_{z0}\vec{k}$$

由于速度是空间坐标的连续函数，故 t 瞬时微团中任意点A的速度为

$$\vec{u}_A(\vec{r} + \Delta\vec{r}, t) = \vec{u}_A(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t)$$

将$\vec{u}_A$用泰勒级数展开，略去高阶小量，得

$$\begin{aligned}
\vec{u}_A(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t) &= u_0(x, y, z, t) + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial z}\right)_0 \Delta z \\
&= \left[u_{x0} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)_0 \Delta z\right]\vec{i} \\
&+ \left[u_{y0} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)_0 \Delta z\right]\vec{j} \\
&+ \left[u_{z0} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial u_z}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)_0 \Delta z\right]\vec{k}
\end{aligned} \tag{5-30}$$

上式表明，A点的速度可以用O点的速度和速度分量的九个偏导数来表示。如（5-30）式中$\vec{u}_A = \vec{u}_0$，即九个偏导数都等于零，流体微团就只有平移运动。因此，这九个偏导数是用来描述平动以外的其它运动的。现分两类来讨论它们所描述的运动。

（1）线变形运动

为了简化讨论，取平面流动来分析。在流动平面yOz上取一各边与坐标轴平行的矩形流体微团$ABCD$（参见图5-6）。对于平面流动，$u_x = 0$，$\frac{\partial}{\partial x} = 0$，因而只存在四个偏导数。先讨论$\frac{\partial u_y}{\partial y}$和$\frac{\partial u_z}{\partial z}$所描述的流体微团运动。

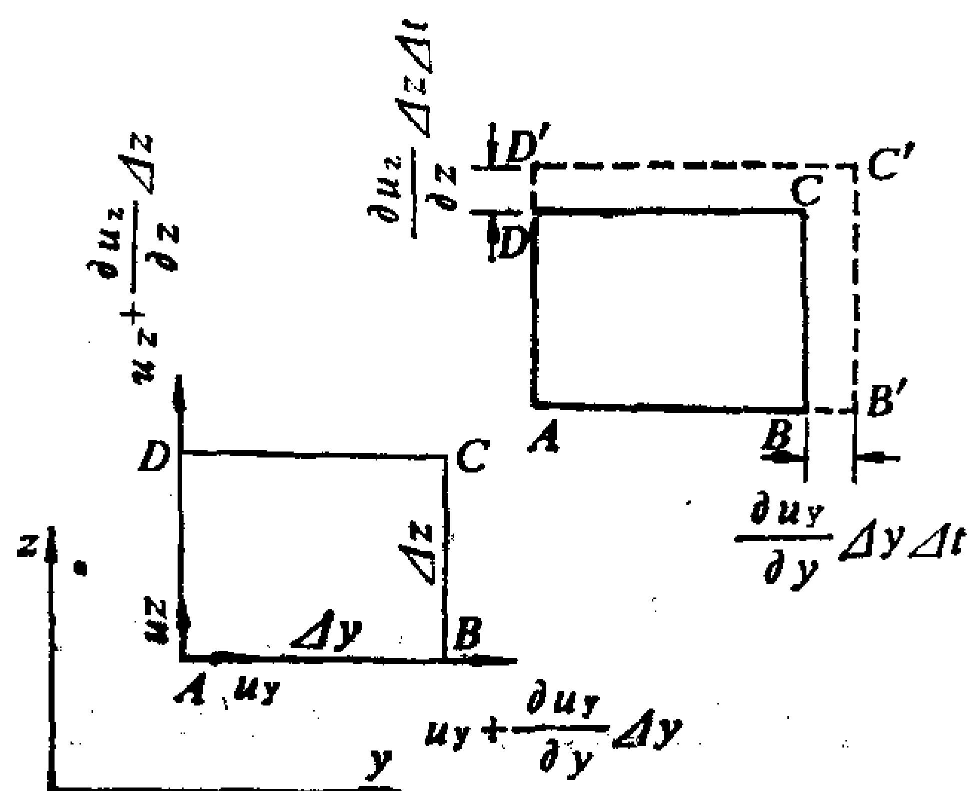


图 5-6 流体微团的线变形

设A点的坐标为y、z，其速度分量为u_y、u_z，则B点同一瞬时在y方向的速度分量为$u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y$。因$A$点和$B$点在沿$AB$线段方向的速度不同，流体线$AB$在运动过程中将会伸长或缩短，也就是要产生线变形。经Δt时间A点沿y方向移动的距离为$u_y\Delta t$，B点沿同一方向移动的距离为$\left(u_y + \frac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t$，因此，线段$AB$经$\Delta t$后将伸长$\frac{\partial u_y}{\partial y} \times \Delta y \Delta t$。亦即它的线变形速度为$\frac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y$。由于$AD$和$BC$线段上位于同一$z$值的各对应

点在 y 方向的速度差值皆为 $\frac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y$，它使该流体微团于 Δt 时间沿 y 方向伸长了 BB'，所以 $\frac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y$ 也是流体微团在 y 方向的线变形速度。而 $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ 显然是在 y 方向为单位长度的流体微团的线变形速度，或称为**线变形速率**，以 ξ_{yy} 表示。同理，令 $\xi_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z}$，$\xi_{zz}$ 即为流体微团在 z 方向的线变形速率。对于空间流动，则有

$$\left.\begin{aligned}\xi_{xx}&=\frac{\partial u_x}{\partial x}\\ \xi_{yy}&=\frac{\partial u_y}{\partial y}\\ \xi_{zz}&=\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{5-31}$$

如在流场中取一边长为 Δx、Δy、Δz 的棱柱形流体微团来分析。由于有线变形速率 ξ_{xx}、ξ_{yy}、ξ_{zz}，经 Δt 时间后，即膨胀成图5-7中所示的棱柱体。它增长的体积 $\delta(\Delta V)$ 为

$$\delta(\Delta V)=\left(\Delta x+\frac{\partial u_x}{\partial x}\Delta x\Delta t\right)\left(\Delta y+\frac{\partial u_y}{\partial y}\Delta y\Delta t\right)\left(\Delta z+\frac{\partial u_z}{\partial z}\Delta z\Delta t\right)$$

$$-\Delta x\Delta y\Delta z=\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t+\cdots\cdots$$

单位体积的流体微团在单位时间的体积增长值，即体积膨胀速率为

$$\frac{\delta(\Delta V)}{\Delta V\Delta t}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{u}$$

由此可见，三个方向的线变形速率之和就是流体的体积膨胀速率，它也是流速的散度。

对于不可压缩流体，由连续性微分方程（5-4）可知

$$\nabla\cdot\vec{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$$

即其体积膨胀率为零，这是显而易见的。

（2）旋转运动和角变形运动

现在来讨论平面流动中的另两个偏导数 $\frac{\partial u_y}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial u_z}{\partial y}$ 对流体微团运动的作用。图5-8中设 A 点 z 方向的速度为 u_z，则 B 点在该方向的速度为 $u_z+\frac{\partial u_z}{\partial y}\Delta y$，由于 A、B 两点

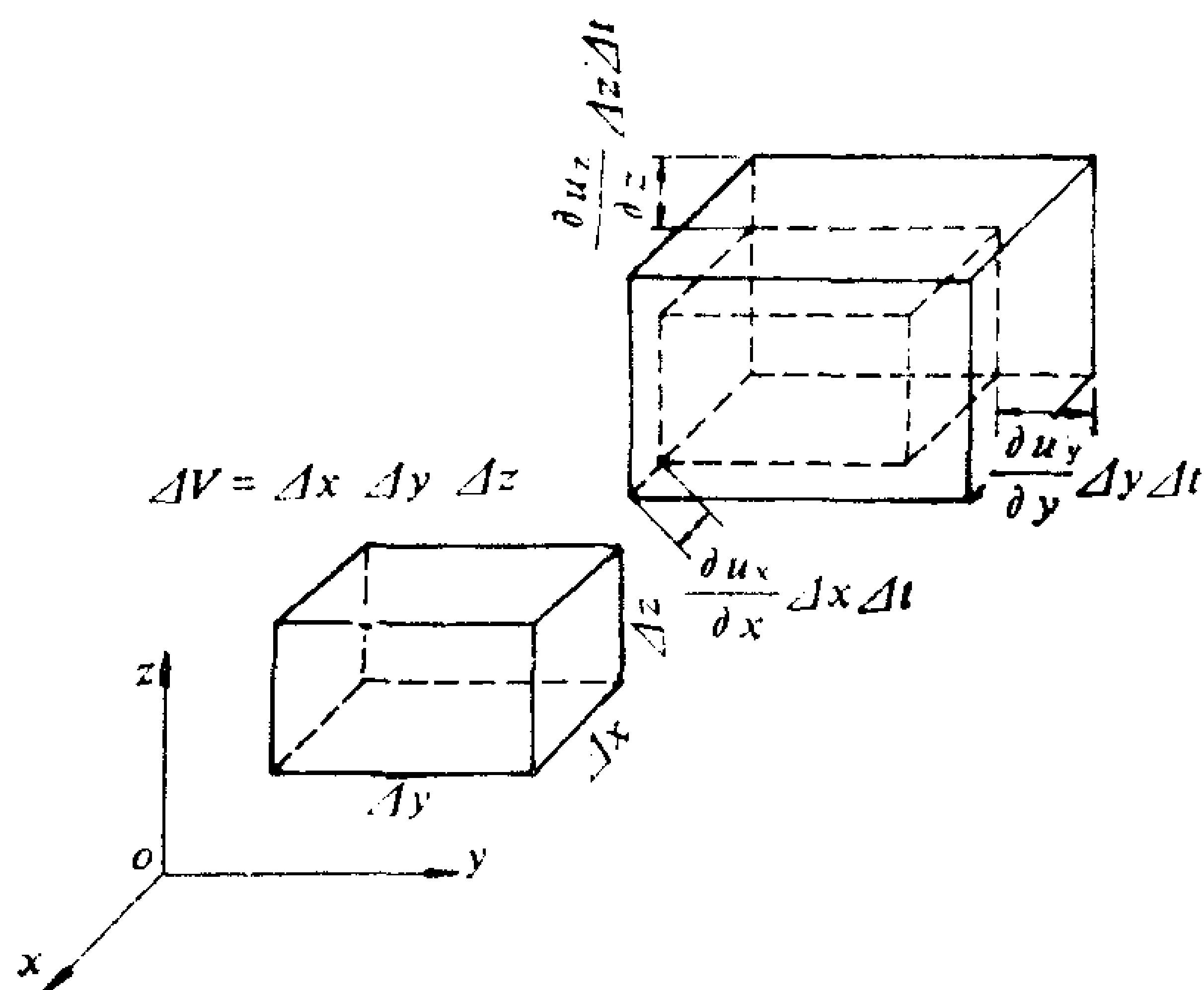


图 5-7 线变形引起的体积膨胀

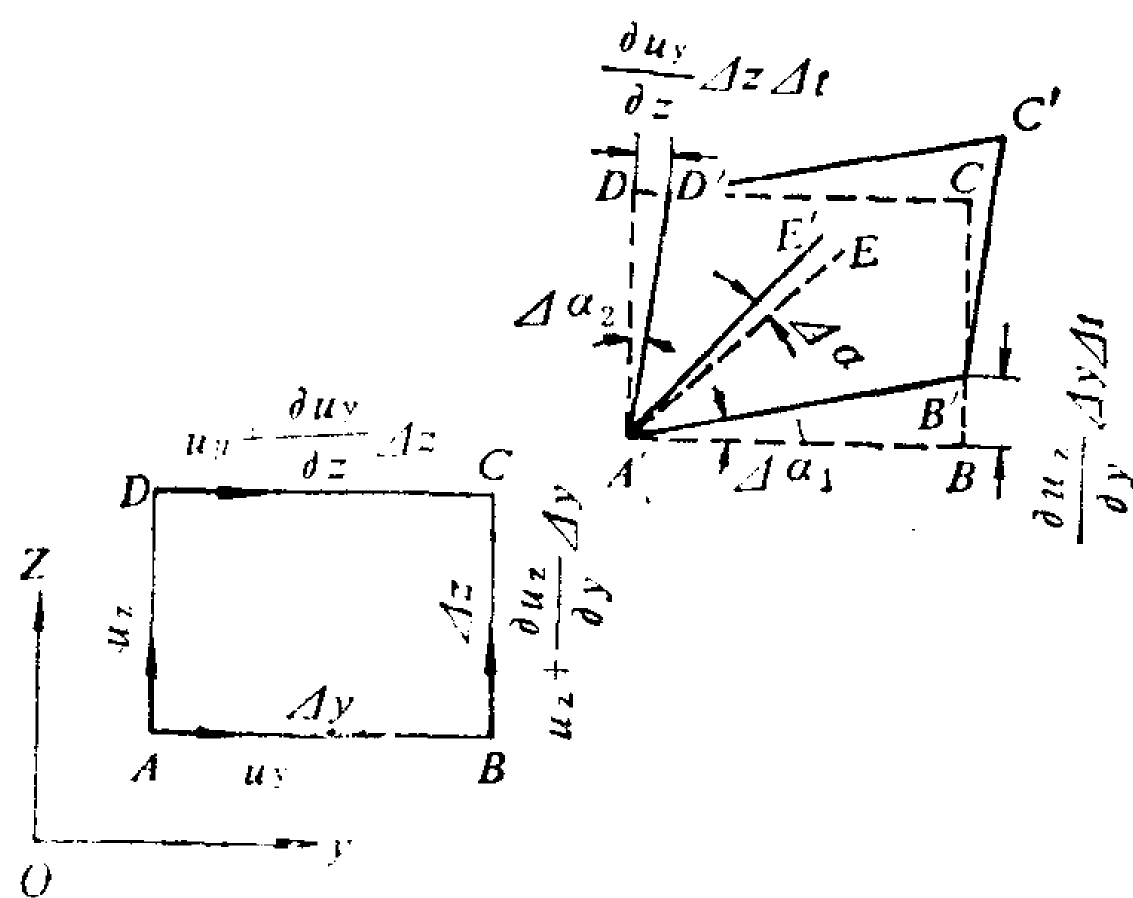


图 5-8 流体微团的旋转和角变形

在垂直于AB线段方向的速度不同，流体线AB在运动过程中将会绕平行于ox的轴旋转。Δt时间AB线将沿逆时针方向旋转$\Delta\alpha_1$角。

$$\Delta\alpha_1 \approx \tan\Delta\alpha_1 = \frac{\frac{\partial u_z}{\partial y}\Delta y \Delta t}{\Delta y} = \frac{\partial u_z}{\partial y}\Delta t$$

同理，AD线在运动过程中也会沿顺时针方向旋转，Δt时间旋转了$\Delta\alpha_2$角。

$$\Delta\alpha_2 \approx \tan\Delta\alpha_2 = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial z}\Delta z \Delta t}{\Delta z} = \frac{\partial u_y}{\partial z}\Delta t$$

因此矩形流体微团Δt时间后将成为图5-8中所示的平行四边形$A'B'C'D'$。在流体微团由矩形变为平行四边形的过程中，一方面出现了旋转运动，同时也出现了角变形运动，即构成矩形的各边内角发生了变化。所以偏导数$\frac{\partial u_y}{\partial z}$和$\frac{\partial u_z}{\partial y}$是描述流体微团旋转运动和角变形运动的变量。

流体微团的旋转与刚体的旋转不同。刚体上任何一点与旋转轴连线的旋转角速度都是相等的，因此都可以用来代表刚体的旋转。但流体的易流动性，使与旋转轴相连的不同流体线各自有不同的旋转角速度，用哪一个来代表流体微团的旋转呢？这就必须给流体微团的旋转角速度下一个明确的定义。我们以过A点的任意两条正交微元流体线在yOz平面上旋转角速度的平均值定义为流体微团在该平面上绕A点的旋转角速度。这个平均值也就是直角分角线AE的旋转角速度，它实际上是组成流体微团的各质点绕A点旋转的角速度的平均值。

今以ω_x表示在与x轴垂直的平面上流体微团的旋转角速度。流体线的旋转以逆时针方向为正，则

$$\omega_x = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{[\Delta\alpha_1 + (-\Delta\alpha_2)]}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

对于空间流动，则有

$$\left.\begin{aligned}\omega_x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\\ \omega_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\\ \omega_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}32)$$

ω_x、ω_y、ω_z分别为流体微团的旋转角速度在x、y、z轴方向的分量。流体微团的旋转角速度矢量$\vec{\omega}$为

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \omega_x\vec{i} + \omega_y\vec{j} + \omega_z\vec{k}\\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial w}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\vec{k}\right]\\ &= \frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix} = \frac{1}{2}\nabla\times\vec{u}\end{aligned} \qquad (5\text{-}33)$$

即流体旋转角速度等于流速矢量旋度的一半。

有了流体微团旋转角速度的定义，我们就不难把角变形运动分离出来。如流体微团上各点与旋转中心的连线皆以相同的角速度旋转，那么这个流体微团就和刚体一样，只有旋转运动，没有角变形运动。所以会有角变形运动正是因为这些连线以不同于其平均值的角速度旋转的缘故。因此，可用任意一个直角的边与其角平分线的夹角在单位时间内的变化来度量角变形运动，并称之为角变形速率。对于我们所取的流体微团$ABCD$，如取AB边考虑，角变形速率为

$$\xi_{yz}=\frac{\Delta\alpha_1-\Delta\alpha}{\Delta t}=\frac{\frac{\partial u_z}{\partial y}\Delta t-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\Delta t}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

角变形速率的前一个角标表示直角边所平行的坐标轴，后一个角标表示位移所平行的坐标轴。在确定角变形速率时，直角边和角平分线的转动皆以使原角变小为正，原角变大为负。

如按AD边考虑

$$\xi_{zy}=\frac{\Delta\alpha_2+\Delta\alpha}{\Delta t}=\frac{\frac{\partial u_y}{\partial z}\Delta t+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\Delta t}{\Delta t}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

可见，两个直角边有相同的角变形速率，即$\xi_{yz}=\xi_{zy}$。

对于空间流动，三个相互正交平面上的角变形速率为

$$\left.\begin{aligned}\xi_{xy}=\xi_{yx}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\\ \xi_{yz}=\xi_{zy}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\\ \xi_{zx}=\xi_{xz}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}34)$$

以上我们分析了（5-30）式中九个偏导数对流体微团运动的作用，为了能明确地表示（5-30）式中各项的物理意义，现把九个偏导数分别用线变形速率、角变形速率和旋转角速度代换。由（5-32）和（5-34）式可得

$$\xi_{yz}+\omega_x=\frac{\partial u_z}{\partial y}\qquad \xi_{zy}-\omega_x=\frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$\xi_{zx}+\omega_y=\frac{\partial u_x}{\partial z}\qquad \xi_{xz}-\omega_y=\frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\xi_{xy}+\omega_z=\frac{\partial u_y}{\partial x}\qquad \xi_{yx}-\omega_z=\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

代入（5-30）式中

$$\begin{aligned}\vec{u}_A=&[u_{x0}+(\omega_y\Delta z-\omega_z\Delta y)+\xi_{xx}\Delta x+\xi_{yx}\Delta y+\xi_{zx}\Delta z]\vec{i}\\ &+[u_{y0}+(\omega_z\Delta x-\omega_x\Delta z)+\xi_{xy}\Delta x+\xi_{yy}\Delta y+\xi_{zy}\Delta z]\vec{j}\\ &+[u_{z0}+(\omega_x\Delta y-\omega_y\Delta x)+\xi_{xz}\Delta x+\xi_{yz}\Delta y+\xi_{zz}\Delta z]\vec{k}\end{aligned}\qquad(5\text{-}35)$$

上式表明，A点的速度可以分解为三个部分，分别使流体微团产生（a）平移运动，（b）

绕基点O的旋转运动，（c）变形运动，其中有线变形和角变形。这就是亥姆霍兹(Helmholtz)的速度分解定理。这个定理在流体力学的发展史上起过重要的作用。由于它把旋转运动和变形运动从一般的运动中分离出来，从而大大推动了理想流体力学和粘性流体力学的发展。

如为yOz平面上的平面流动，（5-35）式中$\omega_y=\omega_z=0$，$\xi_{xx}=0$，$\xi_{xz}=\xi_{zx}=\xi_{xy}=\xi_{yx}=0$，故$A$点速度可简化为

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_A &= [u_{y0}-\omega_x\Delta z+\xi_{yy}\Delta y+\xi_{zy}\Delta z]\vec{j}+[u_{z0}+\omega_x\Delta y+\xi_{yz}\Delta y+\xi_{zz}\Delta z]\vec{k} \\
&= \underbrace{(u_{y0}\vec{j}+u_{z0}\vec{k})}_{\vec{u}_0}+\underbrace{(\omega_x\Delta y\vec{k}-\omega_x\Delta z\vec{j})}_{\vec{u}_\omega}+\underbrace{(\xi_{yy}\Delta y\vec{j}+\xi_{zz}\Delta z\vec{k})}_{\vec{u}_{\xi L}} \\
&\quad +\underbrace{(\xi_{zy}\Delta z\vec{j}+\xi_{yz}\Delta y\vec{k})}_{\vec{u}_{\xi a}}=\vec{u}_0+\vec{u}_\omega+\vec{u}_{\xi L}+\vec{u}_{\xi a}
\end{aligned}
\tag{5-36}
$$

式中$\vec{u}_0$、$\vec{u}_\omega$、$\vec{u}_{\xi L}$、$\vec{u}_{\xi a}$分别为产生平移、旋转、线变形和角变形等运动的速度分量。

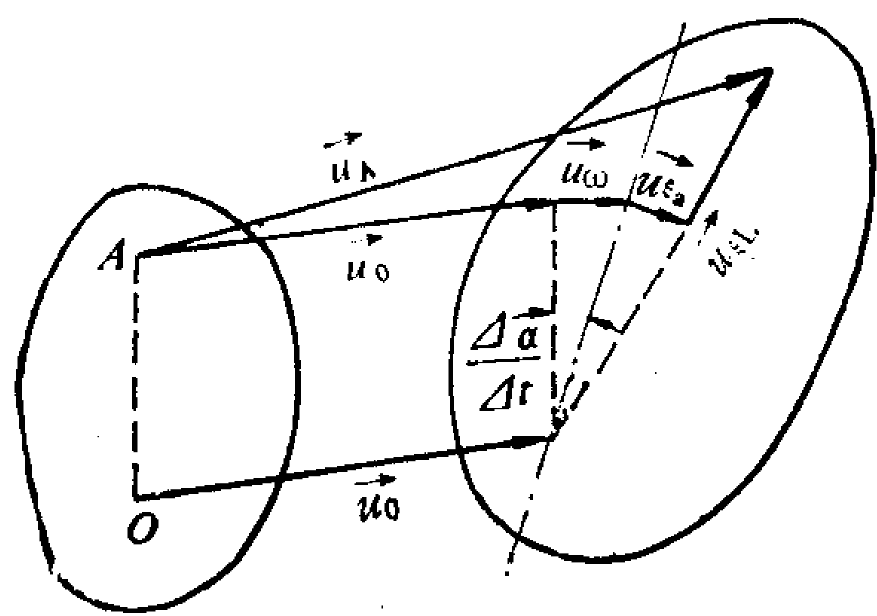


图 5-9 平面流动中速度的分解

（5-36）式和图5-9更直观地表达了速度分解定理。如原来占有s位置的流体微团，经单位时间后移至s'的位置，图中表明了A点的速度如何分解成（5-36）式中的四个分量。$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$为流体微团中的各点在单位时间对O点旋转的平均角度。

§5-5 有旋流动和无旋流动

由速度分解定理得知，旋转角速度矢量$\vec{\omega}$描述了流体微团运动的转动部分，其方向就是流体微团瞬时旋转轴的方向，其大小代表旋转的角速度。根据流体微团在运动过程中是否旋转，又可把流体运动分为两类：有旋流动和无旋流动。若流场中各点的旋转角速度$\vec{\omega}$都等于零，则称此流动为**无旋流动**；反之，就是**有旋流动**。

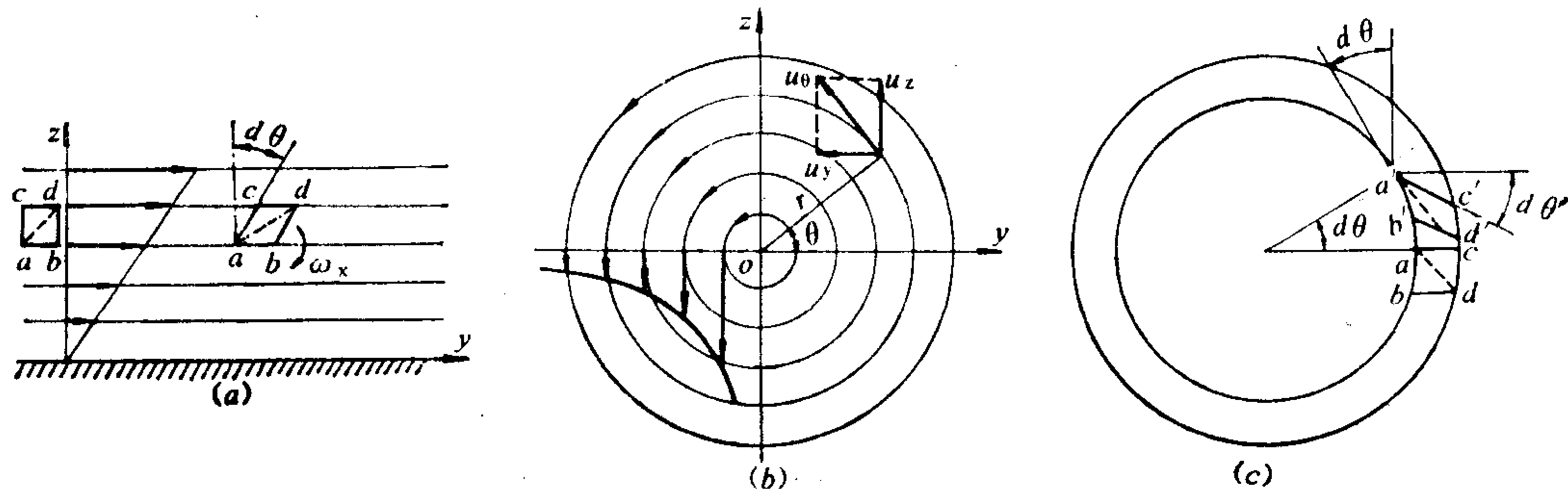


图 5-10 有旋流动和无旋流动

必须指出，判断流动是否有旋要看流体微团是不是在绕通过其自身的瞬时轴自转，而

不是看它有没有绕某一中心作圆周运动。现举例说明这个问题。

设有两个平面流动，其一为均匀剪切流动，它的速度场（图5-10a）为$u_y = az$，$u_x = u_z = 0$，式中a为常数，流线是平行于y轴的直线。

另一个为势涡流动，速度场（图5-10b）为

$$u_r = 0 \qquad u_\theta = \frac{b}{r}$$

式中b也是常数，流线是以原点为中心的同心圆。

这两个流动哪个有旋？哪个无旋？初看起来前一个流动质点作直线运动似乎是无旋的，后一个流体质点作圆周运动似乎是有旋的，但如用（5-32）式来判断，结果并非如此。

对于均匀剪切流动

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{2}\left[0 - \frac{\partial}{\partial z}(az)\right] = -\frac{a}{2} \neq 0$$

流动是有旋的。ω_x为负值，表示流体微团在运动过程中沿顺时针方向旋转。

对于势涡流动

$$u_y = -u_\theta \sin\theta = \frac{-bz}{y^2 + z^2}$$

$$u_z = u_\theta \cos\theta = \frac{by}{y^2 + z^2}$$

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{by}{y^2 + z^2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-bz}{y^2 + z^2}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{b(z^2 - y^2)}{(y^2 + z^2)^2} - \frac{b(z^2 - y^2)}{(y^2 + z^2)^2}\right]$$
$$= 0$$

则是无旋的。

为什么开始的直观判断是错误的呢？原因在于我们错用了刚体绕轴旋转运动的观念来判断流体的旋转运动，忽略了流体的是否有旋是看流体微团是否有绕通过其自身的瞬时轴自转，如在这两个流动中各取一个矩形流体微团$abcd$，现在来分析它们经过dt时间后有没有自转。

在均匀剪切流动中，ab边不会旋转。由于c点速度比a点大，所以ac边沿顺时针方向旋转了$d\theta$角（见图5-10a），这两条边的转角平均值（也就是它们的角平分线的转角）就是$\frac{d\theta}{2}$，流动当然是有旋的。

在势涡流动中，ab边经dt后仍为圆周切线方向，因而它沿逆时针方向转动了$d\theta$角（见图5-10c）

$$d\theta = \frac{u_\theta dt}{r} = \frac{b}{r^2}dt$$

再看ac边，c点的速度比a点小$\frac{\partial u_\theta}{\partial r}dr$，故经$dt$后，$c$点比$a$点落后了$\frac{\partial u_\theta}{\partial r}drdt$的距离，这就使$ac$边顺时针方向旋转了$d\theta'$角

$$d\theta' = -\frac{\partial u_\theta}{\partial r}drdt/dr = -\frac{b}{r^2}dt$$

由于$d\theta = -d\theta'$，ac边与ab边转角的平均值正好等于零，可见流体微团作圆周运动时，虽有角变形运动，但它本身却不在自转，故为无旋运动。

在势涡流场中，也不是所有各点都是无旋的。位于势涡中心的流体微团显然是在自

转，因而是有旋的。所以流体的有旋或无旋，并非指整个流动而言。整个流动可以是某个区域有旋，而其它区域无旋。

分清了流体运动的有旋和无旋之后，下面将分别介绍有旋流动和无旋流动的一些基本概念和性质。

一、有旋流动

（1）涡线、涡管、涡通量

在有旋流动的区域里，任意给定的时刻 t，空间各点都有一个确定的旋转角速度矢量 $\vec{\omega}$，从而又组成一个矢量场，称为涡旋场。它是空间坐标和时间的函数

$$\vec{\omega}=\vec{\omega}(x,y,z,t)$$

既然涡旋场也是一个矢量场，我们就可以像速度场那样引进一些类似的概念。

涡线：涡线是在某一瞬时的涡旋场中所作的一条曲线，位于这条线上的每个质点在该瞬时的旋转角速度矢量 $\vec{\omega}$ 都与此线在该点相切（参见图5-11）。显然涡线是给定瞬时位于其上的所有流体质点的转动轴线。

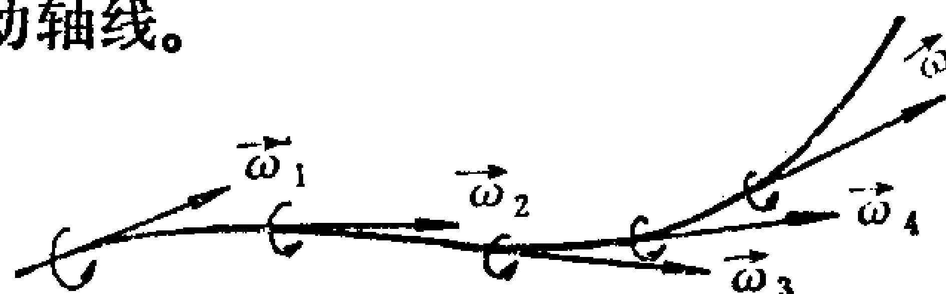


图 5-11 涡线

与流线微分方程类似，涡线微分方程为

$$\frac{dx}{\omega_x}=\frac{dy}{\omega_y}=\frac{dz}{\omega_z} \tag{5-37}$$

由于涡线的瞬时性，涡线方程中的时间变量 t 也是一个参变量，所以在非恒定流中涡线的形状可以随时间变化。在恒定流中，涡线不随时间而变。

涡管：根据涡线的定义，过一点只能作一条涡线。如在涡旋场中任取一不是涡线的封闭曲线，过此曲线上的每一点所作的涡线构成一管状曲面，称为涡管。

断面无限小的涡管称为微小涡管。在微小涡管的每个断面上，流体质点以同一角速度旋转，即 $\vec{\omega}$ 可视为是相等的。但 $\vec{\omega}$ 在微小涡管的沿程是变化的。

涡通量：旋转角速度 $\vec{\omega}$ 与垂直于它的微元面积 dA_n 的乘的两倍称为该微元面积的涡通量，以 dJ 表示

$$dJ=2\omega dA_n$$

如微元面积 dA 不与 $\vec{\omega}$ 垂直，涡通量为

$$dJ=2\vec{\omega}\cdot\vec{n}\,dA \tag{5-38}$$

$\vec{n}$ 为微元面积 dA 的外法线单位矢量

如面积为有限值 A，则涡通量为

$$J=2\int_A\vec{\omega}\cdot\vec{n}\,dA \tag{5-39}$$

（2）速度环量、斯托克斯定理

计算涡通量时，常因旋转角速度矢量 $\vec{\omega}$ 在断面上的分布无法直接获得而遇到困难，故引进速度环量的概念，利用这个概念也可以求得涡通量。

在流场中任取一封闭曲线 L，速度 u 沿此曲线的线积分称为曲线 L 上的速度环量，即

$$\Gamma = \oint_L u\cos\alpha dl = \oint_L \vec{u} \cdot \vec{dl} = \oint_L u_x dx + u_y dy + u_z dz \qquad (5\text{-}40)$$

速度环量是个标量，它的正负决定于速度方向和线积分所绕行的方向。为此一般规定积分时以逆时针方向绕行为正，速度$\vec{u}$在积分线路$\vec{dl}$上的投影与$\vec{dl}$同向为正，反向为负。

如L为单连通域❶中的封闭曲线。根据数学分析中的斯托克斯公式，沿L的线积分可化为以L为边界的曲面A的面积分。

$$\oint_L u_x dx + u_y dy + u_z dz = \iint_A \left[\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) dxdy\right] = 2\int_A \omega_x dA_x + \omega_y dA_y + \omega_z dA_z = 2\int_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA \qquad (5\text{-}41)$$

即
$$\Gamma = J$$

（5-41）式表明，在单连通域中沿任意封闭曲线的速度环量等于通过以此曲线为边界的任意曲面的涡通量（参见图5-12）。这个结论在流体力学中称为**斯托克斯定理**。

（3）涡管强度守恒定理

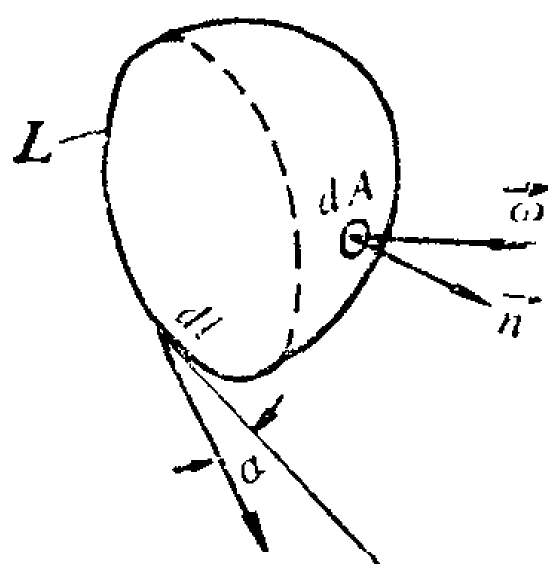


图 5-12　速度环量和涡通量



图 5-13　涡管

涡管有一个重要的运动学性质：在同一瞬时，通过同一涡管沿程各断面的涡通量相等。

涡管的这个性质可以用斯托克斯定理来证明。在涡管沿程任意截取两个断面abc和fed（图5-13）。如在涡管侧面上加两条几乎重合的辅助线af和cd，则$abcdefa$组成一个可收缩为一点的封闭曲线。以这个封闭曲线为边界的曲面就是涡管的侧面。由于没有涡线穿过涡管的侧面，因而沿封闭曲线$abcdefa$的速度环量等于零

$$\Gamma_{abcdefa} = 0 \qquad (5\text{-}42)$$

速度$\vec{u}$沿整个封闭曲线的线积分等于组成它的各线段上$\vec{u}$的线积分之和，即

$$\Gamma_{abcdefa} = \Gamma_{abc} + \Gamma_{cd} + \Gamma_{def} + \Gamma_{fa}$$

在cd和af线段上各对应点的速度可认为相等，而Γ_{cd}与Γ_{fa}的积分方向相反，因而

$$\Gamma_{cd} = -\Gamma_{fa}$$

Γ_{def}是顺针方向绕行的速度环量，如改为逆时针方向，则有

$$\Gamma_{def} = -\Gamma_{fed}$$

将这些关系代入（5-42）式，得

❶ 单连通域是指这样的空间区域，在其内的任意封闭曲线总可以连续收缩为一点而不越过区域的边界。例如一个球面或两个球面所包围的区域是单连通域，而一个环面包围的区域，就不是单连通域。

$$\Gamma_{abc} = \Gamma_{fed}$$

再根据斯托克斯定理，即得

$$J_{abc} = J_{fed}$$

断面abc和fed是任意取的，这就证明了通过同一涡管沿程各断面的涡通量相等。

涡管在同一瞬时只有一个涡通量，因此又把涡管的涡通量称为**涡管强度**，简称**涡强**。

由涡管强度守恒定理可以得到下面的推论：

1）对于同一涡管来说，断面面积越小的地方，流体旋转的角速度越大。

2）涡管不可能在流体内部以尖端形式开始或告终。因为在涡管断面面积趋近于零的地方，流体的旋转角速度趋近于无穷大，这实际上是不可能的。涡管的两端只能附在流体的边界面上，或成为环形。

有旋流动的流动空间，既是速度场，又是涡旋场。涡旋场中的涡线、涡管、涡通量等概念分别相当于速度场中的流线、流管和流量。而涡管强度守恒原理则相当于不可压缩流体总流的连续性方程。

二、无旋流动

流场中各点的旋转角速度矢量$\vec{\omega}$都等于零的流动称为无旋流动。自然界中有很多真实流动非常接近于无旋流动。特别是可忽略其粘性的理想不可压缩流体的流动，如质量力中仅有重力，一般都可认为是无旋流动。不可压缩流体无旋流动的求解要比有旋流动容易得多，现在来讨论这个问题。

在无旋流动中

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = 0$$

也就是

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{5-43}$$

由数学分析得知，（5-43）式是表达式$u_x dx + u_y dy + u_z dz$成为某一函数$\varphi(x, y, z)$的全微分的必要且充分条件。因此，在无旋流动条件下必然存在函数φ，它和速度的关系为

$$d\varphi = u_x ax + u_y dy + u_z dz \tag{5-44}$$

在给定的瞬时，函数φ的全微分又可写成

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

对比上两式，可得

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ u_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ u_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}45)$$

即函数φ在三个坐标轴方向的偏导数分别等于速度在该坐标轴上的投影。函数 φ 与速度的关系类似于势力场中势函数与力的关系，因此称函数 φ 为**速度势函数**，或简称为**速度势**。在非恒定流动中φ还是时间t的函数，即$\varphi(x,y,z,t)$，但一般时间t是作为参变数出现的。

速度势函数φ与速度u的关系如用矢量表示，则为

$$\vec{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = \nabla\varphi \qquad (5\text{-}46)$$

速度势函数的梯度即为速度矢量。

以上讨论可知，只要流动是无旋的，就必然有速度势存在，有势的唯一条件是无旋。因此，无旋流动又称**有势流动**，不论流体是否可压缩，也不论流动是否恒定，都可以是有势流动。

下面进一步讨论速度势函数的性质。

（1）速度势函数在任意方向的偏导数等于速度在该方向的投影。

根据数学分析中关于方向导数的定义，φ在指定方向 $\vec{l}$ 的偏导数为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos\gamma$$

式中α、β、γ分别为$\vec{l}$与三个坐标轴之间的夹角。将（5-45）式代入

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l} = u_x\cos\alpha + u_y\cos\beta + u_z\cos\gamma = u_l$$

（2）流速（或流线）与等势面正交，且指向势函数增加的方向。

无旋流动中速度势函数相等的各点组成的面称为**等势面**。根据（5-44）式

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy + u_z dz = \vec{u}\cdot\vec{dl}$$

如$\vec{dl}$是在等势面上任取的微元线段，则$d\varphi = 0$，故

$$\vec{u}\cdot\vec{dl} = 0$$

因此$\vec{u}$与$\vec{dl}$正交。

在 $d\varphi = \vec{u}\cdot\vec{dl}$式中，如$\vec{dl}$为流线上沿$\vec{u}$指向所取的有向微元线段，因$\vec{u}$与$\vec{dl}$同向，它们之间的夹角为零，故

$$d\varphi = \vec{u}\cdot\vec{dl} = |u|\ |dl|\cos 0° = |u|\ |dl| > 0$$

这表明沿$\vec{u}$的指向，速度势函数是增值的。

（3）在单连通域中，任意两点的速度势函数的差值等于该两点间流速沿任意曲线的线积分。

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_1^2 d\varphi = \int_L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right) = \int_L(u_x dx + u_y dy + u_z dz)$$

$$=\int_L \vec{u}\cdot\vec{dl}$$

这就是说，在单连通域的无旋流动中，流速$\vec{u}$的线积分只取决于起点和终点的位置，与积分所取的路线无关。

如L为封闭曲线，则$\int_L \vec{u}\cdot\vec{dl}=0$。因此在单连通域的无旋流动中，沿任意封闭曲线的速度环量必为零。

（4）如为不可压缩流体，速度势函数是个调和函数，满足拉普拉斯方程。

将（5-45）式代入不可压缩流体的连续性微分方程（5-4）式中，得

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \quad 或 \quad \nabla^2\varphi=0 \tag{5-47}$$

这是拉普拉斯方程，速度势函数满足拉普拉斯方程，因而是调和函数。

从以上的讨论中我们看到，任何一个无旋流动，都可以用一个速度势函数来表示；反之，给定一个速度势函数，也就是确定了一个无旋流动。因此，求解无旋流动的速度问题可归结为求解速度势函数的问题。对于不可压缩流体，又可归结为求解拉普拉斯方程的问题。要求解不可压缩流体有旋流动的速度，必须联立解连续性微分方程和运动微分方程，而运动微分方程又是非线性的，如为无旋流动，只要解一个线性的拉普拉斯方程，这就使问题的求解大为简化。把无旋流动从一般的流动中分离出来，其意义就在于此。

采用柱坐标系时速度势函数是$\varphi=\varphi(r,\theta,z,t)$，它与速度的关系为

$$\left.\begin{aligned} u_r&=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\\ u_\theta&=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\\ u_z&=\frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{5-48}$$

用柱坐标表示的拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0 \tag{5-49}$$

【例 5-4】 已知流场的速度为

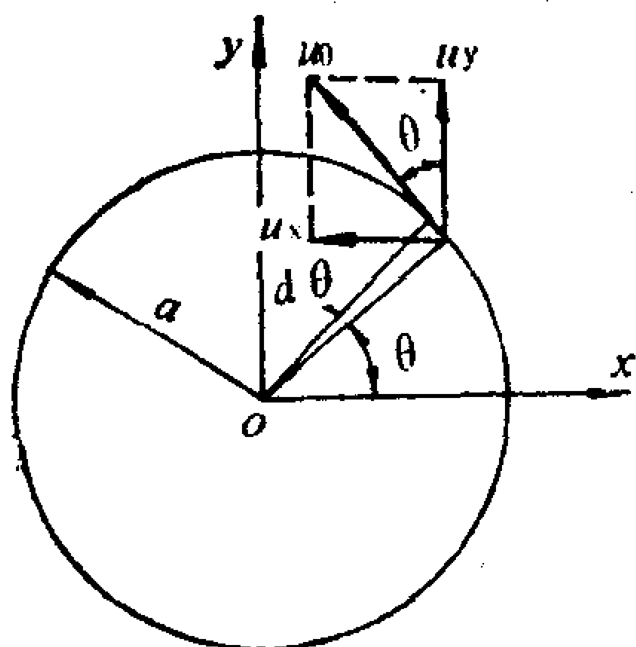
$$u_x=y,\quad u_y=-b^2x,\quad u_z=0$$

式中b为常数，求：

1）流线和涡线；

2）沿曲线$x^2+y^2=a^2$的速度环量；

3）通过上述圆周所包围面积的涡通量。



例 5-4图

【解】 1）求流线和涡线

将速度分量代入流线微分方程（4-12）式

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-b^2x}=\frac{dz}{o}$$

$$-b^2xdx=ydy \qquad dz=0$$

积分上式

$$b^2x^2+y^2=c_1 \qquad z=c_2$$

曲面$b^2x^2+y^2=c_1$与平面$z=c_2$的交线即为流线。因是平面流动，在所有与 xoy 平行的平面上流线都是一样的。

角速度分量为$\omega_x=\omega_y=0$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=-\frac{1+b^2}{2}$$

代入涡线微分方程（5-37）式

$$\frac{dx}{0}=\frac{dy}{0}=-\frac{2dz}{1+b^2}$$

$$dx=0,\quad dy=0$$

积分上式

$$x=c_3 \qquad y=c_4$$

这两组平面的交线就是涡线，它是一组平行于z轴的直线。不难看出，所有平面流动的涡线都是一组垂直于流动平面的直线。

2）求速度环量

积分曲线是一圆周，采用柱坐标系比较方便。为此先求u_θ

$$u_\theta=-u_x\sin\theta+u_y\cos\theta=-a(\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)$$

$$\Gamma=\oint_L\vec{u}\cdot\vec{dl}=\int_0^{2\pi}u_\theta a d\theta=-(1+b^2)\pi a^2$$

3）求涡通量

由于$\omega_z=$常数，故

$$J=2\int_A\omega_z dA=2\omega_z A=-(1+b^2)\pi a^2$$

可见，速度环量与涡通量相等。

【例 5-5】 已知速度场为

$$u_x=2ax+by,\quad u_y=bx-2ay,\quad u_z=0$$

式中a、b为常数。

1）判断流动是否无旋；

2）如为无旋，求速度势函数φ，并检查φ是否满足拉普拉斯方程。

【解】 1）已知流动为平面流动，$\omega_x=\omega_y=0$.

$$w_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}-\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(bx-2ay)-\frac{\partial}{\partial y}(2ax+by)\right]=0$$

速度场为无旋流动，存在速度势函数。

2）因 $u_x=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=2ax+y$

对x积分上式，视y为常数

$$\varphi=\int_{y=\mathrm{const}}(2ax+by)dx=ax^2+bxy+f(y) \qquad (a)$$

而

$$u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=bx+f'(y)$$

由题已知 $$u_y = bx - 2ay$$

因此 $$f'(y) = -2ay \tag{b}$$

积分（b）式 $$f(y) = \int -2ay\,dy = -ay^2 + c \tag{c}$$

速度势函数中的常数，对速度场无影响，可略去。故

$$\varphi = ax^2 + bxy - ay^2$$

检查φ是否满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2ax + by) = 2a$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(bx - 2ay) = -2a$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 2a - 2a = 0$$

满足拉普拉斯方程。

§ 5-6 理想不可压缩流体运动微分方程的积分

不可压缩流体的无旋流动虽然可以由拉普拉斯方程中解出速度势函数φ，从而得到速度的三个分量u_x、u_y、u_z。但要求压强p，还必须把得到的速度代入运动微分方程中再来求解。为了简化这一求解过程，这一节我们将讨论理想流体运动微分方程的积分问题。也就是怎样才能把理想流体运动微分方程简化成有限关系式。

一、葛罗米柯—蓝姆（Громко-Lamb）方程

由§5-2已知，理想流体运动微分方程为

$$\left.\begin{aligned}
f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\
f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\\
f_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{5-14}$$

而流体的速度$u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$，求$\frac{u^2}{2}$在三个坐标的偏导数

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}{2}\right) = u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial x}\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= u_x\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial y}\\
\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right) &= u_x\frac{\partial u_x}{\partial z} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial z} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{5-50}$$

由（5-14）式减去（5-50）式中的各对应关系式

$$f_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_z\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) - u_y\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

$$f_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) - u_z\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

$$f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right)=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_y\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}-\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)-u_x\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}-\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

再将旋转角速度分量的关系式（5-32）代入

$$\left.\begin{aligned}f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)-\frac{\partial u_x}{\partial t}=2(\omega_y u_z-\omega_z u_y)\\ f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u^2}{2}\right)-\frac{\partial u_y}{\partial t}=2(\omega_z u_x-\omega_x u_z)\\ f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u^2}{2}\right)-\frac{\partial u_z}{\partial t}=2(\omega_x u_y-\omega_y u_x)\end{aligned}\right\}\tag{5-51}$$

它的矢量形式是

$$\vec{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p-\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)-\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=2\vec{\omega}\times\vec{u}\tag{5-51'}$$

这就是葛罗米柯—蓝姆形式的理想流体运动微分方程。（5-51）式与（5-14）式虽然本质相同，只是形式作了一些改变，但它在惯性项中把流体质点的旋转部分表示了出来，这就有助于我们分析在什么条件下可以求得该微分方程的第一积分。

二、恒定流中运动微分方程的积分

对葛罗米柯—蓝姆方程（5-51′）式中的各项皆点乘一有向微元线段$\vec{dl}=dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k}$

$$\vec{f}\cdot\vec{dl}-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\vec{dl}-\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)\cdot\vec{dl}-\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\vec{dl}=2(\vec{\omega}\times\vec{u})\cdot\vec{dl}\tag{5-52}$$

现讨论等号左端各项的点乘积：

1）如为恒定流，$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}=0$，因而等式左端第四项$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\vec{dl}=0$。

2）如作用在流体质点上的质量力有势，则质量力在三个坐标轴上的分量分别等于势函数U在各该坐标轴的偏导数

$$f_x=\frac{\partial U}{\partial x},\qquad f_y=\frac{\partial U}{\partial y},\qquad f_z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

于是
$$\vec{f}=f_x\vec{i}+f_y\vec{j}+f_z\vec{k}=\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}=\nabla U$$

即势函数的梯度就是单位质量力矢量。因此

$$\begin{aligned}\vec{f}\cdot\vec{dl}=\nabla U\cdot\vec{dl}&=\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial U}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot(dx\vec{i}+dy\vec{j}+dz\vec{k})\\&=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=dU\end{aligned}$$

可见，某一函数的梯度与有向微元线段的点乘积即为该函数的全微分。

3）如流体不可压缩，密度ρ为常数

$$\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\vec{dl}=\nabla\left(\frac{p}{\rho}\right)\cdot\vec{dl}=d\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

4）同理

$$\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)\cdot\vec{dl}=d\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

因此，对于质量力有势的理想不可压缩流体恒定流动，（5-52）式可写成

$$d\left(U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)=2(\vec{\omega}\times\vec{u})\cdot\vec{dl}$$

上式中如等号右端等于零，积分后得

$$U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}=C_1 \tag{5-53}$$

这个积分称为伯诺里积分。它表明如满足上述的几个条件，且等号右端的 $(\vec{\omega}\times\vec{u})\cdot\vec{dl}=0$，则伯诺里积分所示的有限关系式成立。

什么情况下 $(\vec{\omega}\times\vec{u})\cdot\vec{dl}$ 等于零呢？只有下列四种情况：

1）$\vec{u}=0$，即流体处于静止状态。如质量力中仅有重力，则势函数 $U=-gz+C$，这一情况的伯诺里积分就是第三章中的静水压强基本方程 $z+\frac{p}{\gamma}=$常数。

2）$\vec{\omega}=0$，即无旋流动。

3）如流场中的流线与涡线重合，即流体质点在沿流线前进的过程中同时绕以流线为轴旋转，这种流动称为螺旋流动。在螺旋流动中因矢量 $\vec{\omega}$ 与矢量 $\vec{u}$ 同向，故 $\vec{\omega}\times\vec{u}=0$。

对于以上三种情况，伯诺里积分适用于整个流场的所有各点。

4）如 $\vec{dl}$ 不是空间的任意微元线段，而是沿流线或涡线上取的微元线段，则 $\vec{dl}$ 与 $\vec{u}$ 或 $\vec{\omega}$ 同向。由于 $\vec{\omega}\times\vec{u}$ 是一个矢量，其方向与 $\vec{\omega}$ 和 $\vec{u}$ 所在的平面成正交，因而也与 $\vec{dl}$ 正交。所以 $(\vec{\omega}\times\vec{u})\cdot\vec{dl}$ 也等于零。不过在这种情况下，伯诺里积分只适用于同一条流线或同一条涡线上。对于不同的流线或涡线，伯诺里积分中的积分常数是不同的。

如质量力中仅有重力，将 $U=-gz+C$ 代入（5-53）式，可得重力场中的伯诺里积分

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=C_2 \quad 或 \quad z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g}=C_3 \tag{5-54}$$

不难看出，这个伯诺里积分的物理意义是重力场中的单位质量（或重量）流体的机械能沿同一流线（或涡流）的各点都相等。适用于同一条流线的伯诺里积分实际上就是理想流体元流的伯诺里方程。由前已知，总流是由无数元流组成的，如把元流的伯诺里方程对总流的过流断面积分，求出理想流体总流沿程各断面的平均单位能量关系❶，即可得到前已熟知的理想流体恒定总流的伯诺里方程。

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$$

这就是说，前一章中用有限体分析导出的恒定总流的能量方程，也可以用微元体分析得到。不过，在微元体分析中我们全面地讨论了伯诺里积分存在的条件，从而拓宽了伯诺里方程应用的范围，这是有限体分析中难以做到的。由此可见，微元体分析能更系统、更深刻、更全面地探讨流体运动的规律。但是它的求解过程比较复杂，往往会遇到一些数学上的困难，不如有限体分析简捷实用。所以一般工程问题，除非必要，常用有限体分析来解决。

运动方程表达的是作用于流体上的力与加速度之间的相互关系，为什么由运动方程也能得到反映各种机械能相互转化的能量方程呢？这是因为我们在寻求运动微分方程的积分时，对式中各项点乘了一个有向微元线段，这样就把作用力的关系转变为功能关系。而在推导恒定总流的能量方程时我们把除机械能以外的其它能量形式的转化和传递，都合并到水头损失项中，在理想流体中这一项又未予考虑，因而才会殊途同归，从不同的基本方程

❶ 这个推导过程在其它流体力学或水力学教材中都能找到。

出发，得到了相同的结果。这并不表明能量方程和运动（或动量）方程不是相互独立的方程。

三、非恒定流中运动微分方程的积分

对于理想流体的非恒定流，（5-52）式

$$\vec{f}\cdot\vec{dl}-\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\vec{dl}-\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)\cdot\vec{dl}-\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\vec{dl}=2(\vec{\omega}\times\vec{u})\cdot\vec{dl}$$

仍然适用。只是式中各物理量不仅是空间坐标的函数，同时还是时间的函数。如把时间 t 作为参变数，在同一瞬时对于重力场中的不可压缩流体，下列关系仍成立。

$$\vec{f}\cdot\vec{dl}=f_x dx+f_y dy+f_z dz=-g dz$$

$$\frac{1}{\rho}\nabla p\cdot\vec{dl}=d\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

$$\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)\cdot\vec{dl}=d\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

因此（5-52）式在以下两种情况仍能积分

（1）无旋流动

在无旋流动中存在速度势函数φ，它与速度矢量的关系为

$$\vec{u}=\nabla\varphi$$

而

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\vec{dl}=\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\varphi)\cdot\vec{dl}=\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\cdot\vec{dl}=d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

同时，无旋流动中$\vec{\omega}=0$，（5-52）式中

$$(\vec{\omega}\times\vec{u})\cdot\vec{dl}=0$$

将上述关系代入（5-52）式中，即得

$$d\left(-gz-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}-\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=0$$

积分后

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=C_4(t) \qquad (5\text{-}55)$$

对于重力场中的理想不可压缩流体无旋流动，(5-55)式适用于流场中的所有各点。但式中的各物理量必须是一瞬时的。在不同瞬时有不同的积分常数，故积分常数C_4是时间的函数。（5-55）式也称为科西-拉格朗日（Cauchy-Lagrange）积分

（2）一元流动

对于一元流动，（5-52）式中的$\vec{dl}$即为沿流线取的有向微元线段。基于本节二、4）中所述的理由，$(\vec{\omega}\times\vec{u})\cdot\vec{dl}=0$。

因$\vec{u}$与$\vec{dl}$同向，故（5-52）式左端的第四项就等于该两矢量的模相乘，即

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}\cdot\vec{dl}=\frac{\partial u}{\partial t}dl$$

如质量力中仅有重力，代入（5-52）式后，得

$$d\left(-gz-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}\right)-\frac{\partial u}{\partial t}dl=0$$

沿流线积分

$$\int_{l_1}^{l_2} d\left(gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}\right)+\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial u}{\partial t}dl=0$$

上式也可写成

$$gz_1+\frac{p_1}{\rho}+\frac{u_1^2}{2}=gz_2+\frac{p_2}{\rho}+\frac{u_2^2}{2}+\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial u}{\partial t}dl \tag{5-56}$$

1、2为同一瞬时在流线上任取的两点，沿流动方向看1点在前，2点在后。当然，（5-56）式中的各物理量也必须是同一瞬时的。

如把总流看成是一元流动，以平均速度v代替上式中的点流速u，考虑到一般情况下动能修正系数$\alpha\approx 1$，以及实际液体存在水头损失，则（5-56）式可写成适用于总流的形式

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{v_2^2}{2g}+\frac{1}{g}\int_{l_1}^{l_2}\frac{\partial v}{\partial t}dl+h_w \tag{5-57}$$

这就是在§4-11中已介绍过的不可压缩流体非恒定总流的能量方程。

习　题

5-1　下列各组方程中哪些可用来描述不可压缩流体平面流动？

1）$u_x=2x^2+y^2$；　　$u_y=x^3-x(y^2-2y)$

2）$u_x=2xy-x^2+y$；　　$u_y=2xy-y^2+x^2$

3）$u_x=xt+2y$；　　$u_y=xt^2-yt$

4）$u_x=(x+2y)xt$；　　$u_y=(2x-y)yt$

5-2　下列各组方程中哪些可用来描述不可压缩流体空间流动？

1）$u_x=x+y+z^2$；$u_y=x-y+z$；$u_z=2xy+y^2+4$

2）$u_x=xyzt$；$u_y=-xyzt^2$；$u_z=\frac{1}{2}z^2(xt^2-yt)$

3）$u_x=y^2+2xz$；$u_y=-2yz+x^2yz$　$u_z=\frac{1}{2}x^2z^2+x^3y^4$

5-3　已知不可压缩流体平面流动在y方向的速度分量为　$u_y=y^2-2x+2y$ 求速度在x方向的分量u_x。

5-4　已知不可压缩流体在r、θ方向的速度分量分别为

$$u_r=\frac{4}{r^2};\qquad u_\theta=4r$$

求速度在z方向的分量u_z。

5-5　下列各组方程中哪些可用来描述不可压缩流体的流动？

1）$u_r=U\cos\theta$；　　$u_\theta=-U\sin\theta$

2）$u_r=-\frac{\theta}{2\pi r}$；　　$u_\theta=\frac{k}{2\pi r}$

3）$u_r=U\cos\theta\left[1-\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$；　　$u_\theta=-U\sin\theta\left[1+\left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$

式中U、θ、k、a皆为常数。

5-6　已知速度在r方向的分量为

$$u_r=-A\frac{\cos\theta}{r^2}$$

A为常数，求速度在θ方向的分量。

5-7　已知理想不可压缩流体的速度场为

$$\vec{u}=(A_x-B_y)t\vec{i}+(A_y-B_x)t\vec{j}\quad (\text{m/s})$$

流体密度$\rho=1500\text{kg/m}^3$，式中$A=1\ 1/\text{s}^2$，$B=2\ 1/\text{s}^2$，忽略质量力，求$t=1\text{s}$时，位于$(x, y)=(1m, 2m)$处的压强梯度∇p。

5-8　已知不可压缩流体的速度场为

$$\vec{u}=Ax\vec{i}-Ay\vec{j}\quad (\text{m/s})$$

单位质量力为$-g\vec{k}\ \text{m/s}^2$，位于坐标原点的压强为p_0，求压强的表达式。

5-9　无穷远处来流速度为U_∞，绕过一半径为a的圆球，写出球表面及无穷远处的边界条件。

5-10　已知有旋流动的速度分量为

$$u_x=2y+3z;\qquad u_y=2z+3x;\qquad u_z=2x+3y$$

求旋转角速度分量和角变形率分量。

5-11　下列两个流动哪个有旋？哪个无旋？哪个有角变形？哪个无角变形？

1）$u_x=-ay;\qquad u_y=ax;\qquad u_z=0$

2）$u_x=-\dfrac{Cy}{x^2+y^2};\qquad u_y=\dfrac{Cx}{x^2+y^2};\qquad u_z=0$

式中a、C为常数。

5-12　流场的速度分量为

$$u_x=C\sqrt{y^2+z^2};\qquad u_y=u_z=0$$

C为常数，求旋转角速度。

5-13　设流场的速度分量为

$$u_x=-ky;\qquad u_y=kx;\qquad u_z=\sqrt{\phi(z)-2k^2(x^2+y^2)}$$

式中$\phi(z)$是z的任意函数，k为常数。试证明这是一个流线与涡线重合的螺旋流动。计算旋转角速度$\vec{\omega}$与速度$\vec{u}$的绝对值的比值$\dfrac{\omega}{u}$。

5-14　已知圆管中液体在过流断面上的速度分布为

$$u_z=\frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2-r^2);\qquad u_y=u_x=0$$

式中γ、J、μ、r_0皆为常数，$r^2=x^2+y^2$，求涡线方程。

5-15　设速度场为

$$\vec{u}=(y+2z)\vec{i}+(z+2x)\vec{j}+(x+2y)\vec{k}$$

求涡线方程。若涡管断面面积$dA=10^{-4}\text{m}^2$，求涡通量dJ。

5-16　设在半径$R=0.5\text{m}$的圆周上，平面流动的切线速度为

1）$u_\theta=2\text{m/s}$；　　2）$u_\theta=2U_\infty\sin\theta$

式中U_∞为常数。求两种情况沿圆周的速度环量。

5-17　已知不可压缩流体平面流动的速度势函数为$\varphi=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，求离原点0.5m处流体的速度。

5-18　已知速度势函数为$\varphi=\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$，求速度场，并绘出流动图形。

5-19　有一平面势流，其速度势为$\varphi=K\theta$，式中K为常数，θ为极角，试求：

1）沿圆周$x^2+y^2=R^2$的环量；

2）沿圆周$(x-a)^2+y^2=R^2$的环量（$R<a$）。

5-20　不可压缩流体无旋流动的速度分量为

$$u_x=x^2-y^2;\qquad u_y=-2xy;\qquad u_z=0$$

求速度势φ。

5-21 有一半径为a的圆柱，在静止的理想流体中以速度U沿y方向作匀速直线运动，写出圆柱表面及无穷远处速度势φ的边界条件。

5-22 已知不可压缩流体平面无旋流动在x方向的速度分量为

$$u_x = yt - x$$

如$t=0$时，$x=0$、$y=0$处$u_y=0$，求速度势φ。

5-23 已知不可压缩流体的速度场为

$$\vec{u} = Ax^2y^2\vec{i} - Bxy^3\vec{j} \quad (\mathrm{m/s})$$

式中$A=3\ 1/\mathrm{m^3 \cdot s}$，$B=2\ 1/\mathrm{m^3 \cdot s}$

1）求流体微团的旋转角速度$\vec{\omega}$；

2）如不计质量力，能否求出点（0，0，0）和点（1，1，1）的压强差？如能，请求出；如不能，请说明原因。

5-24 在柱坐标系中流体微团旋转角速度的表达式为

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)\vec{e_r} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (ru_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right)\vec{e_z}\right]$$

式中$\vec{e_r}$、$\vec{e_\theta}$、$\vec{e_z}$为r、θ、z方向的单位矢量。试问下列两个流动哪个可使用伯诺里积分计算任意两不同点的压强差？

1）$\vec{u} = \Omega r\vec{e_\theta}$　2）$\vec{u} = \dfrac{k}{2\pi r}\vec{e_\theta}$

Ω与k为常数。

第六章　量纲分析和相似原理

前面几章建立了描述流体运动的基本方程，应用基本方程求解，是解决流体力学问题的基本途径。但是，对复杂的实际工程问题，由于求解基本方程在数学上极其困难，往往需要应用定性的理论分析方法和实验方法进行研究。

量纲分析和相似原理，为科学地组织实验，简化实验过程及整理实验成果提供理论指导。对于复杂的流动问题，还可以借助量纲分析和相似原理来寻求物理量之间的联系，建立关系式的结构。量纲分析和相似原理是发展流体力学理论，以及解决复杂工程问题的有力工具。因此，在前面几章学习了流体运动的基本原理以后，学习量纲分析和相似原理的基础知识，将为以后分析研究各种复杂的流动问题作准备。

§ 6-1　量纲分析的意义和量纲和谐原理

一、量纲的概念

（1）量纲的概念

在流体力学中涉及到各种不同的物理量，如长度、时间、质量、力、速度、加速度、粘滞系数等等，所有这些物理量都是由自身的物理属性（或称类别）和为量度物理属性而规定的量度标准（或称量度单位）两个因素构成的，例如长度，它的物理属性是线性几何量，量度单位则有米、厘米、英尺、光年等不同量度标准。物理量的一般构成因素为：

$$\text{物理量 } q\begin{Bmatrix}\text{属性}[q]\\ \text{量度单位}\end{Bmatrix}$$

我们把物理量的物理属性(类别)称为**量纲**或**因次**。显然，量纲是物理量的实质，不含有人为的影响。通常在物理量外加方括号，表示该物理量的量纲，如$[q]$表示物理量q的量纲。对力学中经常遇到的物理量，习惯上用$[L]$代表长度的量纲，$[M]$代表质量的量纲，$[T]$代表时间的量纲，$[F]$代表力的量纲。不具量纲的量称为**无量纲量**，就是纯数，如圆周率π＝圆周长/直径＝3.14159…，角度α＝弧长/曲率半径，都是无量纲量。

单位是人为规定的量度标准，例如现行的长度单位米，最初是1791年法国国民议会通过的，经过巴黎地球子午线长的4000万分之一，1960年第11届国际计量大会重新规定为氪同位素（K^{86}）原子辐射波的1650763.73个波长。因为有量纲量要由量纲和单位两个因素来决定，因此含有人的意志影响。

（2）基本量纲与导出量纲

一个力学过程所涉及的各物理量，量纲之间是有联系的。例如速度的量纲就是同长度的量纲和时间的量纲相联系的$[v]=[L]/[T]$。根据物理量量纲之间的关系，把没有任何联系的、独立的量纲作为**基本量纲**，可以由基本量纲导出的量纲就是**导出量纲**。从原则上说，基本量纲的选取带有任意性，例如，取长度$[L]$和时间$[T]$作为基本量纲，则速度

$[v]$是导出量纲$[v]=[L]/[T]$；若取长度和速度作为基本量纲，那么时间便是导出量纲，$[T]=[L]/[v]$。为了应用方便，一般多采用M-L-T-Θ基本量纲系，即选取质量$[M]$、长度$[L]$、时间$[T]$、温度Θ为基本量纲。对于不可压缩流体运动，一般取质量$[M]$、长度$[L]$、时间$[T]$为基本量纲，其它物理量量纲均为导出量纲。例如：

速度$[v]=[LT^{-1}]$；

加速度$[a]=[LT^{-2}]$；

力$[F]=[MLT^{-2}]$；

动力粘滞系数$[\mu]=[ML^{-1}T^{-1}]$。

综合以上各量纲式，不难得出，某一物理量q的量纲$[q]$都可用3个基本量纲的指数乘积形式表示

$$[q]=[L^{\alpha}T^{\beta}M^{\gamma}] \tag{6-1}$$

（6-1）式称为**量纲公式**，物理量q的性质由量纲指数α、β、γ决定：当$\alpha\neq 0$，$\beta=0$，$\gamma=0$，q为几何量；当$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$，$\gamma=0$，q为运动学量；当$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$，$\gamma\neq 0$，q为动力学量。

二、无量纲量

当量纲公式（6-1）式中，各量纲指数为零，即$\alpha=\beta=\gamma=0$，则$[q]=[L^0T^0M^0]=[1]$，物理量q是无量纲量，也就是纯数。无量纲数可由两个具有相同量纲的物理量相比得到，如线应变$\varepsilon=\Delta l/l$，$[\varepsilon]=[L/L]=[1]$；无量纲量也可由几个有量纲量乘除组合，使组合量的量纲指数为零得到，例如对有压管流，由断面平均速度v、管道直径d、流体的运动粘滞系数ν乘除组合

$$\mathrm{Re}=\frac{vd}{\nu}$$

量纲

$$[\mathrm{Re}]=\left[\frac{vd}{\nu}\right]=\frac{[LT^{-1}][L]}{[L^2T^{-1}]}=[1]$$

Re是由三个有量纲量乘除组合得到的无量纲数，称为雷诺数。关于雷诺数的意义，后面还要详细讨论。

依据无量纲量的定义和构成，可归纳出无量纲量具有以下特点：

1）客观性　正如上文指出，凡有量纲的物理量，都有单位，同一个物理量，因选取的量度单位不同，数值也不同。如果用有量纲量作运动的自变量，计算出的因变量数值就随自变量选取单位的不同而不同。因此，要使描述运动规律的方程式的计算结果，不受人主观选用单位的影响，就需要将方程中各项物理量组合成无量纲项，从这个意义上说，真正客观的方程式应是由无量纲项组成的方程式。

2）不受运动规模影响　既然无量纲量是纯数，数值大小与度量单位无关，不受运动规模的影响，规模大小不同的流动，如两者是相似的流动，则相应的无量纲数相同。在模型实验中，常用同一个无量纲数（如Re数），作为模型和原型流动相似的判据。

3）可进行超越函数运算　由于有量纲量只能作简单的代数运算，作对数、指数、三角函数运算是没有意义的，只有无量纲化才能进行超越函数运算，如气体等温压缩功计算式

$$W=p_1V_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

其中压缩后与压缩前的体积比V_2/V_1组成无量纲项，进行对数运算。

三、量纲和谐原理

量纲和谐原理是量纲分析的基础。量纲和谐原理是指：凡正确反映客观规律的物理方程，其各项的量纲一定是一致的。这是被无数事实证实了的客观原理。例如在第四章导出的不可压缩流体恒定总流的能量方程（4-38）式

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

式中各项的量纲一致，都是线性几何量$[L]$。又如第五章中，不可压缩流体运动微分方程（N-S方程）（5-13）式，它在x方向的形式为

$$f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u_x=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}$$

式中各项的量纲均为$[LT^{-2}]$。其它凡正确反映客观规律的物理方程，量纲之间的关系莫不如此。在工程界至今还有单纯依靠实验和观测资料整理成的经验公式，不满足量纲和谐，像在市政工程中计算给水管道水头损失的海曾-威廉（Hazen-Williams）公式

$$v=0.35464cd^{0.63}J^{0.54}$$

式中v为平均流速（m/s）；c为反映管壁粗糙影响的系数；d为管径(m)；J为水力坡度。这种情况表明，人们对这一部分流动的认识尚不充分，这样的公式将逐步被修正或被正确完整的公式所代替。

由量纲和谐原理，可引伸出以下两点：

1）凡正确反映客观规律的物理方程，都可以表示成由无量纲项组成的无量纲方程。因为方程中各项的量纲相同，用其中的一项遍除各项，就可得到一个由无量纲项组成的无量纲式，仍保持原方程的性质。

2）量纲和谐原理规定了一个物理过程有关物理量之间的关系。说明一个正确、完整的物理方程式中，各物理量量纲之间的联系是确定的，因此，可以按照物理量量纲之间的这一规律性，建立表征物理过程的方程。量纲分析法就是根据这一原理发展起来的，它是本世纪初在力学上的重要发现之一。

§6-2 量纲分析法

在量纲和谐原理基础上发展起来的量纲分析法有两种。一种称雷利(Rayleigh)法，适用于比较简单的问题。另一种称π定理或称布金汉（Buckingham）原理，是一种具有普遍性的方法。

一、雷利法

雷利法的基本概念是某一物理过程同几个物理量有关

$$f(q_1 q_2 \cdots\cdots q_n)=0$$

其中的一个物理量q_i可表示为其它物理量的指数乘积的形式

$$q_i=Kq_1^a q_2^b\cdots\cdots q_{n-1}^p \tag{6-2}$$

写出量纲式

$$[q_i]=K[q_1]^a[q_2]^b\cdots\cdots[q_{n-1}]^p$$

将以上量纲式中各物理量的量纲按照（6-1）式表示为基本量纲的指数乘积形式，并根据

量纲和谐关系，确定指数a、b……p，就可得出表达该物理过程的方程式。

下面通过例题说明雷利法的应用步骤。

【例 6-1】 求水泵输出功率表达式，水泵输出功率N指单位时间水泵输出的 能量。

【解】 1）找出影响水泵输出功率N的各物理量，包括水的重度γ、流量Q、扬程H。即

$$f(N、\gamma、Q、H)=0$$

2）写出指数乘积关系式

$$N=K\gamma^{a}Q^{b}H^{c}$$

3）写出量纲式

$$[N]=[\gamma]^{a}[Q]^{b}[H]^{c}$$

4）以基本量纲（M、L、T）表示各物理量量纲

$$[ML^{2}T^{-3}]=[ML^{-2}T^{-2}]^{a}[L^{3}T^{-1}]^{b}[L]^{c}$$

5）根据量纲和谐求量纲指数

M：　$1=a$

L：　$2=-2a+3b+c$

T：　$-3=-2a-b$

得$a=1,b=1,c=1$。

6）整理方程式

$$N=K\gamma QH$$

K为由实验确定的系数。

【例 6-2】 求圆管层流的流量关系式。

【解】 1）找出影响圆管层流流量Q的各物理量，包括管段两端的压强差Δp、管段长l、管道半径r_0、流体的动力粘滞系数μ。根据经验和已有资料的分析，得知流量Q与两端压强差Δp成正比，与管段长l成反比。因此，可将Δp、l归并为一项$\Delta p/l$，即

$$f(Q、\Delta p/l、r_0、\mu)=0$$

2）写出指数乘积关系式

$$Q=K\left(\frac{\Delta p}{l}\right)^{a}r_0^{b}\mu^{c}$$

3）写出量纲式

$$[Q]=\left[\frac{\Delta p}{l}\right]^{a}[r_0]^{b}[\mu]^{c}$$

4）以基本量纲（M、L、T）表示各物理量量纲

$$[L^{3}T^{-1}]=[ML^{-2}T^{-2}]^{a}[L]^{b}[ML^{-1}T^{-1}]^{c}$$

5）根据量纲和谐求量纲指数

M：　$0=a+c$

L：　$3=-2a+b-c$

T：　$-1=-2a-c$

得$a=1$，$b=4$，$c=-1$

6）整理方程式

$$Q = K\left(\frac{\Delta p}{l}\right) r_0^4 \mu^{-1} = K \frac{\Delta p r_0^4}{l\mu}$$

K为由实验确定的系数，$K = \frac{\pi}{8}$，

则
$$Q = \frac{\pi}{8} \frac{\Delta p r_0^4}{l\mu}$$

或
$$v = \frac{\gamma J}{8\mu} r_0^2 \qquad J = \frac{\Delta p/\gamma}{l}$$

由以上例题可以看出，用雷利法求物理过程方程式，有关物理量不超过四个．需要确定的量纲指数不超过三个时，可直接根据量纲和谐，求出待求的量纲指数，建立方程如[例6-1]。当过程物理量超过四个时，则需要归并有关量或选待定系数如[例6-2]。

二、π定理

π定理又称布金汉原理，是量纲分析更为普遍的原理。π定理指出：若某一物理过程包含n个物理量，即

$$f(q_1 q_2 \cdots\cdots q_n) = 0$$

其中有m个基本量（量纲独立，不能相互导出的物理量），则该物理过程可由n个物理量构成的（$n-m$）个无量纲量所表达的关系式来描述。即

$$F(\pi_1 \cdots\cdots \pi_{n-m}) = 0 \tag{6-3}$$

由于无量纲项用π来表示，这个定理又称为π定理。π定理可用数学方法证明，这里从略。

π定理的应用步骤：

1）找出对物理过程有影响的物理量

$$f(q_1 q_2 \cdots\cdots q_n) = 0$$

2）从n个物理量中选取m个量纲相互独立的基本量，对于不可压缩流体运动，一般$m=3$。设$q_1 q_2 q_3$为所选基本量，由量纲公式（6-1）

$$[q_1] = [L^{\alpha_1} T^{\beta_1} M^{\gamma_1}]$$
$$[q_2] = [L^{\alpha_2} T^{\beta_2} M^{\gamma_2}]$$
$$[q_3] = [L^{\alpha_3} T^{\beta_3} M^{\gamma_3}]$$

满足$q_1 q_2 q_3$量纲独立的条件是量纲式中的指数行列式不等于零，即

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

对于不可压缩流体运动，通常选取速度$v(q_1)$、密度$\rho(q_2)$、特征长度$l(q_3)$为基本量。

3）基本量依次与其余量组成π项

$$\pi_1 = \frac{q_4}{q_1^{a_1} q_2^{b_1} q_3^{c_1}}$$

$$\pi_2 = \frac{q_5}{q_1^{a_2} q_2^{b_2} q_3^{c_2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\pi_{n-3} = \frac{q_n}{q_1^{a_{n-3}} q_2^{b_{n-3}} q_3^{c_{n-3}}}$$

4）满足π为无量纲量，按量纲和谐条件决定各π项指数a、b、c。

5）整理方程式。

【例 6-3】 求有压管流压强损失表达式

【解】 1）找出有关量：由经验和已有资料的分析可知，管流的压强损失Δp与流体的性质（密度ρ、运动粘滞系数ν）、管道条件（管长l、直径d、、管壁粗糙度Δ），以及流动情况（流速v）有关，有关量数$n=7$。

$$f(\Delta p、\rho、\nu、l、d、\Delta、v)=0$$

2）选基本量：在有关量中选v、d、ρ为基本量，基本量数$m=3$。

3）组成π项：π数为$n-m=4$个

$$\pi_1=\frac{\Delta p}{v^{a_1}d^{b_1}\rho^{c_1}}$$

$$\pi_2=\frac{\nu}{v^{a_2}d^{b_2}\rho^{c_2}}$$

$$\pi_3=\frac{l}{v^{a_3}d^{b_3}\rho^{c_3}}$$

$$\pi_4=\frac{\Delta}{v^{a_4}d^{b_4}\rho^{c_4}}$$

4）决定各π项指数：根据量纲和谐

π_1：$[\Delta p]=[v]^{a_1}[d]^{b_1}[\rho]^{c_1}$

$[ML^{-1}T^{-2}]=[LT^{-1}]^{a_1}[L]^{b_1}[ML^{-3}]^{c_1}$

M：$1=c_1$

L：$-1=a_1+b_1-3c_1$

T：$-2=-a$

得 $a_1=2$，$b_1=0$，$c_1=1$

$$\pi_1=\frac{\Delta p}{v^2\rho}$$

π_2：$[\nu]=[v]^{a_2}[d]^{b_2}[\rho]^{c_2}$

$[L^2T^{-1}]=[LT^{-1}]^{a_2}[L]^{b_2}[ML^{-3}]^{c_2}$

L：$2=a_2+b_2-3c_2$

T：$-1=-a_2$

M：$0=c_2$

得 $a_2=1$ $b_2=1$ $c_2=0$

$$\pi_2=\frac{\nu}{vd}$$

π_3：$[l]=[v]^{a_3}[d]^{b_3}[\rho]^{c_3}$

$[L]=[LT^{-1}]^{a_3}[L]^{b_3}[ML^{-3}]^{c_3}$

得 $a_3=0$ $b_3=1$ $c_3=0$

$$\pi_3=\frac{l}{d}$$

π_4：$[\Delta]=[v]^{a_4}[d]^{b_4}[\rho]^{c_4}$

$[L]=[LT^{-1}]^{a_4}[L]^{b_4}[ML^{-3}]^{c_4}$

得 $a_4=0$ $b_4=1$ $c_4=0$

$$\pi_4 = \frac{\Delta}{d}$$

5）整理方程式：

$$f\left(\frac{\Delta p}{v^2\rho},\ \frac{\nu}{vd},\ \frac{l}{d},\ \frac{\Delta}{d}\right)=0$$

$$f_1\left(\frac{\Delta p}{v^2\rho},\ \frac{vd}{\nu},\ \frac{l}{d},\ \frac{\Delta}{d}\right)=0$$

对Δp求解

$$\frac{\Delta p}{v^2\rho}=f_2\left(\frac{vd}{\nu},\ \frac{l}{d},\ \frac{\Delta}{d}\right)$$

Δp与管长 l 成比例，将l/d项移至函数式外面

$$\frac{\Delta p}{v^2\rho}=f_3\left(\frac{vd}{\nu},\ \frac{\Delta}{d}\right)\frac{l}{d}$$

$$\frac{\Delta p}{\gamma}=f_4\left(\mathrm{Re},\frac{\Delta}{d}\right)\frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}=\lambda\frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g} \tag{6-4}$$

$$\lambda=f_4\left(\mathrm{Re},\frac{\Delta}{d}\right)$$

上式就是管道沿程损失的计算公式，又称为达西-魏斯巴哈（Darcy-Weisbach）公式。其中λ称为沿程阻力系数，一般情况下是雷诺数Re和管壁相对粗糙度Δ/d的函数。

【例 6-4】 为了实验研究水流对光滑球形潜体的作用力，要求预先提出实施本实验研究的方法。

【解】 水流对光滑球形潜体的作用力D与流速v、潜体直径d、水的密度ρ，水的动力粘滞系数μ等因素有关，即

$$D=f(v,\ d,\ \rho,\ \mu)$$

怎样进行实验以求得D与各量的关系呢？不熟悉量纲分析方法的初学者，会认为既然作用力D与四个因素（v、d、ρ、μ）有关，要找出全部函数关系，就要分别对每个变量（保持其余三个因素不变）作实验，根据各量的实验结果，再整理成方程式。这样组织实验研究虽然也是可行的，但所用的方法是原始的和费力的，完成实验所需要的时间，至少要四倍于真正需要的时间。

应用量纲分析方法，找出有关量

$$f(D、v、d、\rho、\mu)=0$$

由π定理，选取v、d、ρ为基本量，组成各π项

$$\pi_1=\frac{D}{v^{a_1}d^{b_1}\rho^{c_1}}$$

$$\pi_2=\frac{\mu}{v^{a_2}d^{b_2}\rho^{c_2}}$$

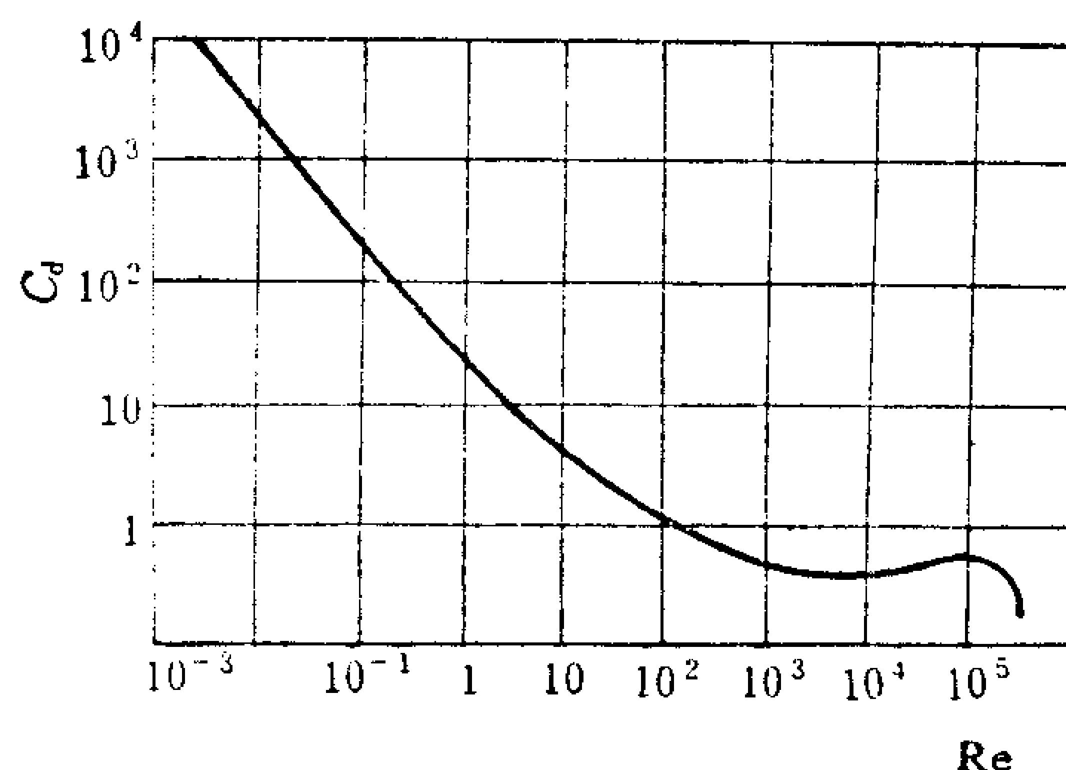
按量纲和谐，决定各π项指数

$$a_1=2\quad b_1=2\quad c_1=1$$

$$a_2=1\quad b_2=1\quad c_2=1$$

整理方程式

$$f\left(\frac{D}{v^2d^2\rho},\ \frac{\mu}{vd\rho}\right)=0$$



例 6-4 图

$$\frac{D}{v^2 d^2 \rho}=f_1\left(\frac{\mu}{vd\rho}\right)$$

$$D=f_2\left(\frac{vd\rho}{\mu}\right)\rho v^2 d^2=f_2(\mathrm{Re})\rho v^2 d^2$$

$$=f_2(\mathrm{Re})\ \frac{8}{\pi}\ \frac{\pi d^2}{4}\ \frac{\rho v^2}{2}=c_d A\frac{\rho v^2}{2} \tag{6-5}$$

式中 $c_d=f_2(\mathrm{Re})\cdot\frac{8}{\pi}=F(\mathrm{Re})$

通过上面的分析可知，实验研究水流对光滑球形潜体的作用力，归结为由实验测定阻力系数c_d与雷诺数的关系。这样一来，实施这项实验研究，只需要用一个球，在一个温度的水中实验，通过改变水流速度，整理成不同雷诺数$\mathrm{Re}=vd\rho/\mu$和阻力系数c_d的实验曲线，如例6-4图所示。（6-5）式及例6-4图用于流体对光滑球形潜体的作用力计算对任何绝对尺寸的球体和不同粘滞系数的流体都是有效的。

三、量纲分析方法的讨论

这两节简要介绍了量纲分析方法，下面再作几点讨论。

1）量纲分析方法的理论基础是量纲和谐原理，即凡正确反映客观规律的物理方程，量纲一定是和谐的。本书中对量纲公式（6-1）式及（6-2）、（6-3）式限于篇幅均未作详细证明。

2）量纲和谐原理是判别经验公式是否完善的基础。上个世纪，量纲分析原理未发现之前，在工程流体力学中积累了不少纯经验公式，每一个经验公式都有一定的实验根据，都可用于一定条件下流动现象的描述，这些公式孰是孰非无所适从。量纲分析方法可以从量纲理论作出判别和权衡，使其中的一些公式从纯经验的范围内解脱出来。

3）应用量纲分析方法得到的物理方程式是否符合客观规律，和所选入的物理量是否正确有关，而量纲分析方法本身对有关物理量的选取却不能提供任何指导和启示，这样一来，很可能由于遗漏某一个具有决定性意义的物理量导致建立的方程式失误，也可能因选取了没有决定性意义的物理量，造成方程中出现累赘的量纲量，这种局限性是方法本身决定的。研究量纲分析方法的前驱者之一雷利，在分析流体流过恒温固体的热传导问题时，就曾遗漏了液体粘滞系数μ的影响，而导出一个不全面的物理方程式。弥补量纲分析方法的局限性，需要已有的理论分析和实验成果，要依靠我们的经验和对流动现象的观察理解能力。

4）由[例6-4]可以看出，量纲分析为组织实施实验研究，以及整理实验数据提供了科学的方法，可以说量纲分析方法是沟通流体力学理论和实验之间的桥梁。

§6-3 相似理论基础

前面讨论了应用量纲分析原理建立运动方程式，以及组织实验和整理实验数据的方法。本章后两节继续讨论模型试验的基本原理。现代许多工程实际问题，由于流动情况十分复杂，无法直接应用基本方程式求解，而有赖于实验研究。大多工程实验是在模型上进行的，所谓模型通常是指与原型（工程实物）有同样的运动规律、各运动参数存在固定比例关系的缩小物。通过模型试验，把研究结果换算为原型流动，进而预测在原型流动中将

要发生的现象。怎样才能保证模型和原型具有同样的流动规律呢？关键是模型和原型为相似的流动，只有这样的模型才是有效的模型，实验研究才有意义。而相似理论就是研究相似现象之间的联系的理论，是模型实验的理论基础。

一、相似概念

流动相似概念原是几何相似概念的推广和发展。两个几何图形，如果对应边成比例，对应角相等，这两个图形就是几何相似的图形。例如两张用同一投影方式绘制的不同比例尺的地图，由同一张底片冲洗的不同尺寸的照片，都是几何相似图形。对于两个几何相似图形，把其中一个图形的某一几何长度，乘以比例常数，就得到另一图形的相应长度。同流体运动有关的物理量，除了几何量（长度、面积、体积）之外，还有运动量（速度、加速度）和力，由此，流体力学相似扩展为以下四方面内容。

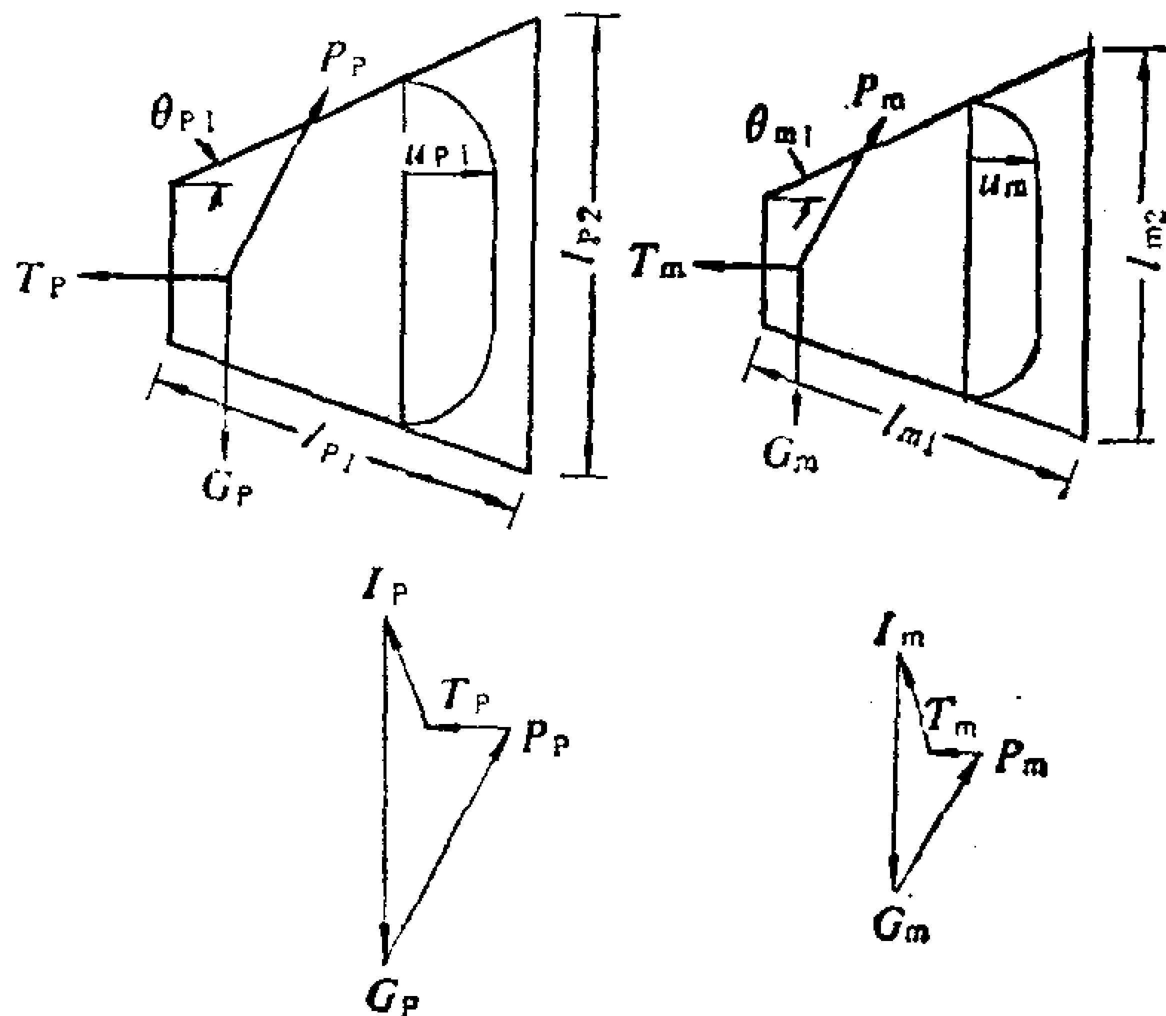


图 6-1 原型和模型流动

（1）几何相似

几何相似指两个流动(原型和模型)流场的几何形状相似。即相应线段长度成比例，夹角相等。如原型和模型流动如图 6-1 所示。

以角标p表示原型，m表示模型，则是

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{l_{p1}}{l_{m1}}=\dfrac{l_{p2}}{l_{m2}}=\cdots\cdots=\dfrac{l_p}{l_m}=\lambda_l\\ \theta_{p1}=\theta_{m1}\qquad \theta_{p2}=\theta_{m2}\end{array}\right\}\tag{6-6}$$

λ_l称为长度比尺。由此，可推得相应的面积比尺和体积比尺。

面积比尺 $$\lambda_A=\frac{A_p}{A_m}=\frac{l_p^2}{l_m^2}=\lambda_l^2$$

体积比尺 $$\lambda_V=\frac{V_p}{V_m}=\frac{l_p^3}{l_m^3}=\lambda_l^3$$

可见几何相似是通过长度比尺λ_l来表征的，只要各相应长度都保持固定的比尺关系λ_l，便保证了两个流动几何相似。

（2）运动相似

运动相似指两个流动相应点速度方向相同，大小成比例，即

$$\lambda_u=\frac{u_p}{u_m}$$

λ_u称为速度比尺。由于各相应点速度成比例，所以相应断面的平均速度比有同样的比尺

$$\lambda_u=\frac{u_p}{u_m}=\frac{v_p}{v_m}=\lambda_v$$

将$v=l/t$关系代入上式

$$\lambda_v=\frac{l_p/t_p}{l_m/t_m}=\frac{l_p}{l_m}\frac{t_m}{t_p}=\frac{\lambda_l}{\lambda_t}$$

$\lambda_t=\frac{t_p}{t_m}$称为时间比尺，满足运动相似应有固定的长度比尺和时间比尺。

速度相似就意味着加速度相似，加速度比尺为

$$\lambda_a=\frac{a_p}{a_m}=\frac{v_p/t_p}{v_m/t_m}=\frac{v_p}{v_m}\frac{t_m}{t_p}=\frac{\lambda_l}{\lambda_t^2}$$

（3）动力相似

动力相似指两个流动相应点处质点受同名力作用，方向相同，大小成比例。根据达朗伯原理，对于任一运动的质点，设想加上该质点的惯性力，则惯性力与质点所受作用力平衡，形式上构成封闭力多边形。从这个意义上说，动力相似表征为流体相应点上的力多边形相似，相应边（即同名力）成比例，见图6-1。

一般影响流体运动的作用力主要是粘滞力、重力、压力，对于有些流动还需考虑弹性力或表面张力，若分别以T、G、P、P_E、T_W和I代表粘滞力、重力、压力、弹性力、表面张力和惯性力，则有

$$\vec{T}+\vec{G}+\vec{P}+\cdots\cdots+\vec{I}=0$$

$$\frac{T_p}{T_m}=\frac{G_p}{G_m}=\frac{P_p}{P_m}=\cdots\cdots\cdots=\frac{I_p}{I_m} \tag{6-7}$$

$$\lambda_T=\lambda_G=\lambda_p=\lambda_E=\lambda_\sigma=\lambda_I$$

（4）边界条件和初始条件相似

边界条件相似指两个流动相应边界性质相同，如原型中的固体壁面，模型相应部分也是固体壁面；原型中的自由液面，模型相应部分也是自由液面。对于非恒定流动，还要满足初始条件相似。

在有的书籍中，将边界条件相似归于几何相似，对于恒定流动又无需初始条件相似，这样流体力学相似的涵义简述为几何相似、运动相似、动力相似三方面。

以上就是力学相似的涵义，它表明凡力学相似的运动必是几何相似、运动相似、动力相似的运动。

二、相似准则

以上说明了相似的涵义，这实际上是力学相似的后果，重要的问题是怎样来实现两个流动的力学相似呢？

首先要满足几何相似。否则两个流动无相应点，当然无相似可言，可以说几何相似是力学相似的前提条件。

其次要实现动力相似。两个流动要想实现动力相似，前面定义的各项比尺之间必须符合一定的约束关系，我们把这种约束关系称为相似准则。相似准则可以由三种途径确定。

（1）由运动微分方程推导相似准则

如前所述，两个流动动力相似，相应质点上所受诸力及惯性力成比例。粘性流体运动微分方程式（N-S方程）是作用在流体质点上的作用力和惯性力的平衡方程式，所以两个力学相似的流动，必然被同一运动微分方程组所描述。设有两个不可压缩粘性流体的相似流动，运动微分方程式（x方向）为

原型 $\qquad f_{xp}-\frac{1}{\rho_p}\frac{\partial p_p}{\partial x_p}+\nu_p\nabla^2u_{xp}$

$$= \frac{\partial u_{xp}}{\partial t_p} + u_{xp}\frac{\partial u_{xp}}{\partial x_p} + u_{yp}\frac{\partial u_{xp}}{\partial y_p} + u_{zp}\frac{\partial u_{xp}}{\partial z_p} \tag{6-8}$$

$$f_{xm} - \frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p_m}{\partial x_m} + \nu_m \nabla^2 u_{xm}$$
$$= \frac{\partial u_{xm}}{\partial t_m} + u_{xm}\frac{\partial u_{xm}}{\partial x_m} + u_{ym}\frac{\partial u_{xm}}{\partial y_m} + u_{zm}\frac{\partial u_{xm}}{\partial z_m} \tag{6-9}$$

两个相似流动，运动物理量间存在比尺关系

$$\rho_p = \lambda_\rho \rho_m \quad \nu_p = \lambda_\nu \nu_m \quad p_p = \lambda_p p_m$$
$$f_{xp} = \lambda_g f_{xm} \quad u_{xp} = \lambda_v u_{xm} \quad u_{yp} = \lambda_v u_{ym}$$
$$u_{zp} = \lambda_v u_{zm} \quad t_p = \lambda_t t_m \quad \lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = \lambda_l$$
$$l_p = \lambda_l l_m$$

将以上比尺关系代入（6-8）式

$$\lambda_g f_{xm} - \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_\rho \lambda_l}\right)\frac{1}{\rho_m}\frac{\partial p_m}{\partial x_m} + \left(\frac{\lambda_\nu \lambda_v}{\lambda_l^2}\right)\nu_m \nabla^2 u_{xm}$$
$$= \left(\frac{\lambda_v}{\lambda_t}\right)\frac{\partial u_{xm}}{\partial t} + \left(\frac{\lambda_v^2}{\lambda_l}\right)\left(u_{xm}\frac{\partial u_{xm}}{\partial x_m} + u_{ym}\frac{\partial u_{xm}}{\partial y_m} + v_{zm}\frac{\partial u_{xm}}{\partial z_m}\right) \tag{6-10}$$

因为力学相似的流动，具有相同的运动微分方程式，（6-10）式与（6-9）式恒等，满足恒等的条件是（6-10）式中各项的无量纲系数互等，即

$$\lambda_g = \frac{\lambda_p}{\lambda_\rho \lambda_l} = \frac{\lambda_\nu \lambda_v}{\lambda_l^2} = \frac{\lambda_v}{\lambda_t} = \frac{\lambda_v^2}{\lambda_l} \tag{6-11}$$

以 $\frac{\lambda_v^2}{\lambda_l}$ 遍除各项，得各无量纲数恒等于一，即

$$\frac{\lambda_g \lambda_l}{\lambda_v^2} = \frac{\lambda_p}{\lambda_\rho \lambda_v^2} = \frac{\lambda_\nu}{\lambda_l \lambda_v} = \frac{\lambda_l}{\lambda_t \lambda_v} = 1 \tag{6-12}$$

以原型和模型流动相应的物理量之比，代换各项比尺，整理后可得

$$\frac{v_p^2}{g_p l_p} = \frac{v_m^2}{g_m l_m} \qquad \frac{p_p}{\rho_p v_p^2} = \frac{p_m}{\rho_m v_m^2}$$
$$\frac{v_p l_p}{\nu_p} = \frac{v_m l_m}{\nu_m} \qquad \frac{l_p}{t_p v_p} = \frac{l_m}{t_m v_m}$$

各式等号两边的无量纲数就是**相似准数**，名称和通用符号为

$\frac{v^2}{gl} = \mathrm{Fr}$ 称**佛汝德数**（Froude number）

$\frac{p}{\rho v^2} = \mathrm{Eu}$ 称**欧拉数**（Euler number）

$\frac{vl}{\nu} = \mathrm{Re}$ 称**雷诺数**（Reynolds number）

$\frac{l}{vt} = \mathrm{St}$ 称**斯特罗哈数**(Strouhal number)

由以上各式可知，要使两个不可压缩粘性流体实现力学相似，则要满足四个相似准数相等，即

$$(\mathrm{Fr})_p = (\mathrm{Fr})_m \qquad (\mathrm{Eu})_p = (\mathrm{Eu})_m$$
$$(\mathrm{Re})_p = (\mathrm{Re})_m \qquad (\mathrm{St})_p = (\mathrm{St})_m$$

以上各式就是相似准则，满足佛汝德准则、雷诺准则、欧拉准则分别表示两流动的重

力、粘滞力、压力相似。斯特罗哈数来源于非恒定流动当地加速度项，是表征流动非恒定性的准数，对于恒定流动斯特罗哈数不成立。因(6-8)、(6-9)式本身没有计及弹性力、表面张力等作用力，在此基础上推导的相似准数当中，不出现表征弹性力和表面张力相似的准数。

前已说明，两个动力相似的流动，相应点上的力多边形是相似形，由此可见，只要惯性力及其他任何两个同名力成比例，另一个同名力必成比例。由于压力通常是待求量，所以，只要相应点的惯性力、重力、粘滞力相似，压力将自行相似。换言之，当佛汝德准则、雷诺准则得到满足，欧拉准则可自行满足。据此，将雷诺准则、佛汝德准则称为独立准则，欧拉准则则称为导出准则。

流体的运动是由边界条件和作用力决定的，因此，当两个流动一旦实现了几何相似和动力相似，就必然以相同的规律运动。由此得出结论是：几何相似、独立准则成立是实现流体力学相似的必要条件和充分条件。

（2）由动力相似的定义推导相似准则

根据（6-7）式，动力相似的流动，其相应点上的力多边形相似，相应边（同名力）成比例，从这个定义出发，推导各单项力的相似准则。

1）佛汝德准则

由（6-7）式
$$\frac{I_p}{G_p}=\frac{I_m}{G_m}$$

其中$G=\rho g l^3$，$I=\rho l^3\frac{l}{t^2}=\rho l^2 v^2$，代入上式整理得

$$\frac{v_p^2}{g_p l_p}=\frac{v_m^2}{g_m l_m}$$
$$(\mathrm{Fr})_p=(\mathrm{Fr})_m$$

佛汝德数表征惯性力与重力之比，两流动相应的佛汝德数相等，重力相似。

2）雷诺准则

由（6-7）式
$$\frac{I_p}{T_p}=\frac{I_m}{T_m}$$

其中$T=\mu A\frac{du}{dy}=\mu l v$，$I=\rho l^2 v^2$，代入上式整理得

$$\frac{v_p l_p}{\nu_p}=\frac{v_m l_m}{\nu_m}$$
$$(\mathrm{Re})_p=(\mathrm{Re})_m$$

雷诺数表征惯性力与粘滞力之比，两流动相应的雷诺数相等，粘滞力相似。

3）欧拉准则

由（6-7）式
$$\frac{P_p}{I_m}=\frac{P_m}{I_m}$$

其中$P=pA=pl^2$，$I=\rho l^2 v^2$，代入上式整理得

$$\frac{p_p}{\rho_p v_p^2}=\frac{p_m}{\rho_m v_m^2}$$
$$(\mathrm{Eu})_p=(\mathrm{Eu})_m$$

欧拉数表征压力与惯性力之比，两流动相应的欧拉数相等，压力相似。在大多数的流

动中，对流动起作用的是压差Δp，而不是压强的绝对值，欧拉数中常以相应点的压强差Δp代替p，得

$$\mathrm{Eu}=\frac{\Delta p}{\rho v^2}$$

4）韦伯准则

当流体受表面张力作用时，类似于导出以上各准则的方法，可导出表面张力相似准则——**韦伯准则**。

$$\frac{I_p}{T_{Wp}}=\frac{I_m}{T_{Wm}}$$

其中表面张力$T_W=\sigma l$，$I=\rho l^2v^2$，代入上式整理得

$$\frac{\rho_p l_p v_p^2}{\sigma_p}=\frac{\rho_m l_m v_m^2}{\sigma_m}$$

$$(\mathrm{We})_p=(\mathrm{We})_m$$

无量纲数$\mathrm{We}=\rho l v^2/\sigma$称为**韦伯数**（Weber number），韦伯数表征惯性力与表面张力之比。两流动相应的韦伯数相等，表面张力相似。

5）柯西准则

高速气流运动，弹性力起重要作用，由

$$\frac{I_p}{P_{Ep}}=\frac{I_m}{P_{Em}}$$

其中弹性力$P_E=El^2$，$I=\rho l^2v^2$，代入上式整理得

$$\frac{\rho_p v_p^2}{E_p}=\frac{\rho_m v_m^2}{E_m}$$

$$\frac{v_p^2}{E_p/\rho_p}=\frac{v_m^2}{E_m/\rho_m}$$

根据气体动力学可知，音速$a=\sqrt{E/\rho}$，则

$$\left(\frac{v_p}{a_p}\right)^2=\left(\frac{v_m}{a_m}\right)^2$$

$$\frac{v_p}{a_p}=\frac{v_m}{a_m}$$

$$M_p=M_m$$

无量纲数$\mathrm{M}=v/a$称为**马赫数**（Mach number），马赫数表征惯性力与弹性力之比。两流动相应的马赫数相等，弹性力相似。

6）密度差流动的相似准则

前面已得出决定重力相似的佛汝德准则，工程上还会遇到诸如气体的温差射流、热水向冷水域排放、河口淡水入海流动等有密度差的流动。由于这样的流动受到重力和浮力的作用，所以要把表示惯性力和重力之比的佛汝德数，改换为惯性力和有效重力，即减去浮力后的重力之比，作为密度差流动的相似准数。

将（6-7）式中重力G以有效重力G'代替

$$\frac{I_p}{G'_p}=\frac{I_m}{G'_m}$$

其中$G'=(\rho-\rho_e)gl^3=\Delta\rho g l^3$，$\rho_e$为周围介质的密度，整理后得到

$$\frac{v_p^2}{\frac{\Delta\rho_p}{\rho_p}g_p l_p} = \frac{v_m^2}{\frac{\Delta\rho_m}{\rho_m}g_m l_m}$$

$$(\mathrm{Frd})_p = (\mathrm{Frd})_m$$

上式就是密度差流动的相似准则，无量纲数

$$\mathrm{Frd} = \frac{v^2}{\frac{\Delta\rho}{\rho}gl}$$

称为密度差佛汝德数。

在供热通风空调工程中，为研究气体温差射流，采用Frd的倒数形式，并把特征长度l取为喷口直径d_0（或半径R_0），特征流速取为喷口流速v_0，得到新的相似准数形式

$$Ar = \frac{gd_0}{v^2}\frac{\Delta\rho}{\rho}$$

由定压过程的状态方程 $$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \left|\frac{\Delta T_0}{T_e}\right|$$

式中 ΔT_0——风口气流相对于室内空气的温差；

T_e——室内绝对温度。

于是 $$\mathrm{Ar} = \frac{gd_0}{v_0^2}\frac{\Delta T_0}{T_e}$$

Ar又称为阿基米德数，可见阿基米德数实际上是考虑了浮力作用的重力相似准数。

（3）由量纲分析方法推导相似准则

两个相似流动具有相同的运动微分方程式，根据量纲和谐原理，由运动微分方程式转化的无量纲式相同，如

$$F(\pi_1 \cdots\cdots \pi_{n-m}) = 0$$

$$F(\pi_1' \cdots\cdots \pi_{n-m}') = 0$$

相应的各无量纲量相等，

$$\pi_1 = \pi_1'$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\pi_{n-m} = \pi_{n-m}'$$

反之，无量纲项π相同，两流动相似，π项即相似准数。

§6-4 模 型 实 验

模型实验是依据相似原理，制成和原型相似的小尺度模型进行实验研究，再由实验的结果，推测出原型将会发生的流动现象。进行模型试验需要解决下面两个问题。

一、模型律的选择

为了使模型和原型流动完全相似，如上所述，除满足几何相似外，各独立的相似准则应同时满足，但实际上要同时满足各准则是很困难的，甚至是不可能的。譬如按雷诺准则

$$(\mathrm{Re})_p = (\mathrm{Re})_m$$

原型、模型速度比 $$\frac{v_p}{v_m} = \frac{\nu_p}{\nu_m}\frac{l_m}{l_p} \tag{6-13}$$

按佛汝德准则　　$(Fr)_p=(Fr)_m \quad g_p=g_m$

原型、模型速度比

$$\frac{v_p}{v_m}=\sqrt{\frac{l_p}{l_m}} \tag{6-14}$$

要同时满足雷诺准则和佛汝德准则，就要同时满足（6-13）式和（6-14）式，

$$\frac{\nu_p l_m}{\nu_m l_p}=\sqrt{\frac{l_p}{l_m}} \tag{6-15}$$

当原型和模型为同种液体，$\nu_p=\nu_m$

$$\frac{l_m}{l_p}=\sqrt{\frac{l_p}{l_m}}$$

可见只有$l_p=l_m$，即$\lambda_l=1$时，上式才能成立，这在大多数情况下，已失去模型实验的价值。

当原型和模型用不同液体，$\nu_p\neq\nu_m$，由（6-15）式得

$$\frac{\nu_p}{\nu_m}=\left(\frac{l_p}{l_m}\right)^{3/2}$$

$$\nu_m=\frac{\nu_p}{\lambda_l^{3/2}}$$

如长度比尺$\lambda_l=10$，$\nu_m=\dfrac{\nu_p}{31.62}$，若原型液体是水，模型需选用运动粘滞系数是水的1/31.62的实验液体。这样的液体是很难找到的。

由以上分析可见，做到完全相似是困难的，模型实验一般只能做到近似相似。就是只保证对流动起主要作用的力相似，这就是模型律的选择问题。如研究管道中的流动，粘滞力起主要作用，应按雷诺准则设计模型；在大多数明渠流动中，重力起主要作用，应按佛汝德准则设计模型。

在下一章阐述的流动阻力实验中将指出，当雷诺数Re超过某一数值后，阻力系数不随Re变化，此时流动阻力（粘滞力）的大小与Re无关，这个流动范围称为自动模型区。若原型和模型都处于自动模型区，只要保持几何相似，不需Re相等，就自动实现阻力相似。工程上许多明渠水流处于自模区，按佛汝德准则设计的模型，只要求模型中的流动进入自模区，便同时满足阻力相似。自动模型区又称为阻力平方区。

二、模型设计

在模型设计中，通常是先根据实验场地、模型制做和量测条件定出长度比尺λ_l；再以选定的比尺λ_l缩小原型的几何尺寸，得出模型流动的几何边界；根据对流动受力情况的分析，满足对流动起主要作用的力相似，选择模型律；最后按所选用的相似准则，确定流速比尺及模型的流量。例如：

雷诺准则　　$\dfrac{v_p l_p}{\nu_p}=\dfrac{v_m l_m}{\nu_m}$　　如$\nu_p=\nu_m$

$$\frac{v_p}{v_m}=\frac{l_m}{l_p}=\lambda_l^{-1} \tag{6-16}$$

佛汝德准则　　$\dfrac{v_p^2}{g_p l_p}=\dfrac{v_m^2}{g_m l_m}$　　如$g_p=g_m$

$$\frac{v_p}{v_m}=\left(\frac{l_p}{l_m}\right)^{1/2}=\lambda_l^{1/2} \tag{6-17}$$

流量比
$$\frac{Q_p}{Q_m}=\frac{v_p A_p}{v_m A_m}=\lambda_v\lambda_l^2$$

$$Q_m=\frac{Q_p}{\lambda_v\lambda_l^2}$$

分别将（6-16）、（6-17）式比尺关系代入上式，得模型流量

雷诺准则模型
$$Q_m=\frac{Q_p}{\lambda_l^{-1}\lambda_l^2}=\frac{Q_p}{\lambda_l}$$

佛汝德准则模型
$$Q_m=\frac{Q_p}{\lambda_l^{1/2}\lambda_l^2}=\frac{Q_p}{\lambda_l^{2.5}}$$

按雷诺准则和佛汝德准则导出的各运动量比尺如表6-1。

模　型　比　尺　　　　表 6-1

名　　称	比		尺
	雷　诺　准　则		佛 汝 德 准 则
	$\lambda_\nu=1$	$\lambda_\nu\neq 1$	
长度比尺 λ_l	λ_l	λ_l	λ_l
流速比尺 λ_v	λ_l^{-1}	$\lambda_\nu\lambda_l^{-1}$	$\lambda_l^{1/2}$
加速度比尺 λ_a	λ_l^{-3}	$\lambda_\nu\lambda_l^{-3}$	λ_l^0
流量比尺 λ_Q	λ_l	$\lambda_\nu\lambda_l$	$\lambda_l^{5/2}$
时间比尺 λ_t	λ_l^2	$\lambda_\nu^{-1}\lambda_l^2$	$\lambda_l^{1/2}$
力的比尺 λ_F	λ_l^0	λ_ν^2	λ_l^3
压强比尺 λ_p	λ_l^{-2}	$\lambda_\nu^2\lambda_l^{-2}$	λ_l
功能比尺 λ_W	λ_l	$\lambda_\nu^2\lambda_l$	λ_l^4
功率比尺 λ_N	λ_l^{-3}	$\lambda_\nu^3\lambda_l^{-1}$	$\lambda_l^{7/2}$

【例 6-5】 热风炉中烟气的温度为600℃，流速8m/s，烟气经热风炉产生的压降Δp为120Pa，现在应用长度比尺为10的水流模型进行实验研究。试问：

1）为保证流动相似，模型中水的流速应为多少？

2）模型中产生的压降是多少？

600℃烟气的密度为0.4kg/m³，运动粘滞系数为0.9cm²/s；10℃水的密度为1000kg/m³，运动粘滞系数为0.0131cm²/s。

【解】 1）对这一流动起主要作用的力是粘滞力，应满足雷诺准则。

由
$$(\mathrm{Re})_p=(\mathrm{Re})_m$$

$$v_m=v_p\frac{\nu_m}{\nu_p}\frac{l_p}{l_m}=8\times\frac{0.0131}{0.9}\times 10=1.16\mathrm{m/s}$$

2）两流动的压降满足欧拉准则

由
$$(\mathrm{Eu})_p=(\mathrm{Eu})_m$$

$$\Delta p_m=\Delta p_p\frac{\rho_m v_m^2}{\rho_p v_p^2}=120\times\frac{1000}{0.4}\times\frac{1.16^2}{8^2}=6307.5\mathrm{Pa}$$

【例 6-6】 一桥墩长为24m，墩宽为4.3m，水深为8.2m，平均流速为2.3m/s，两桥台的距离为90m，现选用长度比尺为50的模型实验，要求设计模型。

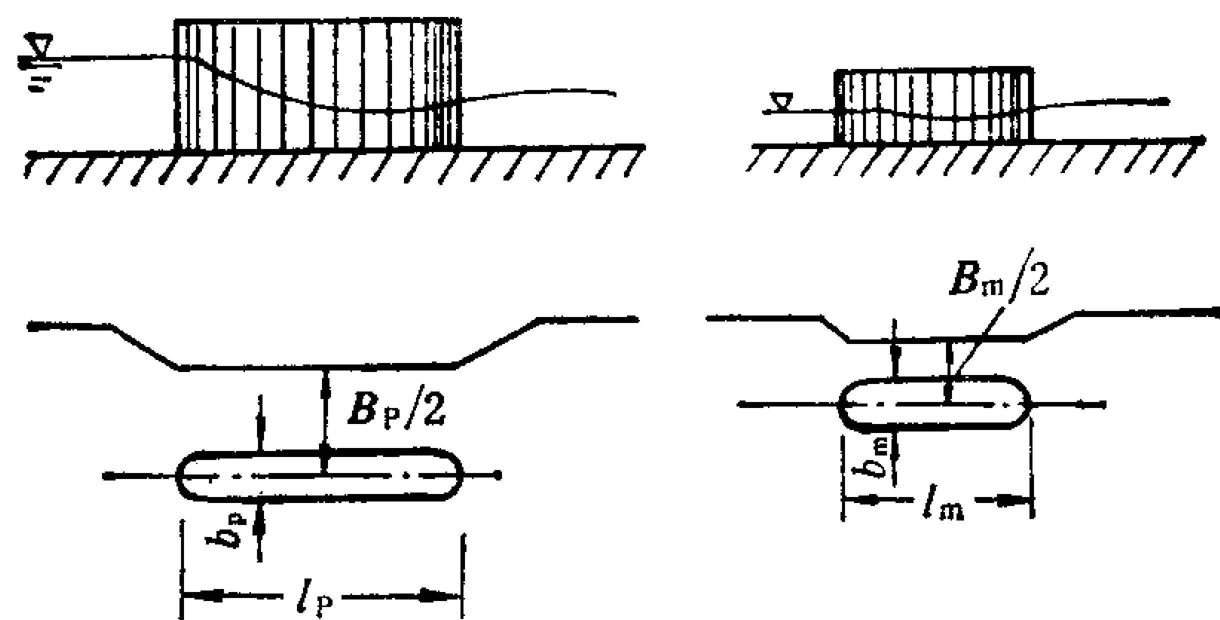
【解】 1）模型的各几何尺寸，由给定比尺$\lambda_l=50$直接计算。

桥墩长 $l_m = \frac{l_p}{\lambda_l} = \frac{24}{50} = 0.48\text{m}$

桥墩宽 $b_m = \frac{b_p}{\lambda_l} = \frac{4.3}{50} = 0.083\text{m}$

墩台距 $B_m = \frac{B_p}{\lambda_l} = \frac{90}{50} = 1.8\text{m}$

水深 $h_m = \frac{h_p}{\lambda_l} = \frac{8.2}{50} = 0.164\text{m}$



例 6-6图

2）对这一流动起主要作用的力是重力，流速、流量受佛汝德准则控制。

流速 $v_m = \frac{v_p}{\lambda_l^{0.5}} = \frac{2.3}{\sqrt{50}} = 0.325\text{m/s}$

流量 $Q_p = v_p(B_p - b_p)h_p = 2.3(90-4.3)8.2 = 1.620\text{m}^3/\text{s}$

$$Q_m = \frac{Q_p}{\lambda_l^{2.5}} = \frac{1.620}{50^{2.5}} = 0.0915\text{m}^3/\text{s}$$

习　题

6-1　假设自由落体的下落距离 s 与落体的质量 m，重力加速度 g 及下落时间 t 有关，试用雷利法导出自由落体下落距离的关系式。

6-2　水泵的轴功率 N 与泵轴的转矩 M、角速度 ω 有关，试用雷利法导出轴功率表达式。

6-3　已知文丘里流量计（图4-21）喉道流速 v 与流量计压强差 Δp、主管直径 d_1、喉道直径 d_2，以及流体的密度 ρ 和运动粘滞系数 ν 有关，试用 π 定理确定流速关系式

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}\,\phi(\text{Re},\ d_2/d_1)$$

6-4　球形固体颗粒在流体中的自由沉降速度 u_f 与颗粒的直径 d、密度 ρ_s 以及流体的密度 ρ、动力粘滞系数 μ，重力加速度 g 有关，试用 π 定理证明自由沉降速度关系式

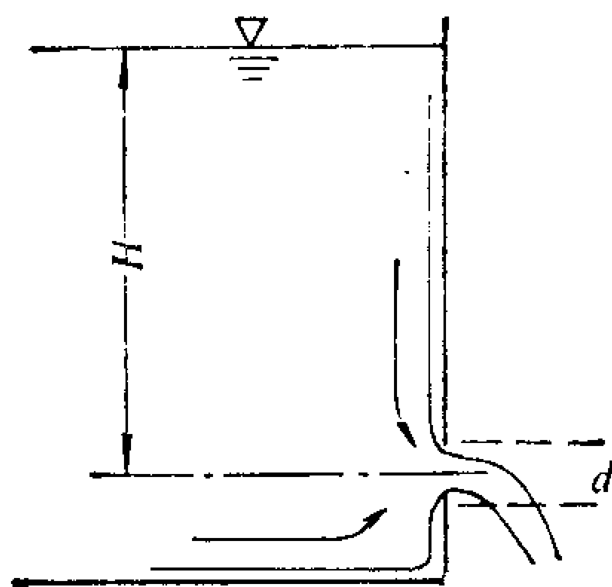
$$u_f = f\left(\frac{\rho_s}{\rho},\ \frac{\rho u d}{\mu}\right)\sqrt{gd}$$

6-5　作用在高速飞行炮弹上的阻力 D 与弹体的飞行速度 v、直径 d、空气的密度 ρ 和动力粘滞系数 μ，以及音速 a 有关，试用 π 定理确定阻力的关系式

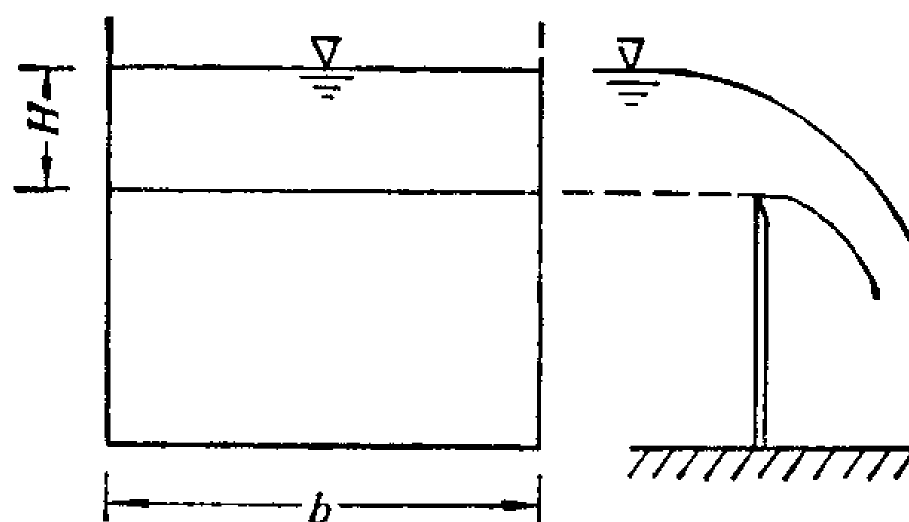
$$D = \phi(\text{Re},\ \text{M})v^2d^2\rho$$

6-6　圆形孔口出流的流速 v 与作用水头 H、孔口直径 d、水的密度 ρ 和动力粘滞系数 μ，重力加速度 g 有关（题6-6图），试用 π 定理推导孔口流量公式。

6-7　已知矩形薄壁堰（题6-7图）的溢流量 Q 与堰上水头 H、堰宽 b、水的密度 ρ 和动力粘滞系数 μ，重力加速度 g 有关，试用 π 定理推导流量公式。



题 6-6图



题 6-7图

6-8 在一定的速度范围内，流体绕过圆柱体，在圆柱体后部产生两侧交替释放的旋涡（卡门涡街，见图10-10），已知旋涡发放频率f与来流速度U_0、流体的密度ρ和动力粘滞系数μ，以及圆柱体的直径d有关，试用π定理证明f与其它量的关系为

$$\frac{fd}{U_0}=\varphi(\mathrm{Re})$$

6-9 加热炉回热装置冷态模型试验，模型长度比尺$\lambda_l=5$，已知回热装置中烟气的运动粘滞系数为$0.7\times10^{-4}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$，流速为2.5m/s，试求20°C空气在模型中的流速为多大时，流动才能相似。

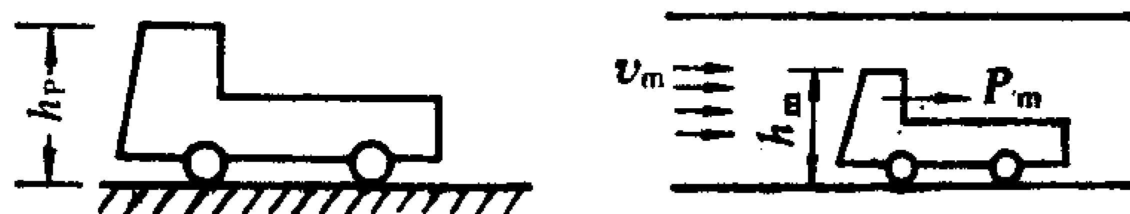
6-10 用水管模拟输油管道，已知输油管直径500mm，管长100m，输油量为$0.1\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$，油的运动粘滞系数为$150\times10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$，水管直径25mm，水的运动粘滞系数为$1.01\times10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$，试求：

1）模型管道的长度和模型的流量；

2）如模型上测得的压差$(\Delta p/\gamma)_m=2.35$cm水柱，输管管上的压差$(\Delta p/\gamma)_p$是多少？

6-11 为研究输水管道上直径600mm阀门的阻力特性，采用直径300mm，几何相似的阀门用气流做模型实验，已知输水管道的流量为$0.283\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$，水的运动粘滞系数$\nu=1\times10^{-6}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$，空气的运动粘滞系数$\nu_a=1.6\times10^{-5}\mathrm{m}^2/\mathrm{s}$，试求模型的气流量。

6-12 为研究汽车的空气动力特性，在风洞中进行模型实验（题6-12图），已知汽车高$h_p=1.5$m，行车速度$v_p=108$km/h，风洞风速$v_m=45$m/s，测得模型车的阻力$P_m=14$kN，试求模型车的高度h_m及汽车受到的阻力。



题 6-12图

6-13 为研究风对高层建筑物的影响，在风洞中进行模型实验，当风速为9m/s时，测得迎风面压强为$42\mathrm{N/m}^2$，背风面压强为$-20\mathrm{N/m}^2$，试求温度不变，风速增至12m/s时，迎风面和背风面的压强。

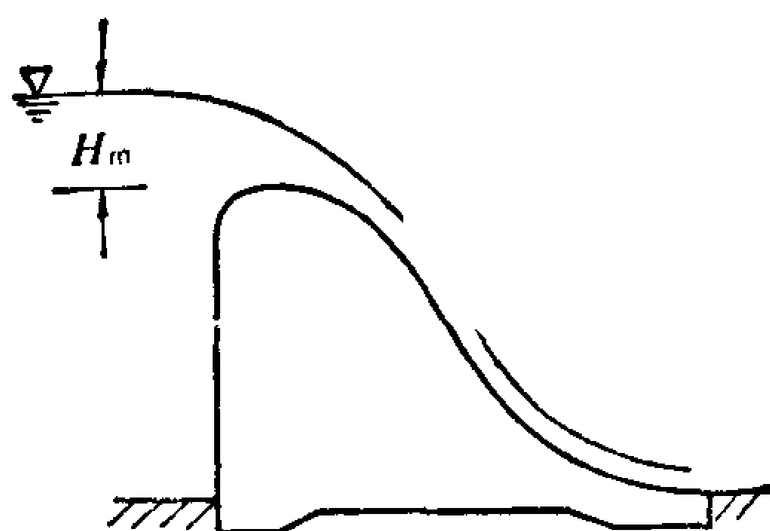
6-14 贮水池放水模型实验，已知模型长度比尺为225，开闸后10min水全部放空，试求放空贮水池所需时间。

6-15 防浪堤模型实验，长度比尺为40，测得浪压力为130N，试求作用在原型防浪堤上的浪压力。

6-16 溢流坝泄流模型实验（题6-16图），模型长度比尺为60，溢流坝的泄流量为$500\mathrm{m}^3/\mathrm{s}$，试求：

1）模型的泄流量；

2）模型的堰上水头$H_m=6$cm，原型对应的堰上水头是多少？



题 6-16图

6-17 用长度比尺为10的模型试验炮弹的空气动力特性，已知炮弹的飞行速度为1000m/s，空气温度为40°C，空气的动力粘滞系数为19.2×10^{-6}Pa·s；模型空气温度为10°C，空气的动力粘滞系数为17.8×10^{-6}Pa·s，试求满足粘性力和弹性力相似，模型的风速和压强。

6-18 为研究吸风口附近气流的运动，用长度比尺10的模型试验，测得模型吸风口的流速为10m/s，距风口0.2m处轴线上流速为0.5m/s，原型吸风口的流速为18m/s，试求与模型相对应点的位置及该点的流速。

6-19 为研究温差射流运动的轨迹，用长度比尺为6的模型进行试验，已知原型风口的风速为22m/s，温差为15°C，模型风口的风速为 8 m/s，原型和模型周围空气的温度均为20°C，试求模型的温差应为多少？

6-20 车间长40m，宽20m，高8m，由直径为0.6m的风口送风，送风量为$2.3m^3/s$，用长度比尺为5的模型试验，原型和模型的送风温度均为20°C，试求模型尺寸及送风量。（提示：模型用铸铁送风管，最低雷诺数60000时进入阻力平方区。）

6-21 原型和模型流体的物理特性相同，长度比尺为λ_l，试求在满足雷诺准则的条件下，作用在原型和模型上的力之比。

6-22 在什么条件下，模型实验可达到同时满足粘滞力相似和重力相似。

第七章　流动阻力和能量损失

本章主要研究流体恒定流动时机械能损失的规律，只有解决了能量损失的计算之后，第四章建立的能量方程式才能广泛地用来解决实际工程问题。

实际流体都具有粘滞性，流动时受固体壁面的影响形成一定的速度分布，并在内部各流层间产生切应力，即流动阻力。流动阻力作功，使控制体内流体的一部分机械能不可逆地转化为热能而散失，流过控制体的单位重量流体的平均机械能损失，通常称为水头损失。

水头损失的规律与流体的运动状态和流动边界条件有密切关系，下面将分别叙述。

§7-1　流动阻力与水头损失的两种型式

流动边界不同，使断面流速分布有所不同，从而影响流动阻力和水头损失。为了便于分析计算，按流动边界情况，对流动阻力和水头损失分类研究。

一、流动阻力与水头损失的分类

在边壁沿程无变化，流体作均匀流动的流体上，流动阻力中只有沿程不变的切应力，称为沿程阻力或摩擦阻力。由于沿程阻力作功而引起的水头损失称为沿程水头损失。沿程损失均匀分布在整个流段上，与流段长度成比例，又称为长度损失，以h_f表示。

在边壁沿程急剧变化，流速分布发生变化的局部区段上，集中产生的阻力称为局部阻力，由此引起的水头损失称为局部水头损失，以h_j表示。发生在管道入口、异径管、阀门、三通、弯头等各种管件处的水头损失都是局部水头损失。

如图7-1中，ab、bc、cd各段间只有沿程阻力，h_{fab}、h_{fbc}、h_{fcd}是相应的沿程水头损失；管道入口、管径突然缩小及阀门等处产生局部阻力，h_{ja}、h_{jb}、h_{jc}就是相应的局部水头损失。整个管道的水头损失等于各管段的沿程损失和所有局部损失的总和

$$h_w = \Sigma h_f + \Sigma h_j = h_{fab} + h_{fbc} + h_{fcd} + h_{ja} + h_{jb} + h_{jc}$$

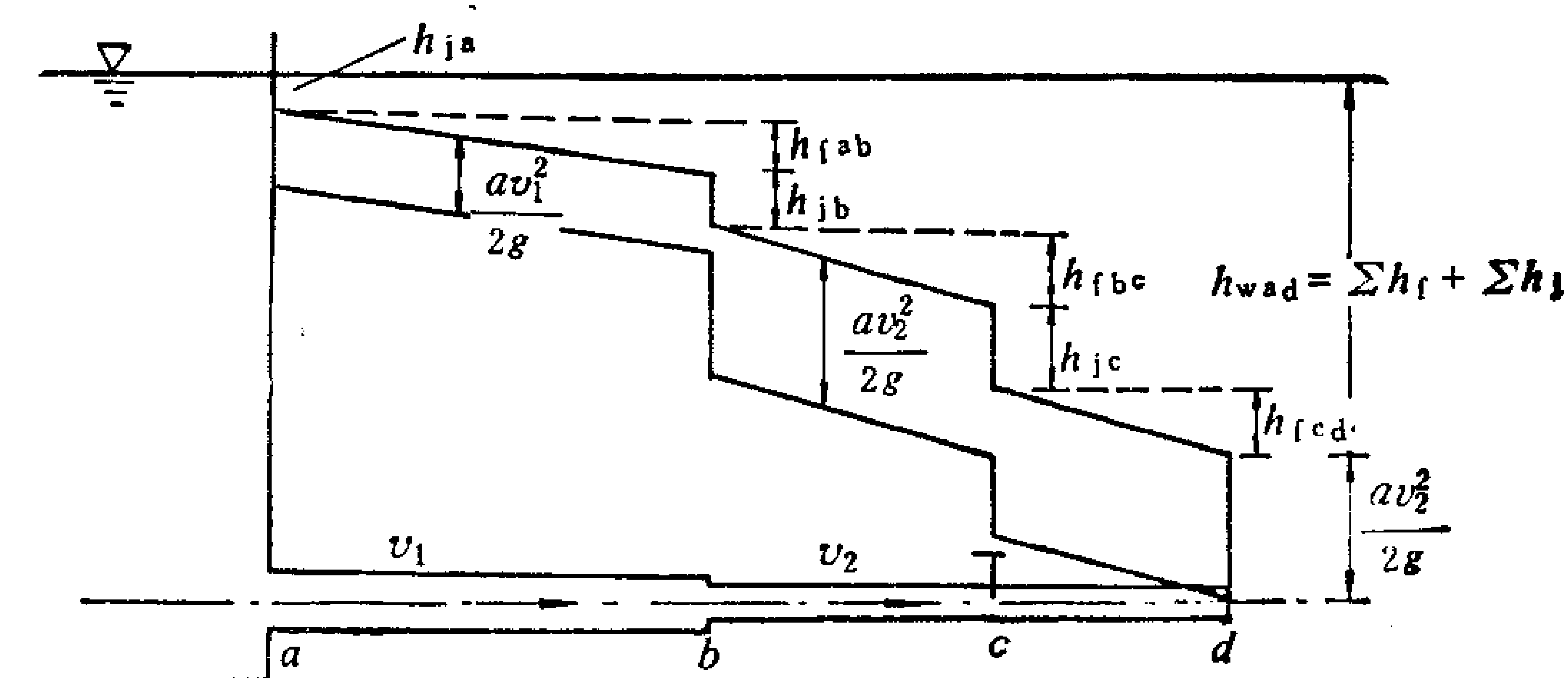


图 7-1　水头损失

在气体管道计算中，通常用流过控制体的单位体积流体的平均机械能损失，称为压强损失，即

$$p_w = \Sigma p_f + \Sigma p_j$$

式中 $p_f = \gamma h_f$，$p_j = \gamma h_j$；

γ——流体的重度。

二、水头损失的计算公式

水头损失计算公式的建立，经历了从经验到理论的发展过程，自1857年起先由达西（Darcy），其后由魏斯巴哈（Weisbach）根据观测资料总结归纳提出圆管沿程水头损失公式

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \tag{7-1}$$

式中，l 为管长；d 为管径；v 为断面平均流速；g 为重力加速度；λ 为沿程阻力系数，一般由实验确定。

（7-1）式称为达西—魏斯巴哈公式，式中的沿程阻力系数 λ 并不是一个确定的常数，该式实际上是把沿程水头损失的计算，转化为研究确定不同流动状况下阻力系数 λ 的问题。由于水头损失以流速水头的倍数计，这样在能量方程式中就能和流速水头归并成一项，便于计算。本世纪初量纲分析原理发现以后，可以直接应用量纲分析的方法导出（7-1）式（见§6-2，例[6-3]），进一步从理论上证明了达西—魏斯巴哈公式是一个正确、完整地表达了圆管沿程水头损失的公式，使它从最初的经验公式中分离出来。经过一个多世纪以来的理论发展和实践检验都证明，达西公式在结构上是合理的，使用上是方便的。

在实验的基础上，局部水头损失按下式计算

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g} \tag{7-2}$$

式中，ζ 为局部阻力系数，一般由实验确定；v 为 ζ 对应的断面平均流速。

§ 7-2 粘性流体的两种流动状态

一、两种流态

19世纪初就已经发现沿程水头损失和流速有一定关系，在流速很小时，水头损失和流速的一次方成比例；在流速较大或更大时，水头损失和接近流速的二次方或二次方成比例。直到1880年～1883年，英国物理学家雷诺（Reynolds）经过实验研究发现水头损失规律之所以不同，是因为存在着两种不同的流动状态。

雷诺实验装置的原理图如图7-2所示，自水箱 A 引出玻璃管 B，末端阀门 C 用以调节流量，容器 D 内装有重度和水相近的颜色水，经细管 F 注入 B 管中，阀门 E 可调节颜色水的流量。

实验时保持水箱内水位恒定，稍许开启阀门 C，使 B 管内保持较低流速，再打开阀门 E 使颜色水经针管流出，这时玻璃管内颜色水成一条界限分明的纤流，与周围清水不相混合（图7-2a），表明玻璃管中的水呈层状流动，各层质点互不掺混，这种流动状态称为层流；逐渐开大阀门 C，玻璃管内流速增大到某一临界值 v_k' 时，颜色水纤流发生抖动（图7-

2b），继续开大阀门C，颜色水纤流破裂为小的涡体，并与周围清水掺混，玻璃管内整个断面都染上颜色（图7-2c），表明此时水流质点的运动轨迹极不规则，不仅沿管轴线方向运动，还有垂直于管轴线方向的横向运动，各点瞬时速度的大小、方向随时间无规则的变化，这种流动状态称为紊流。如将该实验按相反的顺序进行，先使玻璃管内为紊流，然后逐渐关小阀门C，在前面实验中发生的现象，也会按相反的次序重演，只是由紊流转变为层流的流速v_k比由层流转变为紊流的流速v_k'小。这样就有两个流态转变速度v_k'和v_k，分别称为上临界流速和下临界流速。实验发现，上临界流速v_k'是不确定的，受起始扰动的影响很大，扰动愈强，v_k'愈小。在水箱水位恒定，管道入口平顺，管壁光滑的条件下，上临界流速v_k'可比下临界流速v_k大许多倍。下临界流速v_k是确定的，不受起始扰动的影响，对任何起始紊流，当流速v小于v_k值，只要管道足够长，流动终将发展为层流。实际工程中，扰动是难以避免的，在实用上把下临界流速v_k做为流态转变速度；$v<v_k$流动是层流；$v>v_k$流动就是紊流。

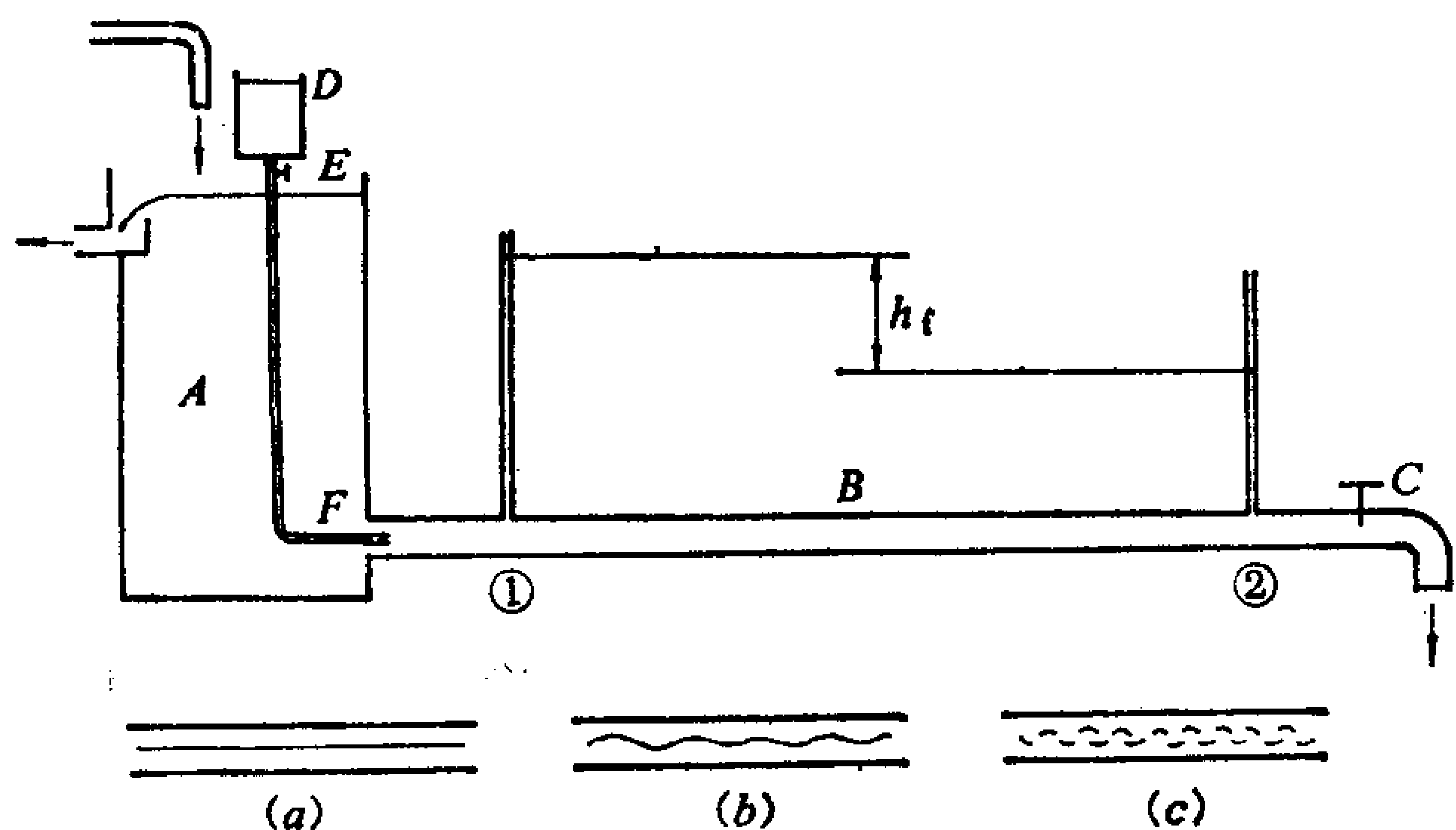


图 7-2 雷诺实验装置

二、沿程水头损失与流速的关系

雷诺在验证了两种流态的同时，于1883年前后进一步研究了不同流态沿程水头损失的规律。在图7-2所示的实验管道中取断面①、②并安装测压管，列能量方程得出

$$h_f=\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)$$

上式表明均匀流两断面间的沿程水头损失，等于该两断面的测压管水头差。如由小逐渐开大阀门C，量测不同开度下的沿程损失h_f和相应的断面平均流速v，就得到一组h_f、v值。为了找出两者的关系，将所得数值画在双对数坐标纸上，点绘出实验曲线$abcef$(图7-3)。对照观察管中的流态，层流的实验点皆在ab线上，紊流的实验点在ef线上，c点是由层流过渡到紊流的转换点，该点对应的流速就是上临界流速v_k'。若按同以上实验相反的顺序，阀门由全开再逐渐关小，并在管道B入口加设栅栏增加起始扰动，使流动开始是紊流，这种情况下实验点沿$fedba$方向移动。当流速小于b点所对应的流速值，虽然起始是紊流，后面仍转变为层流，b点是由紊流过渡到层流的转换点，所对应的流速就是下临界流速v_k。

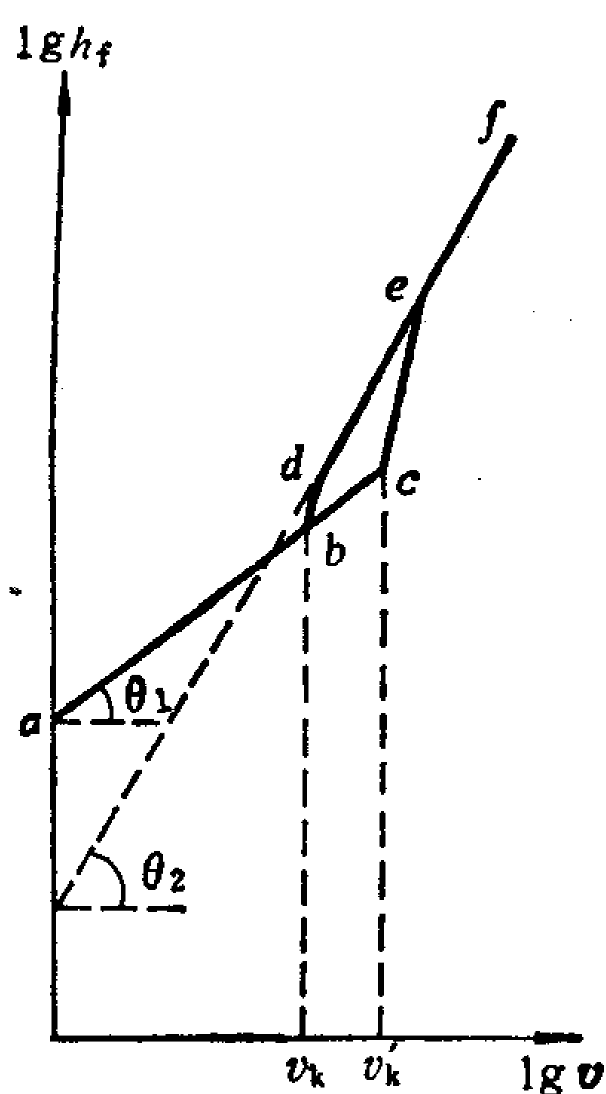


图 7-3 $h_f\sim v$曲线

实验曲线（图7-3）分为三部分：

1）ab段：$v<v_k$，流动为层流，所有实验点都分布在ab直线上，该直线与横坐标轴成45°角，ab线的斜率$m_1=1.0$。

2）ef段：$v>v_k'$，流动为紊流，所有实验点都分布在ef线上，该线开始是直线，与横坐标轴成60°15′角，然后向上略有弯曲逐渐成为与横坐标轴成63°25′角的直线。ef线的斜率$m_2=1.75\sim2.0$。

3）be段：$v_k<v<v_k'$，因实验进行方向不同，流动可能是层流也可能是紊流。ce和db线是层流和紊流之间的过渡，实验点有些分散，总的趋势是沿程损失h_f随速度v急剧变化，两线的斜率m_3均大于2.0。

将图7-3中ab、ef线用直线方程来表示

$$\lg h_f=\lg K+m\lg v$$

则

$$h_f=Kv^m$$

其中层流（ab线）$\theta=45°$，$m_1=1.0$，$h_f=K_1v^{1.0}$，沿程水头损失与流速的1次方成比例；紊流（ef线）$\theta=60°15'\sim63°25'$，$m_2=1.75\sim2.0$，$h_f=K_2v^{1.75\sim2.0}$，沿程水头损失与流速的1.75～2.0次方成比例。可见流态不同，沿程水头损失的规律不同，流动阻力的变化规律不同。

三、雷诺数

既然流态不同，流动阻力和沿程水头损失的规律不同，因此，只有对流态作出判断之后，才能正确计算水头损失h_f。雷诺以不同温度的水，经过不同直径的管道实验，发现临界流速v_k的大小与管径d、流体的密度ρ和动力粘滞系数μ有关，即$v_k=f(d,\ \rho,\ \mu)$。这四个物理量之间的函数关系，可借助量纲分析的方法得到

$$v_k=R_{ek}\frac{\mu}{\rho d}$$

式中R_{ek}为比例常数，是不随管径大小和流体的物性（ρ、μ）变化的无量纲数

$$R_{ek}=\frac{v_k\rho d}{\mu}=\frac{v_k d}{\nu} \quad （7-3）$$

1908年后人为纪念雷诺，将无量纲数

$$\mathrm{Re}=\frac{vd}{\nu} \quad （7-4）$$

称为雷诺数。与下临界流速v_k对应的雷诺数R_{ek}称为下临界雷诺数，实用上称为临界雷诺数。雷诺及后来的大量实验得出临界雷诺数R_{ek}稳定在2000～2320之间，本书取$R_{ek}=2000$。

用临界雷诺数作为流态的判别标准，应用起来是十分方便的，对于管流按（7-4）式算出雷诺数，同临界雷诺数比较便可判别流态：

$\mathrm{Re}<R_{ek}$　则$v<v_k$　流动是层流；

$\mathrm{Re}>R_{ek}$　　$v>v_k$　流动是紊流；

$\mathrm{Re}=R_{ek}$　　$v=v_k$　流动是临界流。

【例 7-1】 有一直径$d=25$mm的室内上水管，断面平均流速$v=1.0$m/s，水温为10℃，试判别流态。

【解】 由表2-7查得10℃水的运动粘滞系数$\nu=1.308\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$，雷诺数

$$\mathrm{Re}=\frac{vd}{\nu}=\frac{1.0\times0.025}{1.308\times10^{-6}}=19100>2000$$

雷诺数大于临界雷诺数，水流为紊流。

【例 7-2】 如用直径$d=25\mathrm{mm}$的管道输送温度为30℃的空气，使管内保持层流的最大流速是多少？

【解】 使管内保持层流的最大流速就是临界流速，由表2-8查得30℃空气的运动粘滞系数$\nu=16.6\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$，由

$$R_{ek}=\frac{v_k d}{\nu}$$

得

$$v_k=\frac{R_{ek}\nu}{d}=\frac{2000\times16.6\times10^{-6}}{0.025}=1.328\mathrm{m/s}$$

四、流态的转化过程

现以均匀层流（图7-4*a*）为例说明流态的转化过程。瞬时流线是规则的平行直线，对其中某一流层来说，都受到上、下相邻流层施加的相反方向的切应力作用，这为构成力矩并促使涡体产生提供了条件。当流体受到扰动，包括流场受到扰动、流过边壁突起、局部温度波动等等，都会引起流层轻微波动，波峰一侧由于流束过流断面减小，流速增大，压强降低；波谷一侧过流断面增大，流速减小，压强增大，造成出现波动的流层受到横向压力作用（图7-4*b*）。横向压力的作用，促使这一流层的波幅进一步增大，流线更为弯曲，达到一定程度，在横向压力和反向切应力综合作用下形成涡体（图7-4*c*）。涡体形成后，涡体附近同涡体旋转速度方向一致的流层流速加大，与涡体旋转速度方向相反的流层流速减小，在涡体两侧因速度不同引起横向压力差，使涡体发生横向运动进入邻近的流层，成为新的扰动因素（图7-4*d*）。至此，流体中出现大小不等的涡体在各流层间游荡，原来规则的瞬时流线已不存在，整个流动由层流转变为紊流。

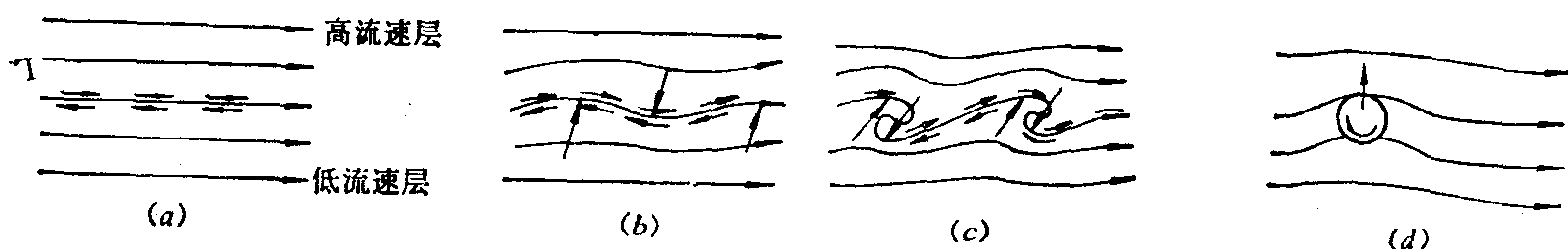


图 7-4 流态转化

从层流到紊流转变过程的分析，不难看出影响流态转变的因素：其一是流体的粘滞性，它是涡体形成的条件，又是阻滞涡体在流层间运动的制约因素；其二是流体的惯性，流体密度越大，流速越大，越容易形成涡体，同时流体微团的惯性也大，涡体越容易摆脱粘性阻滞作用，脱离原来流层。因此说，流体运动的流态取决于惯性作用和粘滞作用这一对矛盾的对比。当Re<2000时，粘滞作用是矛盾的主要方面，流动状态是由占支配地位的粘滞性所规定的，此时粘滞作用足以使流体因受扰动所引起的波动衰减，涡体无法形成，流动保持为层流。随着Re的不断增大，矛盾双方不断发展变化，当Re超过2000时，量变发展成质变，惯性成为矛盾的主要方面，涡体得以形成和发展，流动即由层流转变为紊流。由第六章已知，雷诺数正是用宏观的特征量来表征惯性作用与粘滞作用的对比关系，这就是为什么一切牛顿流体（如水、汽油、一切气体）由层流转变为紊流的临界雷诺数都

是2000的原因。

五、粘性底层

当雷诺数Re>2000以后，管流中发展出密集的涡体，成为紊流。壁面处，因流体分子与壁面碰撞后漫反射的结果，工程中的一般流动，流体在壁面上无滑移，紧靠近壁面很薄的流层内，速度是由零增至有限值。这一层速度虽小，速度梯度却很大，同时，固体壁面还限制了质点的横向掺混，因此，在紧靠面的这一薄层内，质点受到惯性作用很小，粘性阻力起主要作用，流动仍保持层流流态，称为粘性底层或层流底层。粘性底层之外是紊流核心，在粘性底层和紊流核心之间还存在界限不明显的过渡层（图7-5）。

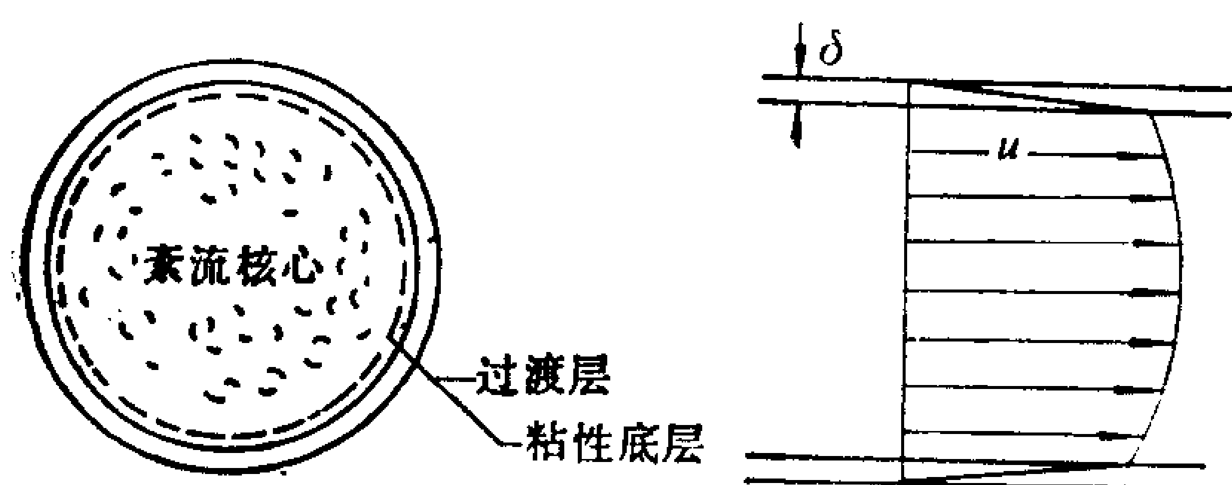


图 7-5 粘性底层

粘性底层的厚度δ一般以毫米计，随Re增大而减小（定量分析见§7-6）。例如直径$d=25$mm光滑管，$Re=10^4\sim10^5$时，$\delta=0.49$mm~0.065mm。粘性底层的存在，对管壁粗糙的扰动作用和导热性能有重大影响。

§7-3 均匀流的切应力关系式

为了进一步研究沿程水头损失的规律，首先建立沿程水头损失与切应力的关系式，即均匀流动方程式。

一、均匀流动方程式

取恒定均匀流段①—②，如图7-6。设过断面面积$A_1=A_2=A$，形心点坐标分别为z_1、z_2，其压强分别为p_1、p_2。

由①、②断面能量方程得到

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)=h_f \qquad (7\text{-}5)$$

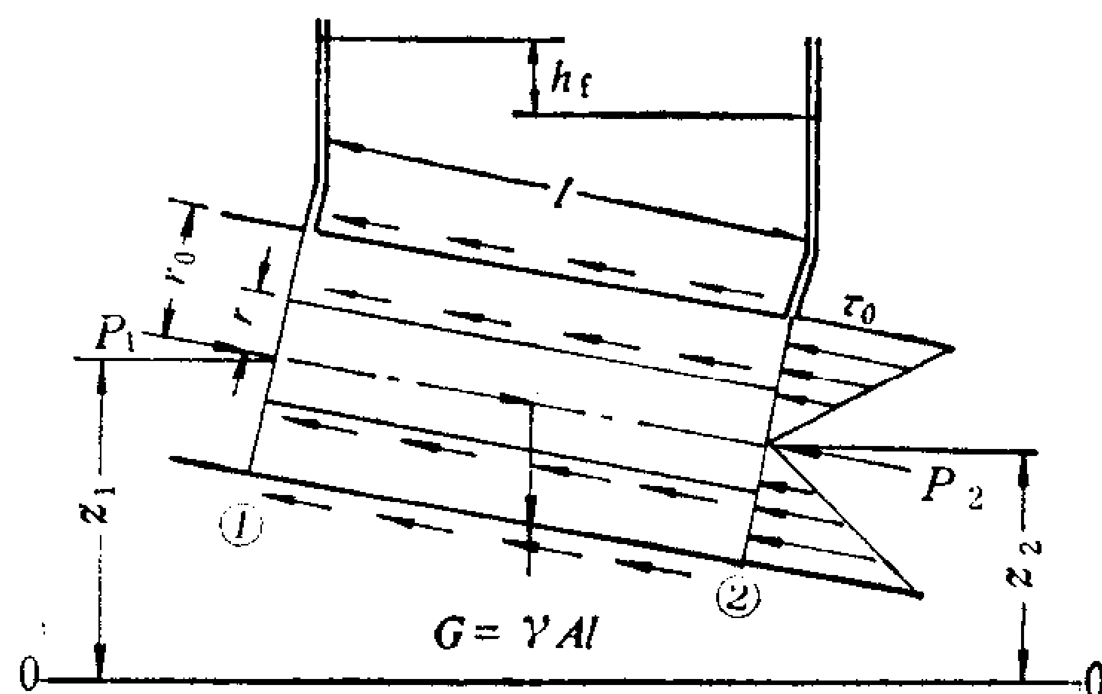


图 7-6 圆管均匀流动

作用于恒定均匀流段上的合外力平衡，有

$$p_1A-p_2A+\gamma Al\cos\alpha-\tau_0\chi l=0$$

其中τ_0为管壁切应力；χ为流体与固体接触的周界，亦称为湿周。又$l\cos\alpha=z_1-z_2$，以γA除式中各项，整理得

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)=\frac{\tau_0\chi l}{\gamma A} \qquad (7\text{-}6)$$

对比（7-5）、（7-6）式，得到

$$h_f=\frac{\tau_0\chi l}{\gamma A} \qquad (7\text{-}7)$$

对于圆管流$A=\pi r_0^2$，$\chi=2\pi r_0$，则

$$h_f=\frac{2\tau_0 l}{\gamma r_0} \qquad (7\text{-}8)$$

或者 $$\tau_0=\gamma\frac{r_0}{2}\frac{h_f}{l}=\gamma\frac{r_0}{2}J \tag{7-9}$$

（7-7）或（7-9）式给出了沿程水头损失与切应力的关系，也称为均匀流基本方程式

由于均匀流基本方程式是把所取总流流段作为一个整体，根据压力、重力、切力相平衡得到的平衡方程，并没有反映出流动过程中产生能量损失的物理本质。公式本身未涉及总流内部流体质点的运动状况，因此，层流、紊流都适用，只是流态不同，切应力形成的原因和表达式不同而已。

二、圆管过流断面上切应力分布

在圆管流内任取轴线与管轴线重合、半径为r的流束（图7-6），按推导（7-9）式的相同步骤，便可得出

$$\tau=\gamma\frac{r}{2}J' \tag{7-10}$$

均匀流内各流束的水力坡度相同$J'=J$，对比（7-9）、（7-10）式，有

$$\tau=\frac{r}{r_0}\tau_0 \tag{7-11}$$

即圆管过流断面上切应力直线分布：$r=0$，$\tau=0$；$r=r_0$，$\tau=\tau_0$。

三、阻力速度

将达西公式（7-1）式代入均匀流基本方程式（7-8）式，整理得

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=v\sqrt{\frac{\lambda}{8}}$$

定义$v_*=\sqrt{\tau_0/\rho}$，v_*具有速度的量纲：$[v_*]=L/T$，称为阻力速度，则

$$v_*=v\sqrt{\frac{\lambda}{8}} \tag{7-12}$$

（7-12）式是沿程阻力系数和壁面切应力的关系式。

§ 7-4 圆管中的层流运动

下面分别阐述层流和紊流的流动阻力和水头损失规律，先分析圆管中的层流运动。工程中某些很细的管道流动，或者低速、高粘流体的管道流动，如阻尼管、润滑油管、原油输油管道内的流动多属层流。研究层流运动不仅有工程实用意义，重要的还在于通过层流与紊流的对比，加强对紊流运动的认识。

一、流动特征与切应力

如前所述，层流各流层质点互不掺混，质点运动的轨迹相互平行。对于圆管来说，质点沿平行管轴线方向运动，紧靠管壁的流层速度为零，管轴线处速度最大，整个管流如同无数薄圆筒一层套着一层滑动。取迪卡尔直角坐标，y轴与管轴线重合，则有$u_y=u$，$u_x=u_z=0$（图7-7）。

流层间切应力服从牛顿内摩擦定律，由（2-19）式

$$\tau=\mu\frac{du}{dn}$$

这里 $n=r_0-r$，则

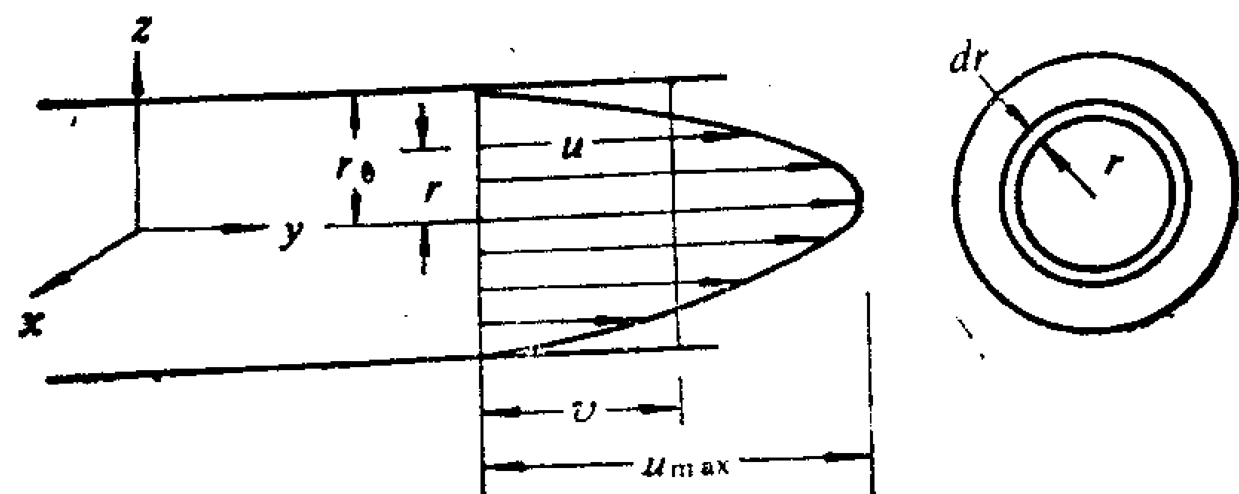


图 7-7 圆管中的层流

$$\tau=-\mu\frac{du}{dr} \tag{7-13}$$

二、流速分布

由粘性流体运动微分方程（5-13）式

$$\left.\begin{aligned}f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\nabla^2 u_x&=\frac{Du_x}{Dt}\\f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\nabla^2 u_y&=\frac{Du_y}{Dt}\\f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\nabla^2 u_z&=\frac{Du_z}{Dt}\end{aligned}\right\}$$

因为 $u_y=u$，$u_x=u_z=0$，运动微分方程化简化

$$\left.\begin{aligned}&f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial y}\\&f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0\\&f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0\end{aligned}\right\}$$

引入以下限制条件

恒定流动 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$；

不可压缩流体 $\nabla\cdot\vec{u}=0$，得 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$；

质量力只有重力 $f_x=f_y=0$，$f_z=-g$

将限制条件代入上式，得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial p}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\\&\frac{\partial p}{\partial x}=0\\&-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}=0\end{aligned}\right\} \tag{7-14}$$

由（7-14）式的后两式，便可得到过流断面上压强的分布规律 $z+\frac{p}{\gamma}=C$（见例5-3）。

$\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 表明，u 不沿轴向变化，再由（7-14）式的第一式可知，$\frac{\partial p}{\partial y}$ 与 y 无关，即压强沿轴向的变化率是一个常数

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\text{常数}=-\frac{\Delta p}{l}$$

压强沿程下降，故Δp前加“-”号。

因圆管流为轴对称流动，u沿x、z方向以及任意半径方向的变化均相同，且只随r变化

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{d^2 u}{dr^2}$$

将以上关系代入前式

$$-\frac{\Delta p}{l}=2\mu\frac{d^2 u}{dr^2}$$

积分
$$\frac{du}{dr}=-\frac{\Delta p}{2\mu l}r+C$$

管轴线处$r=0$，速度最大$\frac{du}{dr}=0$，$\therefore C=0$

$$\frac{du}{dr}=-\frac{\Delta p}{2\mu l}r$$

分离变量积分
$$u=-\frac{\Delta p}{4\mu l}r^2+C$$

管壁处$r=r_0$，速度 $u=0$：$C=\frac{\Delta p}{4\mu l}r_0^2$

得到
$$u=\frac{\Delta p}{4\mu l}(r_0^2-r^2)$$

或者
$$u=\frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2-r^2) \tag{7-15}$$

其中水力坡度$J=h_f/l$。管轴线上$r=0$，得最大流速

$$u_{max}=\frac{\gamma J}{4\mu}r_0^2 \tag{7-16}$$

圆管层流过流断面上速度按抛物线分布。

（7-14）式也可由均匀流基本方程式（7-10）式和牛顿内摩擦定律（7-13）式联立导出。

已知流速分布，便可取宽dr的环形断面为微元面积dA积分求得圆管层流的流量Q，以及断面平均流速v，动能修正系数α和动量修正系数α_0

$$Q=\int_A u\,dA=\int_0^{r_0}\frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2-r^2)2\pi r\,dr=\frac{\gamma J}{8\mu}\pi r_0^4 \tag{7-17}$$

$$v=\frac{Q}{A}=\frac{\gamma J}{8\mu}r_0^2=\frac{1}{2}u_{max} \tag{7-18}$$

$$\alpha=\frac{\int_A u^3 dA}{v^3 A}=2$$

$$\alpha_0=\frac{\int_A u^2 dA}{v^2 A}=1.33$$

三、沿程水头损失的计算

以$r_0=d/2$、$J=h_f/l$代入（7-18）式，整理得

$$h_f=\frac{32\mu l}{\gamma d^2}v \tag{7-19}$$

层流的沿程水头损失和断面平均流速的一次方成比例，同由雷诺实验得到的结论一致，（7-19）式又称为哈根-泊肃叶（Hagen-Poiseuille）方程。将（7-19）式改写为通用的达西公式（7-1）式的形式

$$h_f=\frac{64}{\mathrm{Re}}\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

式中沿程阻力系数$\lambda=64/\mathrm{Re}$。层流的沿程阻力系数只是雷诺数的函数，与管壁粗糙无关，这是因为对于层流来说，管壁只起到使与其接触的一层流体停止运动的作用，流动阻力是流层间的内摩擦阻力。

§ 7-5　紊流运动与时均法

自然界和工程中的大多数流动都是紊流，工业生产中的许多工艺过程，如流体的管道输送、燃烧过程、掺混过程传热、和冷却等等都涉及到紊流问题，可见紊流运动有着更大的普遍性。

一、紊流的特征

正如前面说明层流向紊流的转化过程所指出（§7-2,四），紊流始于涡体的产生和发展，造成无数大小不等的涡体动荡于流体之中。同涡体的产生和发展相联系，紊流运动具有以下特征：

涡体运动造成流体质点在流动过程中不断相互掺混；

涡体旋转速度同原流场速度相迭加，使得空间各点的速度随时间无规则的变化，称为速度脉动。和速度脉动相关联，紊流的压强、动量、浓度等量也是脉动的，这种现象称为紊流脉动。

质点掺混，紊流脉动是从不同的角度表述紊流特征，前者着眼于质点运动状况，后者着眼于运动参数。质点掺混，紊流脉动既是紊流的特征，也是研究紊流的出发点。

紊流运动参数的瞬时值带有偶然性，但不能就此得出紊流运动不存在规律性的结论。同一切物质运动一样，紊流运动的规律性同它的偶然性是相伴存在的。通过运动参数的时均化，以求得时间平均的规律性，是流体力学研究紊流的有效途径之一。

二、紊流运动的时均化

图7-8是实测平面流动某一空间点沿流动方向瞬时流速u_x随时间的变化曲线。由图可见，u_x随时间无规则的变化，并围绕着某一平均值上、下跳动。如在T时段，作一与时间轴平行的直线AB，

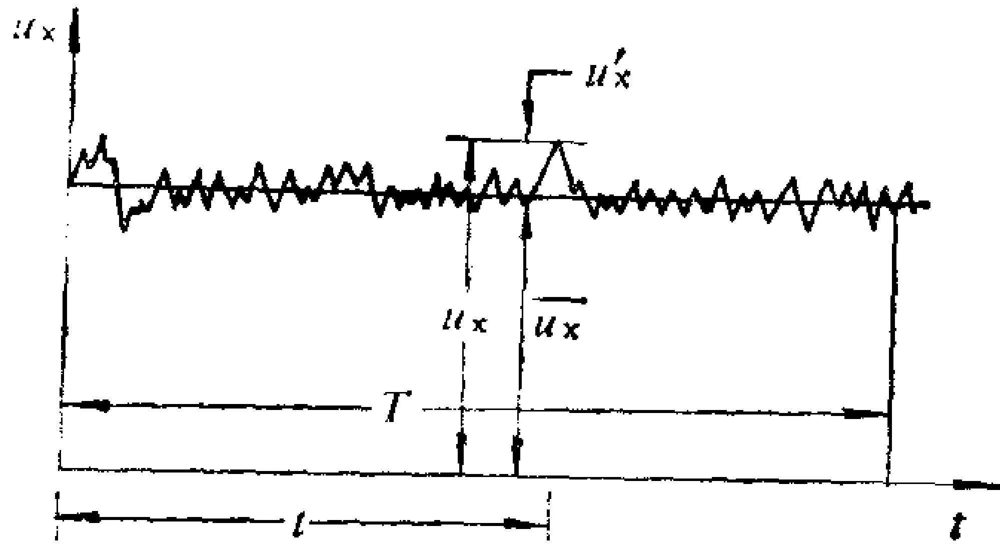


图 7-8　紊流瞬时流速

使其与时间轴所包围的面积等于同一时段内u_x曲线与时间轴所包围的面积，则AB线的纵坐标$\bar{u}_x$就是u_x在T时段内的平均值，只要所取时段T不是很短（比脉动周期长许多倍），

$\bar{u}_x$值便于时段T的长短无关，$\bar{u}_x$就是该点沿流动方向的时均流速，表达式为

$$\bar{u}_x T = \int_0^T u_x dt$$

$$\bar{u}_x = \frac{1}{T}\int_0^T u_x dt \qquad (7\text{-}20)$$

定义了时均流速，瞬时流速就等于时均流速与脉动流速的迭加

$$u_x = \bar{u}_x + u'_x \qquad (7\text{-}21)$$

式中u'_x为该点在流动方向的脉动流速。脉动流速随时间改变，时正时负，时大时小，在不很短的时段T内，时均值为零

$$\overline{u'_x} = \frac{1}{T}\int_0^T u'_x dt = 0 \qquad (7\text{-}22)$$

紊流的脉动不仅在流动方向上存在，同时存在横向脉动，横向脉动流速的时均值也为零，即$\overline{u'_y} = 0$，$\overline{u'_z} = 0$，而脉动流速的均方值不等于零，其值为

$$\overline{u'^2_x} = \frac{1}{T}\int_0^T u'^2_x dt$$

y、z方向脉动流速的均 方 值 表示为$\overline{u'^2_y}$、$\overline{u'^2_z}$。常用紊流强度N来表示紊动的程度

$$N = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}(\overline{u'^2_x} + \overline{u'^2_y} + \overline{u'^2_z})}}{\bar{u}_x} \qquad (7\text{-}23)$$

至此，在流体力学中已提及三种流速概念，它们是

1）瞬时流速u，为流体通过某空间点的实际流速，在紊流状态下随时间脉动；

2）时均流速$\bar{u}$，为某一空间点的瞬时流速在时段T内的时间平均值

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u dt$$

3）断面平均流速v，为过流断面上各点的流速（对紊流而言是时均流速）的算术平均值

$$v = \frac{1}{A}\int_A \bar{u} dA$$

紊流中压强也可同样处理，即

$$p = \bar{p} + p'$$

$$\bar{p} = \frac{1}{T}\int_0^T p dt$$

$$\overline{p'} = \frac{1}{T}\int_0^T p' dt = 0$$

式中，p为瞬时压强；$\bar{p}$为时均压强；p'为脉动压强。

在引入了时均化概念的基础上，把紊流简化为时均流动和脉动流动的迭加，而脉动值的时均值为零。紊流就可根据时均运动参数是否随时间变化，分为恒定流和非恒定流，本

书第四章建立的流线、流管、元流和总流等用欧拉法描述流动的基本概念，在“时均”的意义上继续成立。

最后还需指出，掺混和脉动是紊流固有的特征，并不因采用时均化研究方法而消失，研究紊流的许多问题，例如紊流中切应力的规律、过流断面上流速分布、紊流中热传递规律等等，都必须从紊流的特征出发进行研究，否则不能得到符合实际的结论。

三、紊流的基本方程

雷诺继流态实验研究之后，于1895年对紊流进行了早期系统的研究。雷诺假设：

1）流体由层流过渡到紊流后，固有的物理性质，包括粘度都没有变化，仍保持原有的数值；

2）流体由层流过渡到紊流后，流体的连续性不受破坏，仍是连续介质；

3）描述粘性流体的运动微分方程（N-S方程）对紊流的瞬时流动仍然适用。

虽然上述假设至今尚未得到理论上严密证明，但在近一个世纪以来所有关于紊流的研究都表明，这些假设同实际情况相符。

根据以上假设，在不可压缩粘性流体紊流运动中，密度、粘度为已知常量，流速和压强表示为时均值和脉动量迭加，对于空间流动有：

$$u_x=\bar{u}_x+u'_x,\quad u_y=\bar{u}_y+u'_y,\quad u_z=\bar{u}_z+u'_z$$

$$p=\bar{p}+p'$$

将以上各式分别代入连续性微分方程（5-4）式和不可压缩粘性流体运动微分方程(5-13）式，按时均化法则[注]，对时间取平均值，便得到不可压缩粘性流体紊流时均运动的基本方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}+\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}=0\\
&\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z}=f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}+\nu\nabla^2\bar{u}_x\\
&\quad+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'_xu'_x})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'_xu'_y})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{u'_xu'_z})\right\}\\
&\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial \bar{u}_y}{\partial z}=f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}+\nu\nabla^2\bar{u}_y\\
&\quad+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'_xu'_y})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'_yu'_y})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{u'_yu'_z})\right\}\\
&\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z}=f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}+\nu\nabla^2\bar{u}_z\\
&\quad+\frac{1}{\rho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'_xu'_z})+\frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'_yu'_z})+\frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{u'_zu'_z})\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(7\text{-}24)$$

（7-24）式中的紊流时均运动微分方程又称为**雷诺方程**。比较雷诺方程和纳维-斯托克斯方程，前者多出6项：$\rho\overline{u'^2_x}$，$\rho\overline{u'^2_y}$，$\rho\overline{u'^2_z}$，$\rho\overline{u'_xu'_y}$，$\rho\overline{u'_yu'_z}$，$\rho\overline{u'_xu'_z}$。这6项代表因紊流脉动而产生的附加切应力，统称为**雷诺应力**。雷诺方程是描述紊流运动的基本方程，

[注] 时均化法则 $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$；$\overline{A'}=0$；$\overline{\overline{A}\cdot B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$；$\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$

$\overline{A\cdot B}=\overline{A}\cdot\overline{B}+\overline{A'\cdot B'}$，$\overline{\frac{\partial A}{\partial x}}=\frac{\partial \overline{A}}{\partial x}$，$\overline{\frac{\partial A}{\partial t}}=\frac{\partial \overline{A}}{\partial t}$

为进一步研究紊流运动奠定了理论基础。

紊流时均运动的基本方程组(7-24)式，包括4个独立的方程式10个未知量，方程不闭合，这成为紊流理论研究的一大困难。为使基本方程组闭合，就要在雷诺应力和时均流速之间建立补充关系式。由于对紊流的机理尚未透彻了解，迄今还没有成熟的理论方法，这方面的理论工作主要有两方面：其一是根据实验结果，并引入某些假设，建立雷诺应力与时均流速间的关系，使紊流时均运动的基本方程组闭合，即紊流的半经验理论；其二是运用统计数学的概念和方法描述紊流，研究脉动运动的变化规律，建立紊流运动闭合的方程组，即紊流的统计理论。本课程只介绍工程上应用较普遍的半经验理论。

四、紊流的半经验理论

紊流的半经验理论包括普朗特（L.Prandtl）、泰勒（G.Taylor）等学说，其中普朗特的混合长度理论，为平面恒定均匀紊流的切应力建立了一个简易可行的计算模型，进而在工程上得到了广泛应用，下面做简单介绍：

设平面恒定均匀紊流，x 轴与流向平行，如图7-9。



图 7-9 平面均匀紊流

根据流动条件

$$u_x=\overline{u}_x+u_x',\quad u_y=u_y',\quad u_z=u_z'$$

$$\overline{u}_x=\overline{u}_x(y),\quad \overline{u}_y=\overline{u}_z=0$$

雷诺方程中的第一个方程式简化为

$$\rho f_x+\mu\frac{d^2\overline{u}_x}{dy^2}-\frac{d}{dy}\ \rho\overline{u_x'u_y'})=0$$

其中 $f_x=g\sin\theta$

改写上式
$$\rho f_x dy=d(\overline{\rho u_x'u_y'})-\mu d\left(\frac{d\overline{u}_x}{dy}\right)$$

积分得
$$\rho f_x y=\rho\overline{u_x'u_y'}-\mu\frac{d\overline{u}_x}{dy}+C$$

当$y=h$时，可以认为$\frac{d\overline{u}_x}{dy}\approx 0$，由本节后面即将得到的$\frac{d\overline{u}_x}{dy}$与$\overline{u_x'u_y'}$的关系可知$\overline{u_x'u_y'}\approx 0$，代入上式，得$C=\rho f_x h$。所以

$$\rho f_x(h-y)=\mu\frac{d\overline{u}_x}{dy}-\rho\overline{u_x'u_y'}$$

在平面恒定均匀流中，任取隔离体，由合外力平衡

$$\rho f_x(h-y)B-\overline{\tau}B=0$$

得切应力
$$\overline{\tau}=\rho f_x(h-y)$$

于是
$$\overline{\tau}=\mu\frac{d\overline{u}_x}{dy}-\rho\overline{u_x'u_y'} \tag{7-25}$$

（7-25）式表明，紊流时均切应力由两部分组成，其中$\mu\frac{d\bar{u}_x}{dy}$与层流的情况类似，是相邻流层间时均流速相对运动所产生的粘滞切应力。下面分析$-\rho\overline{u_x'u_y'}$项的意义：

在平面恒定均匀流中，取a点，包含a点在内沿流动方向作微小面积$\varDelta A$，设a点的时均速度为$\bar{u}_x$，x，y方向的脉动速度为u_x'、u_y'（图7-10）。当a点出现$+u_y'$，单位时间内有质量$\rho u_y'\varDelta A$的流体从截面$\varDelta A$下层流入上层，这部分流体沿主流方向的流速为$\bar{u}_x+u_x'$，随着质量传递，沿主流方向就将动量$\varDelta K$带至上层

$$\varDelta K=\rho u_y'(\bar{u}_x+u_x')\varDelta A$$

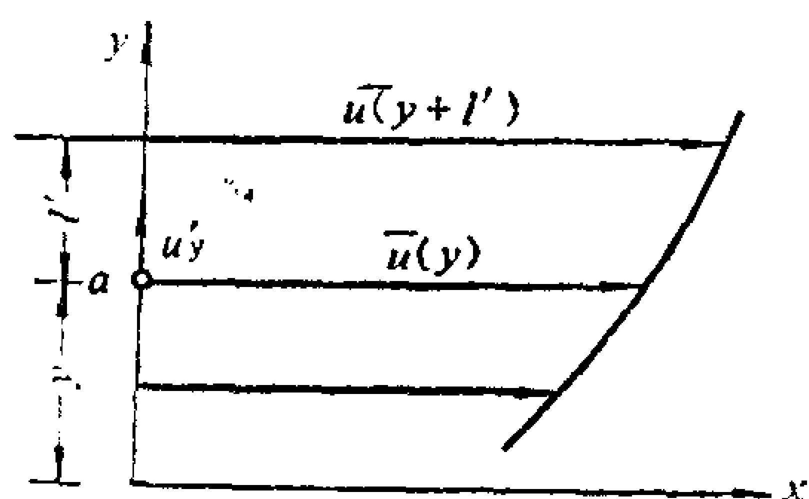


图 7-10 紊流附加切应力

当a点出现$-u_y'$时，则有相应的动量从上层带至下层。根据动量定理，动量的变化率等于$\varDelta A$上所受外力

$$\varDelta T=\rho u_y'(\bar{u}_x+u_x')\varDelta A$$

切应力
$$\tau_2=\rho u_y'(\bar{u}_x+u_x')$$

对时间取平均值
$$\bar{\tau}_2=\rho\overline{u_y'(\bar{u}_x+u_x')}=\rho\,\overline{u_x'u_y'}$$

式中脉动流速u_x'、u_y'是同时存在的相关量，具有相同的数量级，当u_y'为正值时，流体质点由下层进入上层，因下层的时均流速小于上层，对上层流体有阻滞作用，将影响该层瞬时流速u_x降低，在多数情况下，可认为u_x'是负值；反之，u_y'为负值时，流体质点由上层进入下层，因上层的时均流速大于下层，对下层流体有推曳作用，在多数情况下，可认为u_x'是正值。可见u_x'、u_y'在同一瞬时异号。为使因脉动流速引起的附加切应力$\bar{\tau}_2$与粘滞切应力$\bar{\tau}_1$的表示方式一致，以正值出现，前面加负号，即

$$\bar{\tau}_2=-\rho\overline{u_x'u_y'}\qquad（7\text{-}26）$$

综合上面对（7-25）式的分析，紊流的时均切应力$\bar{\tau}$由两部分组成，一部分是相邻流层间时均流速相对运动所产生的粘滞切应力$\bar{\tau}_1$，另一部分是由脉动流速所引起的附加切应力$\bar{\tau}_2$，即

$$\bar{\tau}=\bar{\tau}_1+\bar{\tau}_2=\mu\frac{d\bar{u}_x}{dy}-\rho\,\overline{u_x'u_y'}$$

关于紊流附加切应力$\bar{\tau}_2$的计算，在（7-26）式中脉动流速u_x'、u_y'随时间无规则的变化，不便直接应用，如能找到脉动流速和时均流速的关系，就可通过断面时均流速的变化来确定附加切应力$\bar{\tau}_2$。1925年普朗特借用研究气体分子运动的概念，研究紊流附加切应力$\bar{\tau}_2$和时均流速的关系，提出混合长度理论。混合长度理论假设：

1）与气体分子运动自由行程类似，流体质点因紊流脉动，竖向位移l'到达新的流层，才同周围质点发生动量交换，失去原有的特征，l'称为混合长度（图7-10）。距离l'间的时均流速差为

$$\varDelta\bar{u}_x=\bar{u}_x(y+l')-\bar{u}_x(y)=\bar{u}_x(y)+\frac{d\bar{u}_x}{dy}l'-\bar{u}_x(y)=\frac{d\bar{u}_x}{dy}l'$$

2）纵向脉动流速绝对值的时均值$\overline{|u_x'|}$与时均流速差$\varDelta\bar{u}_x$成比例，且$\overline{|u_x'|}$与$\overline{|u_y'|}$有相同的数量级$\overline{|u_x'|}\propto\overline{|u_y'|}$，即

$$\overline{|u_x'|}=C_1l'\frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

$$\overline{|u_y'|}=C_2\overline{|u_x'|}=C_1C_2l'\frac{d\bar{u}_x}{dy}$$

式中，C_1、C_2为比例常数。

（7-26）式中，脉动流速乘积的时均值，不等于上述脉动流速绝对值的时均值的乘积，但两者存在比例关系

$$-\overline{u_x'u_y'}=C_3\overline{|u_x'|}\cdot\overline{|u_y'|}$$

式中，C_3为比例常数。

$$-\overline{u_x'u_y'}=C_1^2C_2C_3l'^2\left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)^2=l^2\left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)^2$$

$l^2=C_1^2C_2C_3l'^2$，l也称为混合长度，是一个同竖向脉动距离有关的量。

于是，平面恒定均匀紊流附加切应力

$$\overline{\tau_2}=\rho l^2\left(\frac{d\bar{u}_x}{dy}\right)^2 \tag{7-27}$$

以后为简化起见，略去表示时均量的横标线。

将（7-27）式代入（7-25）式，得

$$\tau=\mu\frac{du}{dy}+\rho l^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tag{7-28}$$

当雷诺数很大，粘滞切应力比附加切应力小很多，可忽略不计，此时

$$\tau=\rho l^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tag{7-29}$$

为了确定混合长度l，认为在壁面附近l值与质点到壁面的距离有关，壁面处质点竖向脉动流速为零，l亦应为零，给出函数式

$$l=\beta y$$

由实验得到系数β为一常数，称为卡门(Karman)通用常数，$\beta\approx0.4$。在壁面附近，近似取$\tau=\tau_0$代入（7-29）式

$$\tau_0=\rho\beta^2y^2\left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

$$\frac{du}{dy}=\frac{1}{\beta y}\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}=\frac{v_*}{\beta y}$$

积分

$$u=\frac{1}{\beta}v_*\ln y+C \tag{7-30}$$

上式就是由混合长度理论得到的在壁面附近紊流流速分布规律，进一步将其推广用于除粘性底层以外的全部过流断面，同实际流速分布仍相符。（7-30）式称为普朗特—卡门对数分布律。实验表明，在渠道、管道中的流速分布也符合这一规律，只是常数C根据具体流动情况由实验确定，因此说，普朗特—卡门对数分布律有普遍意义。

由混合长度理论得到了紊流时均切应力表达式（7-29）式和流速分布规律（7-30）式。同时也应看到混合长度理论的不足，表现为基本假设不够严谨，如认为流体质点经过混合长度l'才一次与周围质点进行动量交换，然而根据流体是连续介质，质点在位移l'的过程中应连续地与周围质点接触。又如公式中的系数都必须由实验来确定。此外，对圆管流来说，流速分布是连续的，在管轴处流速达最大值，但由（7-30）式得出$\left(\frac{du}{dy}\right)_{y=r_0}\neq$

0，同实际不符。尽管如此，由于混合长度理论是从紊流的特征出发，反映了紊流的特点，同时推导简单，理论结果与实际相符，至今仍在工程上得到广泛应用的紊流阻力理论。

§7-6　紊流的沿程水头损失

圆管沿程水头损失按（7-1）式计算

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}$$

式中沿程阻力系数λ，由于紊流的复杂性，还不能象层流那样严格地从理论上推导出来。工程上由以下两种途径确定λ值：一种是以紊流的半经验理论为基础，结合实验结果，整理成半经验公式；另一种是直接根据紊流沿程损失的实测资料综合成阻力系数λ的经验公式。前者具有更为普遍的意义。

一、尼古拉兹实验

为了验证和发展普朗特的半经验理论，1933年德国工程师尼古拉兹（Nikuradse）进行了紊流沿程阻力系数和断面流速分布的实验测定。

（1）沿程阻力系数λ的影响因素

进行沿程阻力系数实验之前，要找出它的影响因素。圆管层流沿程阻力系数$\lambda=64/\mathrm{Re}$，只和雷诺数有关，与管壁粗糙无关；在紊流中，沿程阻力系数除和流动状况（由雷诺数反映）有关外，还因为在一定条件下，壁面粗糙对流动的扰动作用产生涡体，直接影响流动的紊动程度，因此壁面粗糙是影响沿程阻力系数的另一个重要因素。

壁面粗糙情况一般来说包括粗糙突起的高度、形状，以及疏密和排列等。为便于分析粗糙的影响，尼古拉兹将经过筛选的均匀砂粒，紧密地贴在管壁表面，做成所谓人工粗糙（图7-11）。对于这种简化的粗糙形式，可用糙粒的突起高度$\varDelta$（相当于砂粒直径）来表示壁面的粗糙程度，$\varDelta$称为**绝对粗糙**，$\varDelta$与直径（或半径）之比$\varDelta/d$（或$\varDelta/r_0$）称为相对粗糙，它是一个能在不同直径的管道中反映管壁粗糙影响的量。由以上分析得出，雷诺数和相对粗糙是沿程阻力系数的影响因素，即

$$\lambda=f(\mathrm{Re},\ \varDelta/d)$$

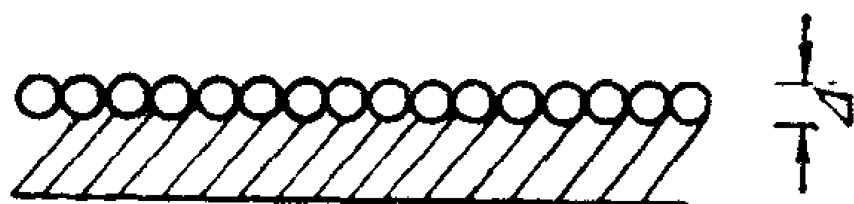


图 7-11　人工粗糙

沿程阻力系数是雷诺数和相对粗糙的函数，可以借助量纲分析的方法，应用π定理得到（见§6-2[例6-3]）。

（2）沿程阻力系数的测定和阻力分区图

尼古拉兹应用类似图7-2所示的实验装置，采用人工粗糙管进行实验，实验管道相对粗糙的变化范围为$\frac{\varDelta}{d}=\frac{1}{3}\sim\frac{1}{1014}$，对每根管道（对应一个确定的$\varDelta/d$值）实测不同流量时断面平均流速$v$和沿程水头损失$h_f$，由

$$\mathrm{Re}=\frac{vd}{\nu}\text{和}\ \lambda=\frac{d}{l}\ \frac{2g}{v^2}h_f$$

两式，算出Re和λ值，将其点绘在对数坐标纸上，就得到$\lambda=f(\mathrm{Re},\ \Delta/d)$曲线，即尼古拉兹曲线图（图7-12）。

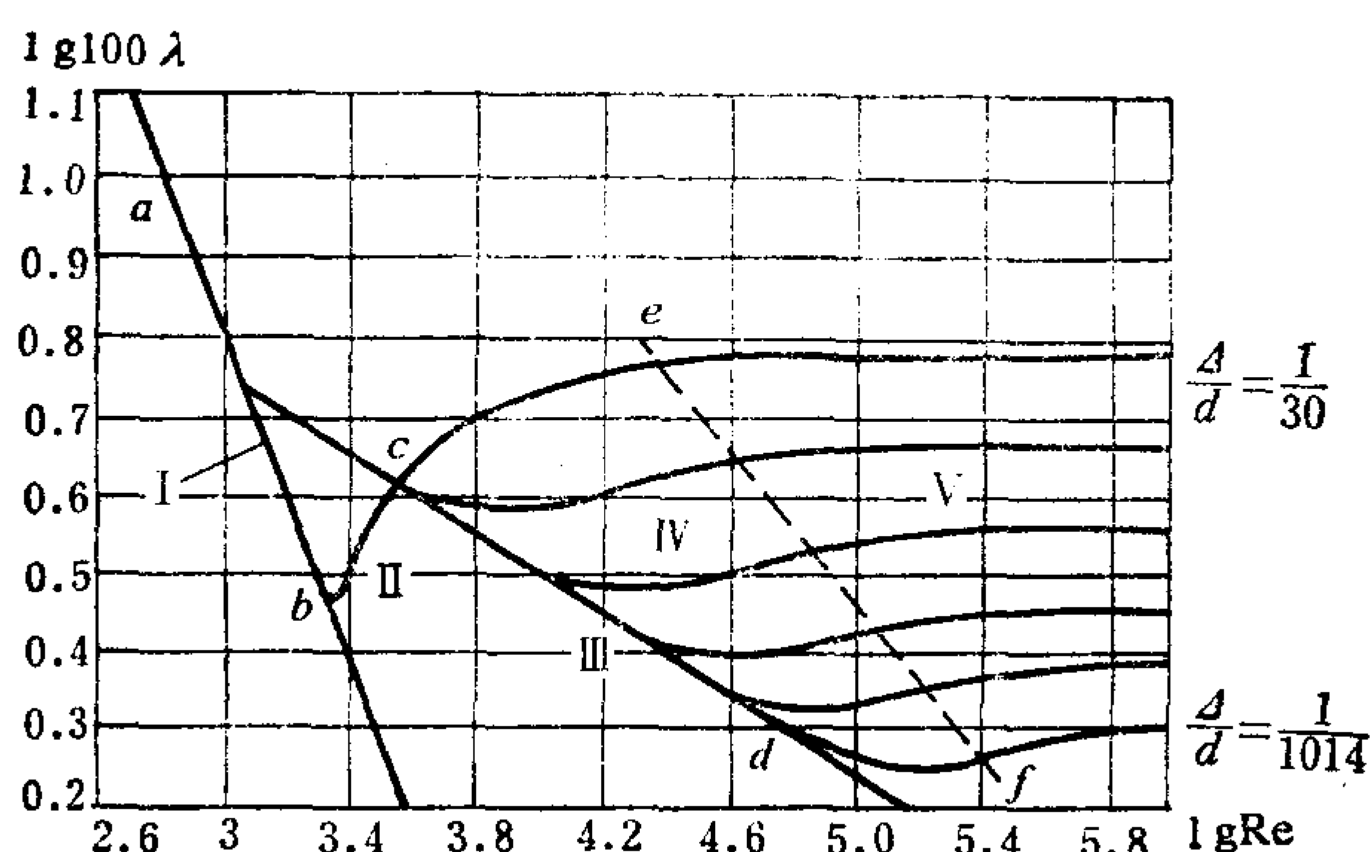


图 7-12　尼古拉兹实验曲线图

根据λ的变化特性，上面尼古拉兹实验曲线分为五个阻力区：

第Ⅰ区（ab线，$\lg\mathrm{Re}<3.3$，$\mathrm{Re}<2000$），该区是层流区。不同相对粗糙管的实验点都在同一直线上，表明λ与相对粗糙Δ/d无关，只是Re的函数，并且符合$\lambda=64/\mathrm{Re}$，由此可证明，在§7-4中推导的理论结果与实验相符；

第Ⅱ区（bc线，$\lg\mathrm{Re}=3.3-3.6$，$\mathrm{Re}=2000-4000$），不同相对粗糙管的实验点都在同一曲线上，表明λ与相对粗糙Δ/d无关，只是Re的函数，此区是层流向紊流的过渡。这个区的范围很小，实用意义不大，故不予讨论；

第Ⅲ区（cd线，$\lg\mathrm{Re}>3.6$，$\mathrm{Re}>4000$），不同相对粗糙管的实验点都在cd线上，表明λ与相对粗糙Δ/d无关，只是Re的函数。随着Re增大，Δ/d大的管道，实验点在Re较低时便离开cd线，而Δ/d小的管道，在Re较高时才离开此线，该区称为紊流光滑区；

第Ⅳ区（cd、ef间的曲线族），不同相对粗糙管的实验点分属各自的曲线，表明λ既与Re有关，又与Δ/d有关，该区称为紊流过渡区；

第Ⅴ区（ef右侧与横轴平行的直线族），不同相同粗糙管的实验点分别在不同的水平直线上，表明λ只与相对粗糙Δ/d有关，与Re无关，该区称为紊流粗糙区。在这个阻力区，对于一定的管道λ是定数，由（7-1）式可知，沿程水头损失与流速的平方成正比，所以紊流粗糙区又称为阻力平方区。

如上述，紊流分为光滑区、过渡区及粗糙区三个阻力区，各区λ的变化规律不同，究其原因是存在着粘性底层的缘故。在紊流光滑区，粘性底层的厚度δ显著的大于粗糙突起的高度Δ，粗糙突起完全被掩盖在粘性底层内，对紊流核心的流动几乎没有影响，因而λ只与Re有关，与Δ/d无关（图7-13a）；在紊流过渡区，由于粘性底层的厚度变薄，接近于粗糙突起的高度，粗糙影响到紊流核心的紊动程度，λ与Re和Δ/d两个因素有关（图7-13b）；在紊流粗糙区，粘性底层的厚度δ远小于粗糙突起高度Δ，粗糙突起已几乎完全突入紊流核心内，此时Re的变化对粘性底层、以及对流动紊动程度的影响已微不足道，所以λ只与Δ/d有关，与Re无关（图7-13c）。以上所谓“光滑”和“粗糙”都是流动阻力

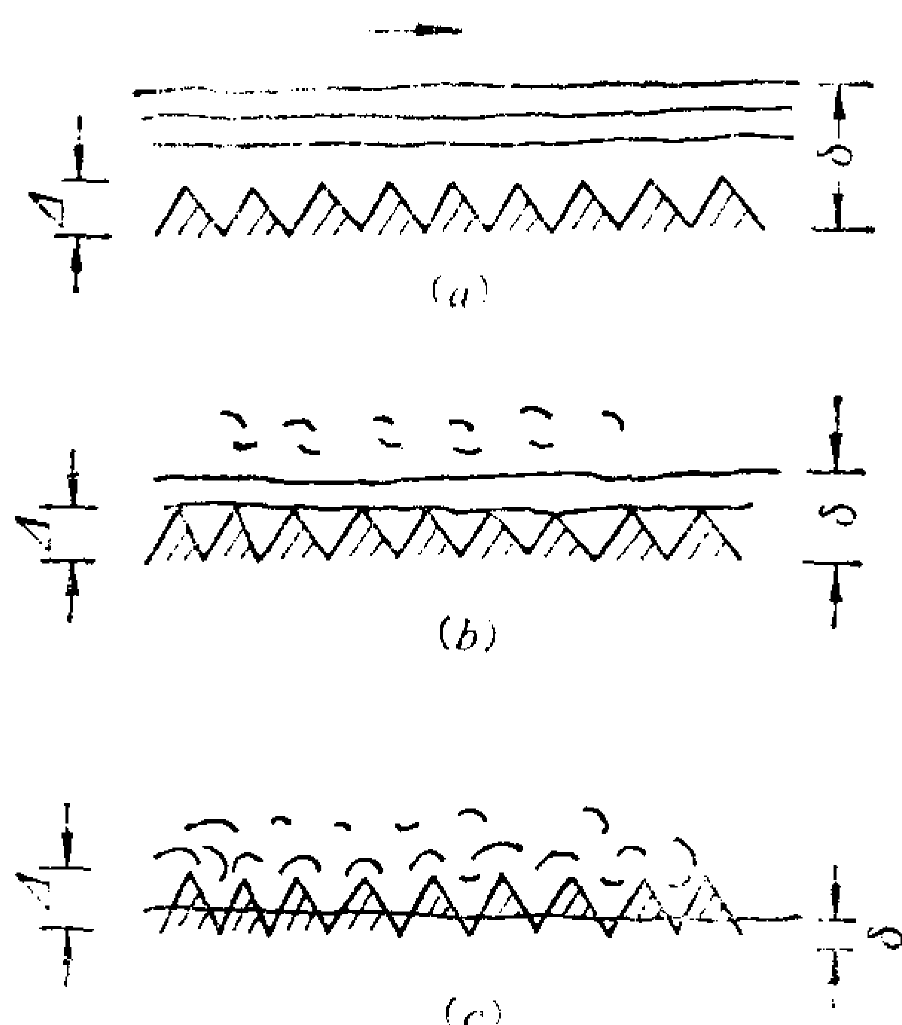


图 7-13 粘性底层的变化

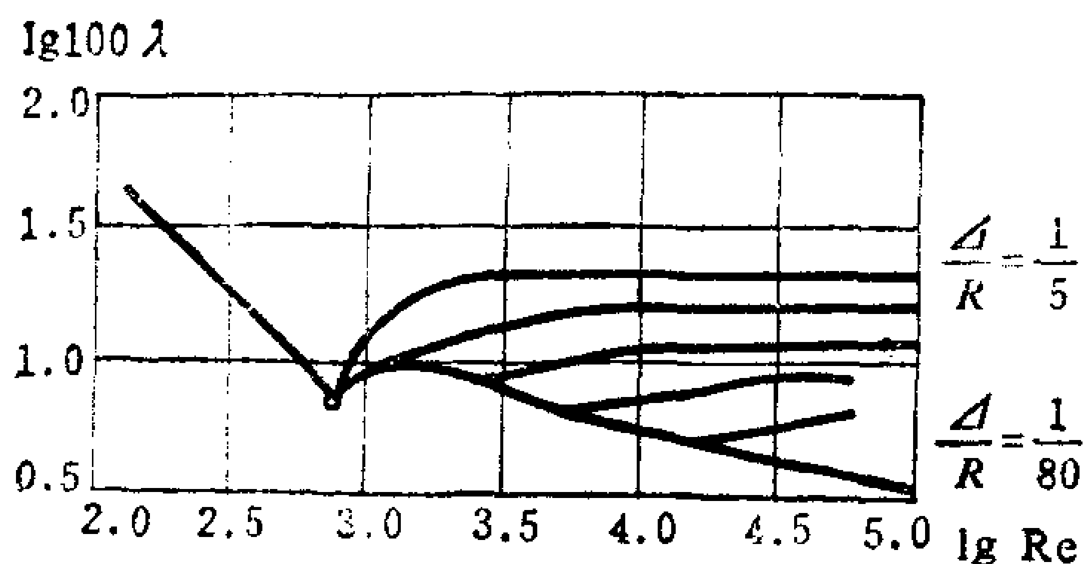


图 7-14 蔡克士大实验

分区的概念。

此外，1933年苏联水力学家蔡克士大（А.П.Зегжда）在人工粗糙明槽中进行了沿程阻力系数的实验研究，得出同尼古拉兹实验类似的规律，见（图7-14）。

二、流速分布

尼古拉兹通过实测流速分布，完善了由混合长度理论得到的流速分布公式，使之具有实用意义。

（1）紊流光滑区

紊流光滑区流速分布分为紊流核心和粘性底层两部分。

紊流核心的流速分布符合普朗特—卡门对数分布律（7-30）式，将该式无量纲化

$$\frac{u}{v_*}=\frac{1}{\beta}\ln y+C'$$

常数C'应满足等号右侧为无量纲量，根据尼古拉兹实验，紊流光滑区流动情况只和雷诺数有关，取

$$C'=C_1+\frac{1}{\beta}\ln\frac{v_*}{\nu}$$

于是
$$\frac{u}{v_*}=\frac{1}{\beta}\ln\frac{v_* y}{\nu}+C_1$$

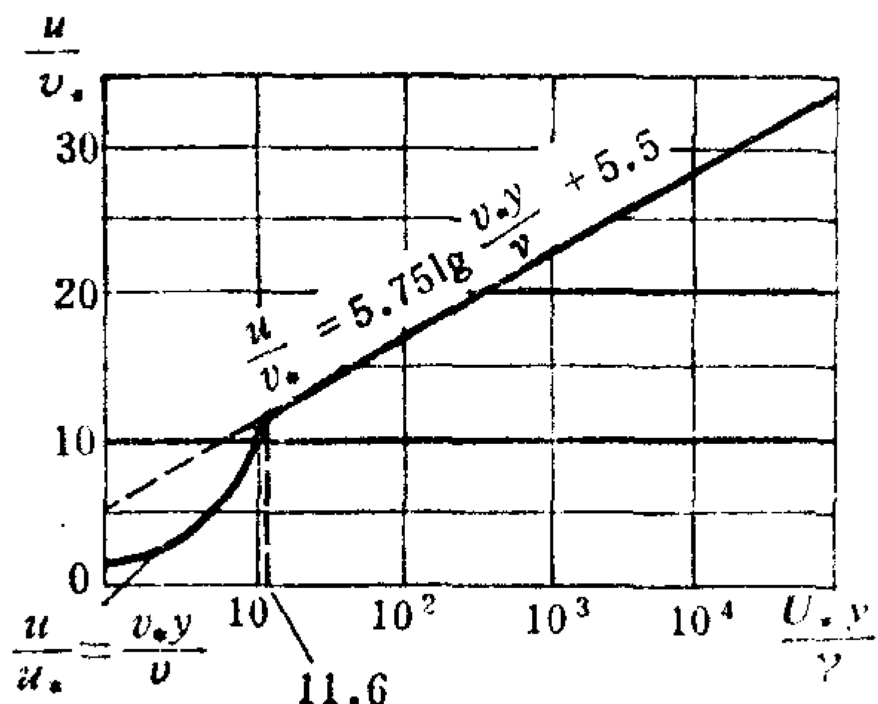


图 7-15 光滑区无量纲流速曲线

式中C_1为无量纲数，用实测值以$\lg(v_* y/\nu)$为横坐标，u/v_*为纵坐标绘无量纲流速关系曲线，不同管道的实验点都在同一直线上（图7-15）。由图得到$\beta=0.4$，$C_1=5.5$，代入上式得紊流光滑区流速分布半经验公式

$$\frac{u}{v_*}=5.75\lg\frac{v_* y}{\nu}+5.5 \tag{7-31}$$

粘性底层流速分布符合（7-15）式

$$u=\frac{\gamma J}{4\mu}[r_0^2-(r_0-y)^2]=\frac{\gamma J}{2\mu}y\left(r_0-\frac{y}{2}\right)$$

因为粘性底层很薄$y\ll r_0$，$r_0-\frac{y}{2}\approx r_0$，再将（7-9）式代入上式，得

$$u = \frac{\tau_0}{\mu} y \qquad (7\text{-}32)$$

在层流底层内（$y \leqslant \delta$）流速近似直线分布。

以阻力速度v_*除（7-32）式，并以$\mu = \rho\nu$、$v_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$代入，得粘性底层无量纲速度

$$\frac{u}{v_*} = \frac{v_* y}{\nu} \qquad (7\text{-}33)$$

如忽略过渡层，层流底层外边界（$y = \delta$）处，应同时满足（7-31）、（7-33）式，由(图7-15)可知，满足这个条件的粘性底层厚度为

$$\delta = 11.6\frac{\nu}{v_*} \qquad (7\text{-}34)$$

将 $v_* = v\sqrt{\lambda/8}$ 代入上式，整理得

$$\delta = \frac{32.8d}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}} \qquad (7\text{-}35)$$

这表明δ随Re的增大而减小。同一管道，低流速时Re较小，δ较大，如δ足以掩盖粗糙突起的影响，流动为光滑区；随着流速增加，Re不断加大，δ减小，当粗糙突起几乎全部突入紊流核心时，流动进入粗糙区。

紊流光滑区的流速分布，除上述尼古拉兹半经验公式外，还有指数公式

$$\frac{u}{u_m} = \left(\frac{y}{r_0}\right)^n \qquad (7\text{-}36)$$

式中 u——距管壁y处的流速；

u_m——管轴处的最大流速；

n——随Re而变的指数。

当$\mathrm{Re} < 10^5$时，$n = 1/7$，叫做流速分布的**七分之一次方律**；当$\mathrm{Re} > 10^5$时，n采用1/8、1/9、1/10值，可得到更准确的结果。

（2）紊流粗糙区

粗糙区粘性底层的厚度远小于壁面粗糙突起高度，粘性底层已无意义，整个断面流速按（7-30）式分布，将该式无量纲化

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\beta}\ln y + C'$$

常数C'应满足等号右侧为无量纲量，根据尼古拉兹实验，紊流粗糙区流动情况只和壁面粗糙有关，取

$$C' = C_2 - \frac{1}{\beta}\ln\Delta$$

于是

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\beta}\ln\frac{y}{\Delta} + C_2$$

式中C_2为无量纲数，类似光滑区确定β、C的方法；以$\lg(y/\Delta)$为横坐标，u/v_*为纵坐标绘无量纲流速关系曲线（图7-16）。由图得到$\beta = 0.4$，$C_2 = 8.5$，代入上式得紊流粗糙区流速分布半经验公式

$$\frac{u}{v_*} = 5.75\lg\frac{y}{\Delta} + 8.5 \qquad (7\text{-}37)$$

三、λ的半经验公式

在流速分布的基础上，可导出沿程阻力系数的半经验公式

（1）光滑区沿程阻力系数

断面平均流速

$$v=\frac{\int_0^{r_0} u 2\pi r dr}{\pi r^2}$$

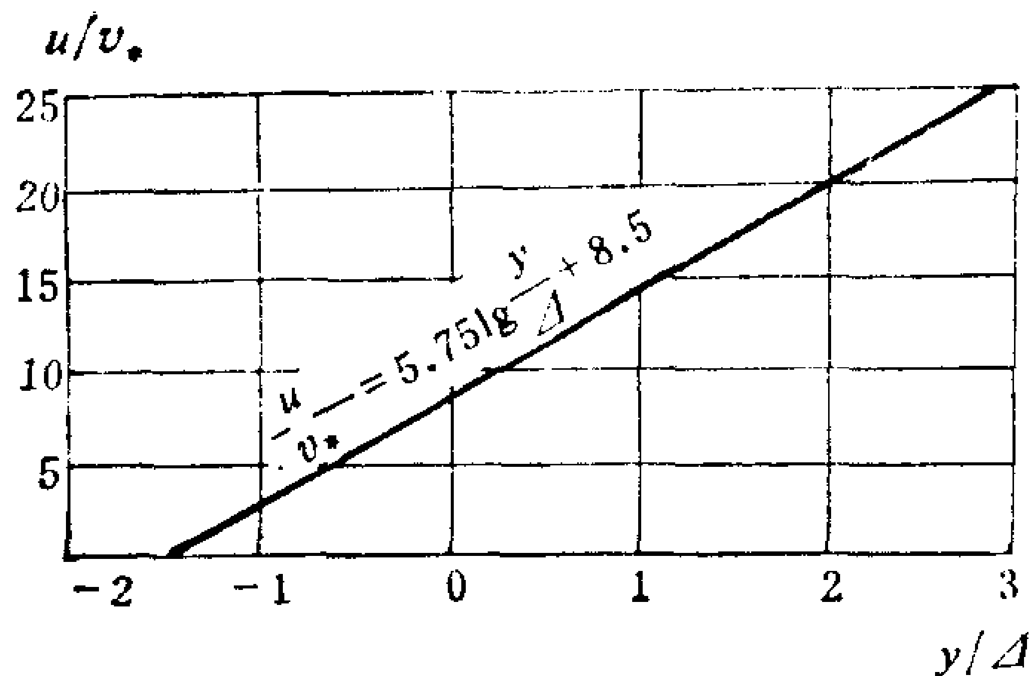


图 7-16 粗糙区无量纲流速曲线

式中u以半经验公式（7-31）式代入，由于粘性底层很薄，认为紊流核心内流速分布曲线延伸到壁面，积分上限取r_0，得

$$v=v_*\left(5.75\lg\frac{v_* r_0}{\nu}+1.75\right)$$

以 $v_*=v\sqrt{\lambda/8}$ 代入上式，并根据实验数据调整常数，得到紊流光滑区沿程阻力系数λ的半经验公式，也称为尼古拉兹光滑管公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg Re\sqrt{\lambda}-0.8$$

或
$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg\frac{Re\sqrt{\lambda}}{2.51} \qquad (7\text{-}38)$$

（2）粗糙区沿程阻力系数

按推导光滑区λ半经验公式的相同步骤，可得到紊流粗糙区沿程阻力系数λ的半经验公式，通常称它为尼古拉兹粗糙管公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=2\lg\frac{3.7d}{\varDelta} \qquad (7\text{-}39)$$

（3）阻力区的判别

由于不同阻力区沿程阻力系数λ的计算公式不同，只有区分出各阻力区，才能选用相应的公式。前面已经说明，不同的阻力区是由粘性底层的厚度δ和壁面粗糙突起高度$\varDelta$的相互关系决定的，因此，根据δ和$\varDelta$的对比情况来判别阻力区，由（7-34）式

$$\frac{\varDelta}{\delta}=\frac{1}{11.6}\frac{v_*\varDelta}{\nu}=\frac{1}{11.6}Re_* \qquad (7\text{-}40)$$

式中 $Re_*=\frac{v_*\varDelta}{\nu}$ 称为**粗糙雷诺数**，Re_*可做为阻力分区的标准：

$$\left.\begin{array}{ll} Re_*<4,\ \delta>3\varDelta, & \text{紊流光滑区；} \\ Re_*>60,\ \varDelta>5\delta, & \text{紊流粗糙区；} \\ 5\leqslant Re_*\leqslant 60,\ 2.3\varDelta\leqslant\delta\leqslant 5\varDelta, & \text{紊流过渡区} \end{array}\right\} \qquad (7\text{-}41)$$

四、工业管道和柯列勃洛克公式

由混合长度理论结合尼古拉兹实验，得到了紊流光滑区和粗糙区λ的半经验公式（7-38）、（7-39）式，但紊流过渡区的公式尚未解决，同时，上述半经验公式都是在人工粗糙的基础上得到的，而人工粗糙和工业管道的粗糙有很大差异，怎样把这两种不同的粗糙形式联系起来，从而使尼古拉兹半经验公式能用于工程实际是一个重要问题。

在紊流光滑区，工业管道和人工粗糙管道虽然粗糙不同，但已为粘性底层所掩盖，对

紊流核心无影响，实验证明（7-38）式也适用于工业管道。

在紊流粗糙区，工业管道和人工粗糙管道的粗糙突起同样几乎完全突入紊流核心，λ有相同的变化规律，这样（7-39）式有可能应用于工业管道，问题是如何确定式中的Δ值。为解决这个问题，以尼古拉兹实验的人工粗糙为度量标准，把工业管道的粗糙折算成人工粗糙，这样便提出了当量糙粒高度的概念。把相同直径、粗糙区λ值相等的人工粗糙管的粗糙突起高度Δ称之为该管材工业管道的**当量糙粒高度**，它就是以工业管道粗糙区实测的λ值，代入尼古拉兹粗糙管公式（7-39）式反算得到的Δ值。可见工业管道的当量糙粒高度是按沿程损失的效果相同得出的折算高度，它反映了糙粒各种因素对λ的综合影响。有了当量糙粒高度，（7-39）式就可用于工业管道。

应用（7-38）、（7-39）式计算工业管道沿程阻力系数时，由于工业管道的粗糙不同于人工粗糙，（7-40）式不能做为工业管道紊流阻力分区的标准。苏联学者阿里特苏里（А.Д.Альтшуль）提出

$$\left.\begin{array}{l} Re\cdot\Delta/D\leqslant 20，\text{紊流光滑区；} \\ Re\cdot\Delta/D\geqslant 500，\text{紊流粗糙区；} \\ 20<Re\cdot\Delta/D<500，\text{紊流过渡区} \end{array}\right\}$$

部分常用工业管道的当量糙粒高度Δ值见表7-1。

常用工业管道的当量糙粒高度 **表 7-1**

管道材料	Δ (mm)	管道材料	Δ (mm)
钢板制风管	0.15	新氯乙烯管	0～0.002
塑料板制风管	0.01	铅管、铜管、玻璃管	0.01
矿渣石膏板风管	1.0	钢管	0.046
表面光滑的砖风道	4.0	涂沥青铸铁管	0.12
矿渣混凝土板风道	1.5	混凝土管	0.3～3.0
铁丝抹灰风道	10～15	木条拼合圆管	0.18～0.9
胶合板风道	1.0	镀锌钢管	0.15
地面沿墙砌造风道	3～6	新铸铁管	0.15～0.5
墙内砌砖风道	5～10	旧铸铁管	1～1.5

在紊流过渡区，工业管道的不均匀粗糙突破层流底层进入紊流核心是一个逐渐过程，不同于人工粗糙。为比较λ变化规律的不同，将

$$Re\sqrt{\lambda}=\frac{vd}{\nu}\cdot\frac{v_*}{v}\sqrt{8}=\frac{v_*\Delta}{\nu}\frac{d}{\Delta}\sqrt{8}=Re_*\frac{d}{\Delta}\sqrt{8}$$

代入（7-38）式，经整理变换，得

光滑区 $$2\lg\frac{3.7d}{\Delta}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg Re_*+1.033$$

粗糙区 $$2\lg\frac{3.7d}{\Delta}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=0$$

这样一来，如以$\lg Re_*$为横坐标，$2\lg\frac{3.7d}{\Delta}-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$为纵坐标，就可以把尼古拉兹图上的实验曲线整理成一条综合阻力曲线（图7-17）。柯列勃洛克（Colebrook）将大量工

业管道实验资料与尼古拉兹综合阻力曲线比较，显然尼古拉兹过渡区的实验结果对工业管不适用。柯列勃洛克提出工业管道λ计算公式，即柯列勃洛克公式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left(\frac{\Delta}{3.7d}+\frac{2.51}{\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}}\right) \tag{7-42}$$

式中Δ为工业管道的当量糙粒高度，可由表7-1查得。

柯列勃洛公式实际上是尼古拉兹光滑区公式和粗糙区公式的结合，当低Re时，公式右边括号内第二项很大，第一项相对很小，该式接近尼古拉兹光滑区公式；当Re很大时，公式右边第二项很小，该式接近尼古拉兹粗糙区公式。这样，柯列勃洛克公式不仅适用于工业管道紊流过渡区，而且可用于紊流的全部三个阻力区，故又称为紊流的综合公式。柯列勃洛克公式虽然原是经验公式，但它是在合并两个半经验公式的基础上得出的，因此可以认为该式是普朗特理论和尼古拉兹实验结合后进一步发展到工程应用阶段的成果。由于公式适用范围广，与实验结果符合较好，在国内外得到了广泛应用。我国通风管道的设计计算，目前就是以该式为基础的。

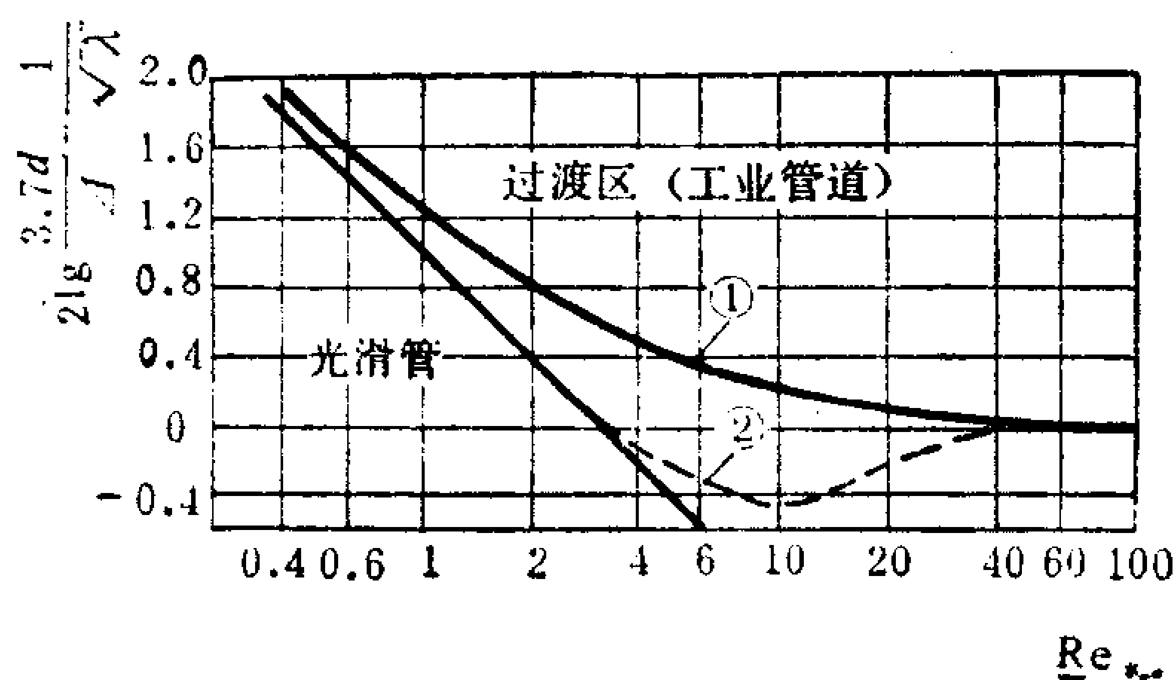


图 7-17 综合阻力曲线

①—柯列勃洛克公式 ②—尼古拉兹综合曲线

为了简化计算，1944年莫迪（Moody）以柯列勃洛克公式为基础，绘制出工业管道$\lambda=f(\mathrm{Re},\Delta/d)$曲线图，即莫迪图（图7-18），在图上可按Re和$\Delta/d$直接查出$\lambda$值。

此外，在柯列勃洛克公式的基础上，还提出一些简化公式，如

1）莫迪公式

$$\lambda=0.0055\left[1+\left(2000\frac{\Delta}{d}+\frac{10^{6}}{\mathrm{Re}}\right)^{1/3}\right] \tag{7-43}$$

这是柯列勃洛克公式的近似公式，在$\mathrm{Re}=10^{4}\sim10^{7}$，$\Delta/d\leqslant0.01$，$\lambda<0.05$时和柯氏公式比较，其误差不超过5%；

2）阿里特苏里公式

$$\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}+\frac{68}{\mathrm{Re}}\right)^{0.25} \tag{7-44}$$

这也是柯氏公式的近似公式；

3）国内简化公式

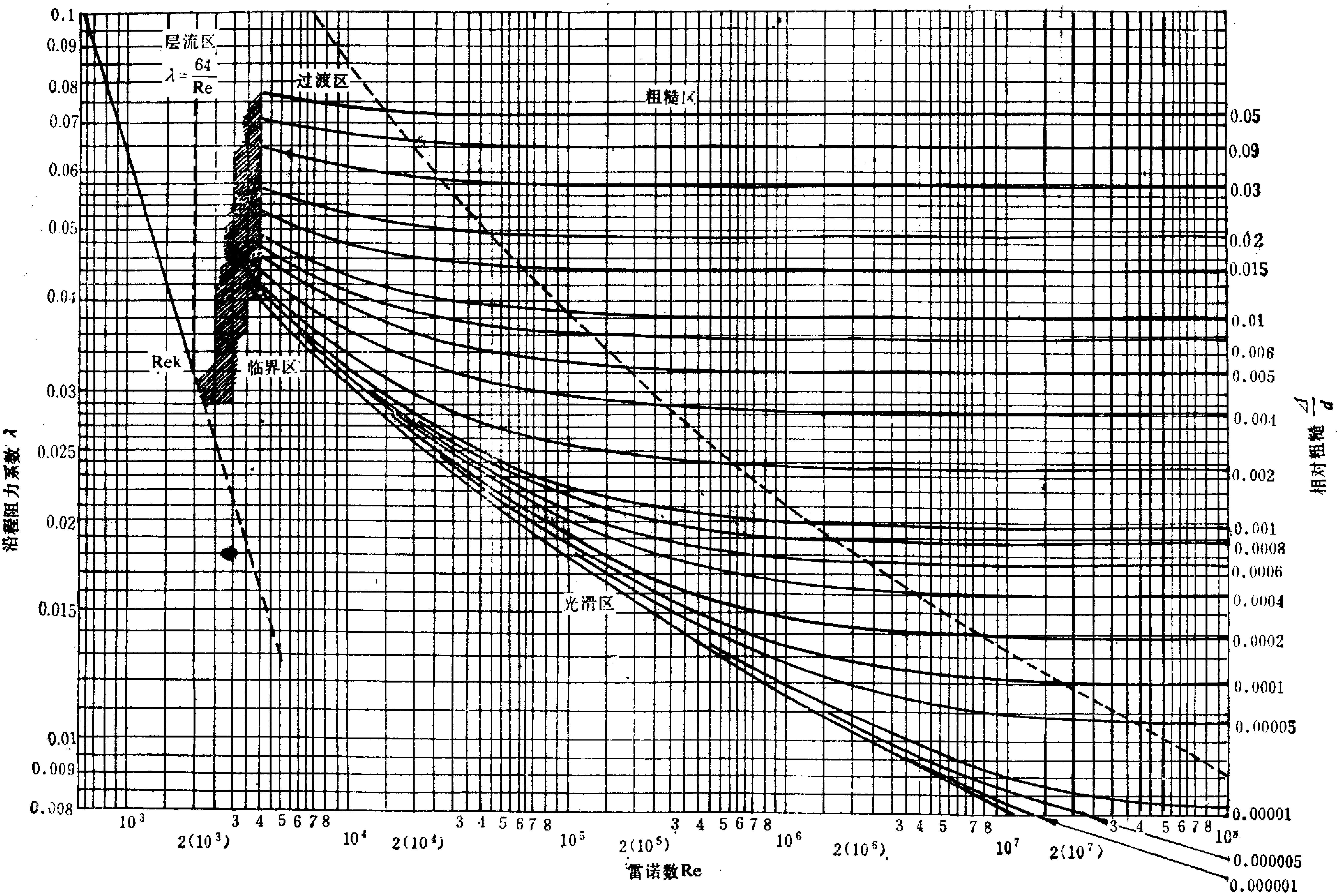
对于通风空调中常用的薄钢板风道（$\Delta=0.15$mm）

$$\lambda=0.0175d^{-0.21}v^{-0.075} \tag{7-45}$$

在$d=0.2\sim2.0$m，$v=5\sim30$m/s范围内，结果与（7-42）式很接近，该式作为（7-42）式的简化公式为我国《供暖通风设计手册》采用。

五、沿程阻力系数的经验公式

除了以上的半经验公式外，还有许多直接由实验资料整理成的经验公式，这里只介绍几个应用最广的公式



层流区
$\lambda=\frac{64}{Re}$
过渡区
粗糙区
临界区
光滑区
Rek
沿程阻力系数 λ
0.1
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.025
0.02
0.015
0.01
0.009
0.008
相对粗糙 $\frac{\Delta}{d}$
0.05
0.09
0.03
0.02
0.015
0.01
0.006
0.005
0.004
0.002
0.001
0.0008
0.0006
0.0004
0.0002
0.0001
0.00005
0.00001
0.000005
0.000001
雷诺数Re
10^3
$2(10^3)$
3 4 5 6 7 8
10^4
$2(10^4)$
3 4 5 6 7 8
10^5
$2(10^5)$
3 4 5 6 7 8
10^6
$2(10^6)$
3 4 5 7 8
10^7
$2(10^7)$
3 4 5 6 7 8
10^8

图 7-18 莫迪图

1 ）布拉修斯（Blasius）公式

1912年德国水力学家布拉修斯在总结光滑区实验资料的基础上，提出下式

$$\lambda = \frac{0.3164}{Re^{0.25}} \qquad (7\text{-}46)$$

布拉修斯光滑区公式形式简单，计算方便，在$Re<10^5$范围内与实验结果相符，得到了广泛应用。

2 ）希弗林松公式

$$\lambda = 0.11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0.25} \qquad (7\text{-}47)$$

希弗林松粗糙区公式，由于形式简单，计算方便，为工程界经常采用。

3 ）谢才（Chezy）公式和谢才系数

将达西公式（7-1）式形式上加以变换

$$v^2 = \frac{2g}{\lambda} d \frac{h_f}{l}$$

以$d=4R$，$J=h_f/l$代入上式整理，得

$$v = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \cdot \sqrt{RJ} = C\sqrt{RJ} \qquad (7\text{-}48)$$

上式最初是1755年法国工程师谢才根据明渠均匀流动的实测资料提出的，是流体力学最古老的公式之一，通常称为**谢才公式**。

式中，v为断面平均流速；R为断面水力半径，它是过流断面面积A与湿周χ之比，即$R=A/\chi$；J为水力坡度；C为谢才系数

$$C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad (m^{0.5}/s) \qquad (7\text{-}49)$$

（7-48）式给出了谢才系数C和沿程阻力系数λ的关系，该式表明C和λ一样是反映沿程阻力情况的系数。C的数值通常都是直接由经验公式计算，其中一个应用较广的经验公式是曼宁（Manning）提出的称为**曼宁公式**

$$C = \frac{1}{n} R^{1/6} \qquad (7\text{-}50)$$

式中，n为综合反映壁面对水流阻滞作用的系数，称**粗糙系数**，见表7-2；R为水力半径，以米计。

常用管道的粗糙系数　　表 7-2

管道类别	n	管道类别	n
陶土管	0.013	浆砌砖渠道	0.015
混凝土管和钢筋混凝土管	0.013～0.014	浆砌块石渠道	0.017
石棉水泥管	0.012	干砌块石渠道	0.02～0.025
铸铁管	0.013	土明渠(包括带草皮)	0.025～0.03
钢管	0.012	木槽	0.012～0.014
水泥砂浆抹面渠道	0.013～0.014		

曼宁公式由于形式简单，粗糙系数可依据长期积累的丰富资料确定。在$n<0.02$, $R>0.5m$内，进行输水管道和较小河渠计算，结果与实测资料良好相符，为世界各国工程界

采用。

1925年苏联水力学家巴甫洛夫斯基（Павловский）根据灌溉渠道的实测资料，提出计算谢才系数C的公式，称巴甫洛夫斯基公式

$$C=\frac{1}{n}R^{y} \tag{7-51}$$

式中，y为与n及R有关的指数，由下式计算

$$y=2.5\sqrt{n}-0.13-0.75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0.1)$$

巴甫洛夫斯基公式适用范围比（7-49）式稍广，适用于$0.011<n<0.04$，$0.1\text{m}\leqslant R\leqslant 5\text{m}$。

还须指出，就谢才公式本身而言，适用于有压或无压均匀流动的各阻力区，但是，直接计算谢才系数C的经验公式（7-50）、（7-51）式只与n、R有关，与Re无关，用这样计算的C值，谢才公式就仅适用于紊流粗糙区。

【例 7-3】 水管长30m，直径$d=75\text{mm}$，新铸铁管，流量$Q=7.25\text{L/s}$，水温$t=10℃$，试求该管段的沿程水头损失h_f。

【解】 计算Re、Δ/d：

$$A=\frac{\pi d^2}{4}=44.1\text{cm}^2$$

$$v=\frac{Q}{A}=164.3\text{cm/s}$$

查表2-6，$t=10℃$水的$\nu=1.31\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$

$$\text{Re}=\frac{vd}{\nu}=94100$$

查表7-1，取$\Delta=0.25\text{mm}$

$$\frac{\Delta}{d}=\frac{0.25}{75}=0.003$$

由莫迪图（图7-17）查得$\lambda=0.023$

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=1.54\text{m}$$

【例 7-4】 修建长300m的钢筋混凝土输水管，直径$d=250\text{mm}$，通过流量$Q=200\text{m}^3/\text{h}$，试求沿程水头损失h_f。

【解】 本题用谢才公式计算

1）选粗糙系数，查表7-2，选取$n=0.0135$，计算C值

$$R=\frac{d}{4}=0.0625\text{m}$$

$$C=\frac{1}{n}R^{1/6}=46.6\text{m}^{0.5}/\text{s}$$

2）计算h_f

$$Q=\frac{200}{3600}=0.0556\text{m}^3/\text{s}$$

$$A=\frac{\pi d^2}{4}=0.0491\text{m}^2$$

$$v = \frac{Q}{A} = 1.3\text{m/s}$$

$$h_f = l\frac{v^2}{C^2R} = 2.83\text{m}$$

§ 7-7 非圆管的沿程损失

前面研究了圆管沿程损失的计算。除圆管之外，工程上还应用非圆管，如通风系统中的风管，许多是矩形管道。怎样把已有圆管的研究成果用于非圆管沿程损失的计算呢？这就需要在阻力相当的条件下，把非圆管折算成圆管的几何特征量来实现。

一、水力半径

分析管道几何特性对沿程损失的影响因素，主要有过流断面面积A和流体与固体壁面接触的周界即湿周X两个几何量。对于流速相同、过流断面面积相同、断面形状不同因而湿周不同的管道，因紊流运动断面上流速的变化主要在边界附近，流动阻力主要集中在边界附近，所以湿周大者水头损失大；过流断面面积大，通过流体数量多，单位重量流体的能量损失小。为综合反应A、X对水头损失的影响，定义过流断面面积与湿周之比为**水力半径**。

$$R = \frac{A}{X} \tag{7-52}$$

水力半径是一个可以近似反映断面特性对流动阻力影响的几何参数，当其他条件（v、l）相同，如非圆管和圆管的水力半径相等，两者的沿程损失近似相等。

圆管的水力半径为

$$R = \frac{A}{X} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = \frac{d}{4}$$

边长为 a 和 b 的矩形断面水力半径为

$$R = \frac{A}{X} = \frac{ab}{2(a+b)}$$

边长为 a 的正方形断面水力半径为

$$R = \frac{A}{X} = \frac{a^2}{4a} = \frac{a}{4}$$

二、当量直径

根据以上分析，把水力半径相等的圆管直径定义为非圆管的**当量直径**d_e，即

$$R = R_{圆} = \frac{d}{4}$$

$$d_e = d = 4R \tag{7-53}$$

当量直径为水力半径的 4 倍。

边长a、b的矩形管，其当量直径为

$$d_e = \frac{2ab}{a+b}$$

方形边长为a，其当量直径为$d_e = a$。

环形管（图7-19）的当量直径为

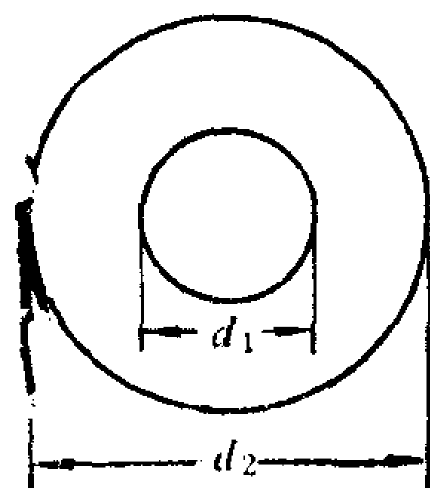


图 7-19 环形管

$$d_e = 4\frac{\frac{\pi d_2^2}{4} - \frac{\pi d_1^2}{4}}{\pi d_2 + \pi d_1} = d_2 - d_1$$

有了当量直径，只要用d_e代替d，便可用式（7-1）来计算非圆管道的沿程损失，即

$$h_f = \lambda \frac{l}{d_e} \frac{v^2}{2g}$$

还可以用当量相对粗糙Δ/d_e代入沿程阻力系数公式中计算λ值。同样可以用当量直径计算非圆管的雷诺数

$$\mathrm{Re} = \frac{v d_e}{\nu} = \frac{v(4R)}{\nu}$$

这个Re也可近似用于判别非圆管流的流态，其临界值仍为2000。

必须指出，应用当量直径计算非圆管的沿程损失是近似的方法。并不适用于所有情况，这表现在两方面：

（1）实验表明，形状同圆管差异很大的非圆管，如长缝形（$b/a>8$）、狭环形（$d_2<3d_1$）应用d_e计算存在较大误差；

（2）由于层流的流速分布不同于紊流，流动阻力不像紊流那样集中在管壁附近，这样单纯用湿周大小作为影响能量损失的主要外部条件是不充分的，因此在层流中应用当量直径计算，将会造成较大误差。

【例 7-5】 某钢板制风道，断面尺寸为400×200mm，长80m，风速$v=10\text{m/s}$，空气温度$t=20$℃，求压强损失p_f。

【解】 计算Re、Δ/d_e

$$d_e = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2\times0.4\times0.2}{0.4+0.2} = 0.267\text{m}$$

查表2-7，$t=20$℃时空气的粘度为$\nu=15.7\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$。

$$\mathrm{Re} = \frac{v d_e}{\nu} = 1.7\times10^5$$

查表7-1，取$\Delta=0.15\text{mm}$

$$\frac{\Delta}{d_e} = 5.62\times10^{-4}$$

由莫迪图（图7-18）查得$\lambda=0.0195$

$$p_f = \lambda\frac{l}{d}\frac{\rho v^2}{2} = 0.0195\times\frac{80}{0.267}\times\frac{1.2\times10^2}{2} = 350\text{N/m}^2$$

§7-8 局 部 损 失

在工业管道及明渠中，往往设有变径管、三通、闸或阀门、弯管（弯道）、格栅等部件，流体流经这些部件时均匀流受到破坏，流速的大小、方向或分布发生变化，由此集中产生的流动阻力是局部阻力，所引起的能量损失称为局部损失，造成局部损失的部件称为局部阻碍。工程中有许多管道系统如通风和采暖管道、水泵吸水管道等等，局部损失占有很大比重。因此，了解局部损失的分析方法和计算方法有着重要意义。

局部损失和沿程损失一样，不同流态遵循不同的规律。如流体以层流经过局部阻碍并

保持层流，则局部损失也是由各流层之间的粘滞性切应力引起的。只是由于边界面的变化，使流体发生急剧的变形，加强了各相邻流层之间的相对运动，从而加大了这一局部区段的水头损失。因这种情况很少遇到，所以这一节着重讨论紊流的局部损失。

一、局部损失的一般分析

（1）局部损失产生的原因

下面通过对典型局部阻碍（图7-20）处流动的分析，研究局部损失产生的原因。

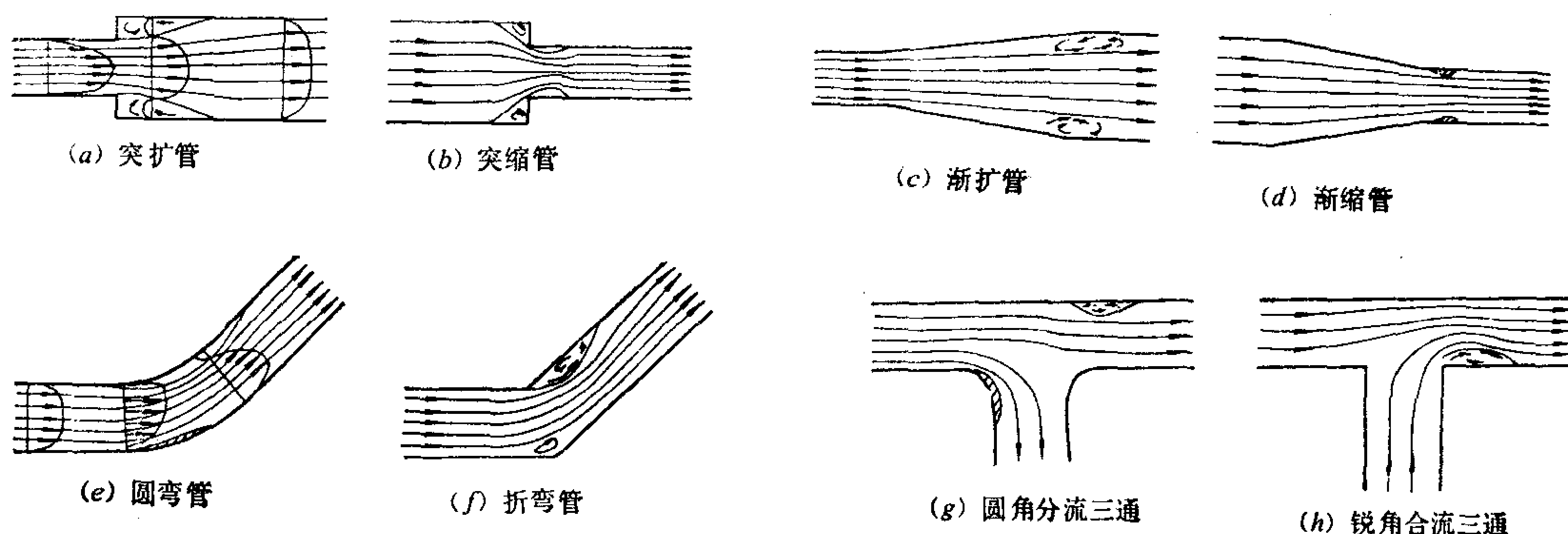


图 7-20　典型局部阻碍

紊流经过边界形状突然变化的局部阻碍，如突扩、突缩管，三通等（图7-20*a*、*b*、*g*、*h*），由于惯性作用，流体不能沿着边壁突然改变流向，致使主流与壁面脱离，其间形成旋涡区。边界形状无突然变化的局部阻碍，如渐扩、渐缩管，折管、圆弯管等（图7-20*c*、*d*、*e*、*f*），其中渐扩管，由于流速沿程减小，压强沿程增大，流体受反向压差作用。紧靠壁面以很低流速运动的质点，在反向压差作用下，速度不断减小到零。至此主流与边壁脱离并形成旋涡区。在弯管内，因受离心力作用，弯管前半段压强外侧沿程增大，内侧减小，而流速则是外侧沿程减小，内侧增大。这样弯管前半段靠近外侧壁面的流体质点，受反向压差作用，速度不断减小，直到主流与边壁脱离，形成旋涡区。同时在转角较大，曲率半径较小的弯管中，因惯性作用，后半段靠近内侧壁面主流与壁面脱离，形成旋涡区。在渐缩管内流体沿程增速减压，质点受与流动方向一致的正向压差作用，不会形成旋涡区。但是，紧接渐缩段之后，只要收缩角不是很小，因惯性作用，仍会出现主流与边壁脱离，形成较小的旋涡区。

分析、比较各局部阻碍处的流动情况和局部损失，发现紊流的局部损失在很大程度上取决于旋涡区的大小。也就是说，旋涡区的形成是造成局部损失的重要原因。这是因为旋涡区内流体旋涡运动耗能。旋涡不断被主流带走，并随即扩散，又会大大加强局部阻碍后面一定范围内主流的紊动强度，从而加大这个区段的水头损失。再有旋涡区的存在，还会增大附近过流断面上的流速梯度（图7-20*a*），增大水头损失。此外，由于流动边界的变化，引起流体质点的剧烈变形和速度分布的重新改组，也会造成一定的水头损失。

（2）局部阻力系数的影响因素

由前已知，局部水头损失的计算公式为

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g}$$

式中，v为断面平均流速；ζ为对应于该流速的局部阻力系数。采用该式就把局部水头损失的计算，转化为研究确定局部阻力系数ζ的问题。

局部阻力系数ζ一般地说也是由反映流动内部结构情况的雷诺数和局部阻碍的边界条件决定的。边界条件主要包括局部阻碍的几何形状和壁面粗糙情况，即

$$\zeta = f(\mathrm{Re},\ 局部阻碍的形状,\ \Delta/d)$$

在层流情况下，相对粗糙对ζ无影响。实验结果表明，当Re很小时，如流体流过局部阻碍后仍保持层流，则ζ与Re成反比，即

$$\zeta = \frac{A}{\mathrm{Re}}$$

式中A是随局部阻碍的形状不同而变的常数。

在紊流情况下，因局部阻碍的强烈扰动，大大加强了流体的紊动强度，局部阻力进入阻力平方区（ζ不随Re变化）的Re远比沿程阻力为小。实用上局部阻力系数一般都是按阻力平方区来考虑的，ζ与Re无关。至于相对粗糙，因局部阻碍范围很短，其影响甚小，一般忽略不计。可见局部阻碍的形状是ζ的决定性因素，即

$$\zeta = f(局部阻碍的形状)$$

因局部阻碍种类、形状繁多，局部阻力系数由实验确定。

二、几种典型的局部阻力系数

（1）突然扩大管

突然扩大管的局部阻力系数，可借助于基本方程求得。

图 7-21 突然扩大管

设突然扩大圆管流动（图7-21），为了找出局部损失与运动要素的关系，取流束将扩未扩的①断面和扩大后流速分布与紊流脉动已接近均匀流正常状态的②断面列能量方程。忽略两断面间的沿程损失，得

$$h_j = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) + \frac{\alpha_1 v_1^2 - \alpha_2 v_2^2}{2g}$$

式中各符号的意义如图所示。

为了确定压强与流速的关系，再对①、②断面及管壁所构成的控制体，沿流动方向列动量方程

$$\Sigma F = \rho Q(\alpha_{02} v_2 - \alpha_{01} v_1)$$

式中ΣF为作用在控制体上全部轴向外力之和，包括：

1）作用在控制体①断面上的总压力，要注意，该断面的面积不是A_1，而是A_2，其中的环形部分位于旋涡区，观察表明，这个环形面积上的压强基本上符合静压强分布规律，故

$$P_1 = p_1 A_2$$

2）作用在②断面上的总压力

$$P_2 = p_2 A_2$$

3）重力在管轴上的投影

$$G\cos\theta=\gamma A_2 l\frac{z_1-z_2}{l}=\gamma A_2(z_1-z_2)$$

4）边壁上的摩擦阻力忽略不计

于是

$$p_1A_2-p_2A_2+\gamma A_2(z_1-z_2)=\rho Q(\alpha_{02}v_2-\alpha_{01}v_1)$$

将$\rho=\gamma/g$，$Q=v_2A_2$代入上式，化简得

$$\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)=\frac{v_2}{g}(\alpha_{02}v_2-\alpha_{01}v_1)$$

将上式代入能量方程，取$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_{01}=\alpha_{02}$，整理得

$$h_j=\frac{(v_1-v_2)^2}{2g} \tag{7-54}$$

上式表明，突然扩大管的水头损失等于以平均流速差计算的流速水头。（7-54）式又称包达（Borda）公式，经实验验证有足够的准确性，可用于工程计算。

为把（7-54）式变换成计算局部水头损失的一般公式，只需将

$v_2=v_1\dfrac{A_1}{A_2}$或$v_1=v_2\dfrac{A_2}{A_1}$代入，则

$$\left.\begin{aligned}h_j&=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2\frac{v_1^2}{2g}=\zeta_1\frac{v_1^2}{2g}\\h_j&=\left(\frac{A_2}{A_1}-1\right)^2\frac{v_2^2}{2g}=\zeta_2\frac{v_2^2}{2g}\end{aligned}\right\} \tag{7-55}$$

所以突然扩大的阻力系数为

$$\zeta_1=\left(1-\frac{A_1}{A_2}\right)^2\text{或}\quad\zeta_2=\left(\frac{A_2}{A_1}-1\right)^2 \tag{7-56}$$

突然扩大前后有两个不同的平均流速，因而有两个阻力系数与之对应，计算时要注意使选用的阻力系数与流速水头相对应。

当液体由管道在淹没情况下流入断面很大的容器或是气体流入大气时，$\dfrac{A_1}{A}\approx0,\zeta_1=1$。这是突扩的特例，称为管道出口阻力系数。

（2）渐扩管

圆锥形渐扩管的形状可由扩大面积比$n=A_2/A_1=r_2^2/r_1^2$和扩散角α两个几何参数来确定(图7-22)。渐扩管的水头损失可认为由摩擦损失h_f和扩散损失h_{ex}两部分组成。其摩擦损失可按下式计算

$$h_f=\frac{\lambda}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\frac{v_1^2}{2g} \tag{7-57}$$

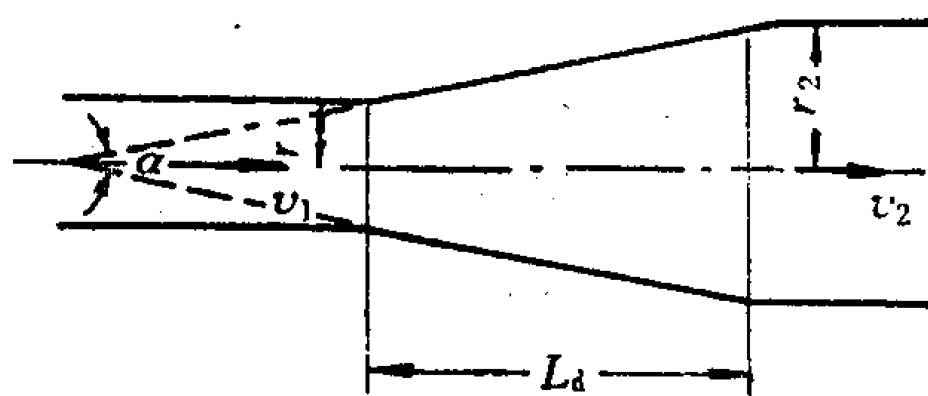


图 7-22 渐扩管

式中λ为扩大前管道的沿程阻力系数。

扩散损失是旋涡和流速分布改组所形成的损失，沿用突然扩大水头损失公式乘以与扩散角有关的系数K计算，当$\alpha\leqslant20°$时，$K=\sin\alpha$，故

$$h_{ex}=K\left(1-\frac{1}{n}\right)^2\frac{v_1^2}{2g} \tag{7-58}$$

由此得到渐扩管的局部阻力系数ζ_d为

$$\zeta_d=\frac{\lambda}{8\sin\frac{\alpha}{2}}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+K\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 \qquad (7\text{-}59)$$

当 n 一定时，渐扩管的摩擦损失随α增大而减小，扩散损失随之增大，因此总损失在某一α角时最小。这个水头损失最小的扩散角α约在5°～8°范围内。如α＞50°则和突扩管的局部阻力系数相近。

（3）突然缩小管

突然缩小管（图7-23）的水头损失主要发生在收缩断面c-c附近的旋涡区。突然缩小的阻力系数决定于收缩面积比A_2/A_1，其值可按下式计算，与收缩后断面的流速水头$\frac{v_2^2}{2g}$相对应。

$$\zeta=0.5\left(1-\frac{A_2}{A_1}\right) \qquad (7\text{-}60)$$

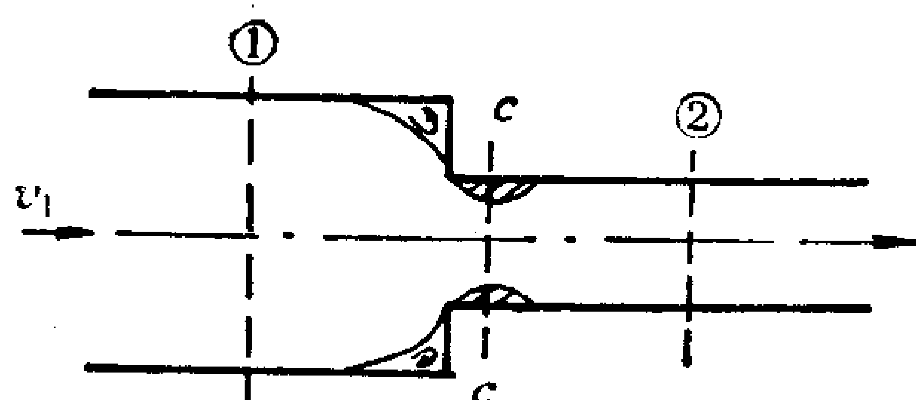


图 7-23　突然缩小管

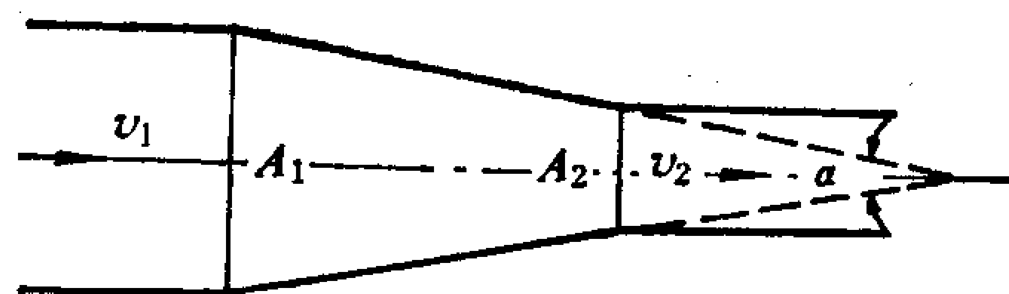


图 7-24　渐缩管

当流体由断面很大的容器流入管道时，$A_2/A_1\approx 0$，$\zeta=0.5$。这是突缩的特例，称为管道入口阻力系数。

（4）渐缩管

圆锥形渐缩管（图7-24）的形状由面积比A_2/A_1和收缩角α两个几何参数确定。阻力系数可由图7-25查得，与收缩后断面的流速水头$\frac{v_2^2}{2g}$相对应。

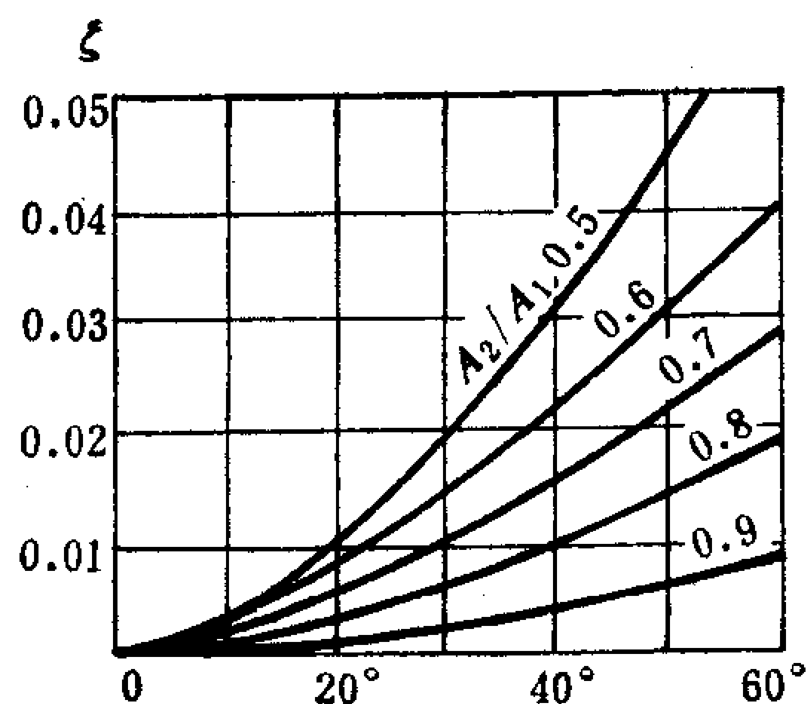


图 7-25　渐缩管ζ

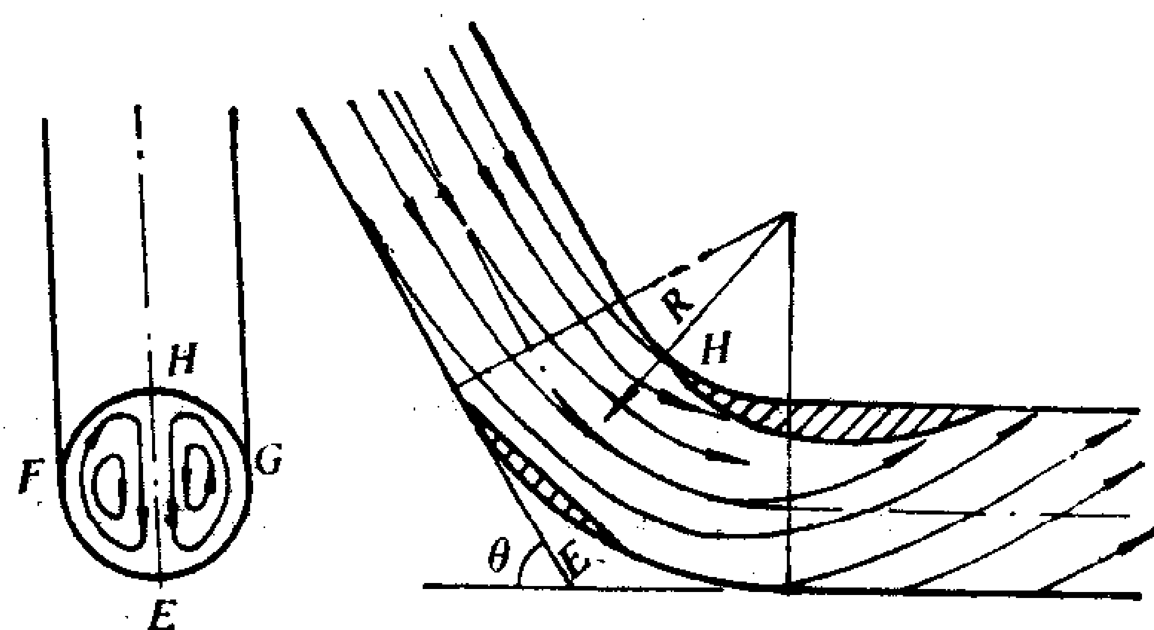


图 7-26　弯管二次流

（5）弯管

弯管是另一种典型的局部阻碍（图7-26），它只改变流动方向，不改变平均流速的大小。

流体流经弯管，不仅使弯管的内侧和外侧可能出现如前所述的两个旋涡区，而且还会产生如下的二次流现象。沿弯道运动的流体质点受离心惯性力作用，使弯管外侧（图7-26中E处）的压强增大，内侧（H处）的压强减小。而弯管左右两侧（F、G处）流速较小，

离心力也小，压强变化不大，于是沿图中EFH和EGH方向出现了自外向内的压强降低。使得弯管内产生了一对由管中心流向外侧，再沿管壁流向内侧的旋转流动，这就是二次流。二次流与主流迭加在一起，使流过弯管的流体质点作螺旋运动，从而加大了弯管的水头损失。

在弯管内形成的二次流，消失较慢，加大了弯管后面的影响长度，弯管的影响长度最大可超过50倍管径。

弯管的几何形状决定于转角θ和曲率半径与管径之比R/d（或R/b），对矩形断面的弯管还有高宽比h/b。不同几何形状的弯管局部阻力系数如表7-3。

弯管的局部阻力系数 表 7-3

断面形状	R/d或R/b	30°	45°	60°	90°
圆形	0.5	0.120	0.270	0.480	1.000
	1.0	0.058	0.100	0.150	0.246
	2.0	0.066	0.089	0.112	0.159
方形 $h/b=1.0$	0.5	0.120	0.270	0.480	1.060
	1.0	0.054	0.079	0.130	0.241
	2.0	0.051	0.078	0.102	0.142
矩形 $h/b=0.5$	0.5	0.120	0.270	0.480	1.000
	1.0	0.058	0.087	0.135	0.220
	2.0	0.062	0.088	0.112	0.155
矩形 $h/b=2.0$	0.5	0.120	0.280	0.480	1.080
	1.0	0.042	0.081	0.140	0.227
	2.0	0.042	0.063	0.083	0.113

（6）三通

三通是一种常见的管道配件，有多种形式，工程上常用的有两类：支流对称于总流轴线的“Y形”三通和在直管段上接出支管的“T形”三通（图7-27）。每个三通又都可以在分流或合流的情况下工作。

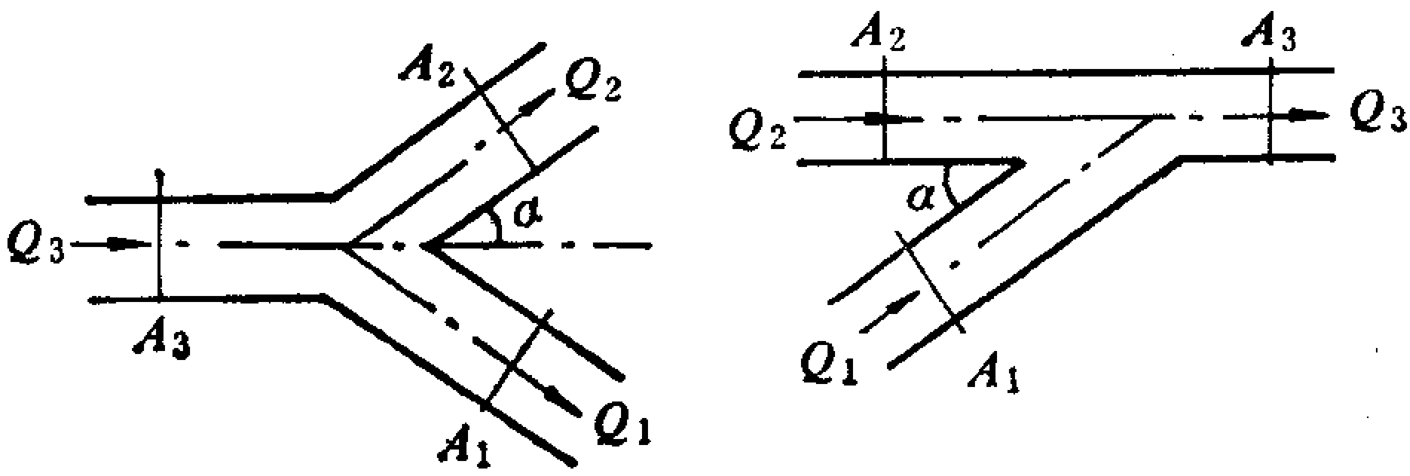


图 7-27 三通

三通的形状由总流与支流间的夹角α和面积比A_1/A_3、A_2/A_3等几何参数确定。三通的特征是它的流量前后有变化。因此，三通的阻力系数不仅决定于它的几何参数，还同流量比Q_1/Q_3或Q_2/Q_3有关。

各种三通的局部阻力系数可在有关专业手册中查得。这里仅给出$A_1=A_2=A_3$，$\alpha=45°$、$90°$的“T”形三通的ζ值（图7-28），与总管的流速水头$v_3^2/2g$对应。

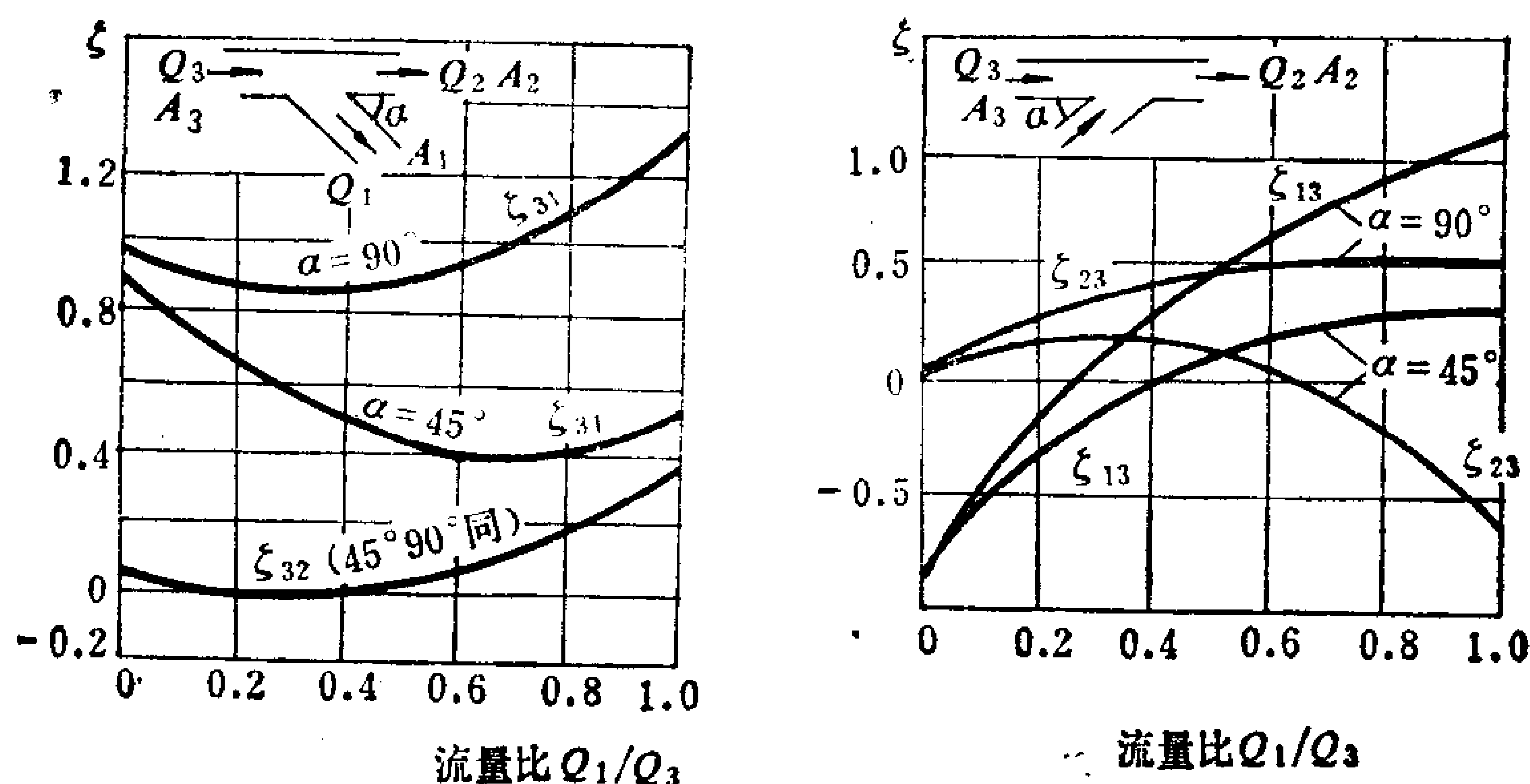


图 7-28 T形三通ζ

合流三通的局部阻力系数可出现负值，这意味着经过三通后流体的单位能量不仅未减少反而增加了。这是因为当两股流速不同的流体汇合后，在混合的过程中，伴有动量的交换，高速流股将一部分动能传递给低速流股，使低速流股的能量有所增加。如低速流股获得的这部分能量超过了流经三通所损失的能量，阻力系数就会出现负值。至于两股流动的总能量，则只可能减少，不可能增加，所以三通两个支管的阻力系数，绝不会同时出现负值。

三、局部阻力之间的相互干扰

以上给出的局部阻力系数ζ值，是在局部阻碍前后都有足够长的直管段的条件下，由实验得到的。测得的局部损失也不仅仅是局部阻碍范围内的损失，还包括它下游一段长度上因紊流脉动加剧而引起的附加损失。如果局部阻碍之间相距很近，流出前一个局部阻碍的流动，在流速分布和紊流脉动还未达到正常均匀流之前又流入后一个局部阻碍，这样连在一起的两个局部阻碍，其阻力系数不等于正常条件下两个局部阻碍的阻力系数之和。

近二十年来的实验研究表明，如局部阻碍直接连接，相互干扰的结果，局部损失可能出现大幅度的增大或减小，变化的幅度约为所有单个正常局部损失总和的0.5～3倍。实验发现，如各局部阻碍之间都有一段长度不小于三倍直径的连接管，干扰的结果将使总的局部损失小于按正常条件下算出的各局部损失的迭加。可见在上述条件下，如不考虑相互干扰的影响，计算结果一般是偏于安全的。

【例 7-6】 水从封闭容器Ⅰ沿直径$d=25$mm、总长$l=10$m的管道流入容器Ⅱ。容器Ⅰ水面的相对压强$p_1=1.3$at，两容器水面的高差$H=4$m，沿程阻力系数$\lambda=0.025$，阀门和弯头的阻力系数分别为$\zeta_v=4.0$，$\zeta_b=0.3$。

（1）求通过的流量Q

（2）绘制总水头线和测压管水头线

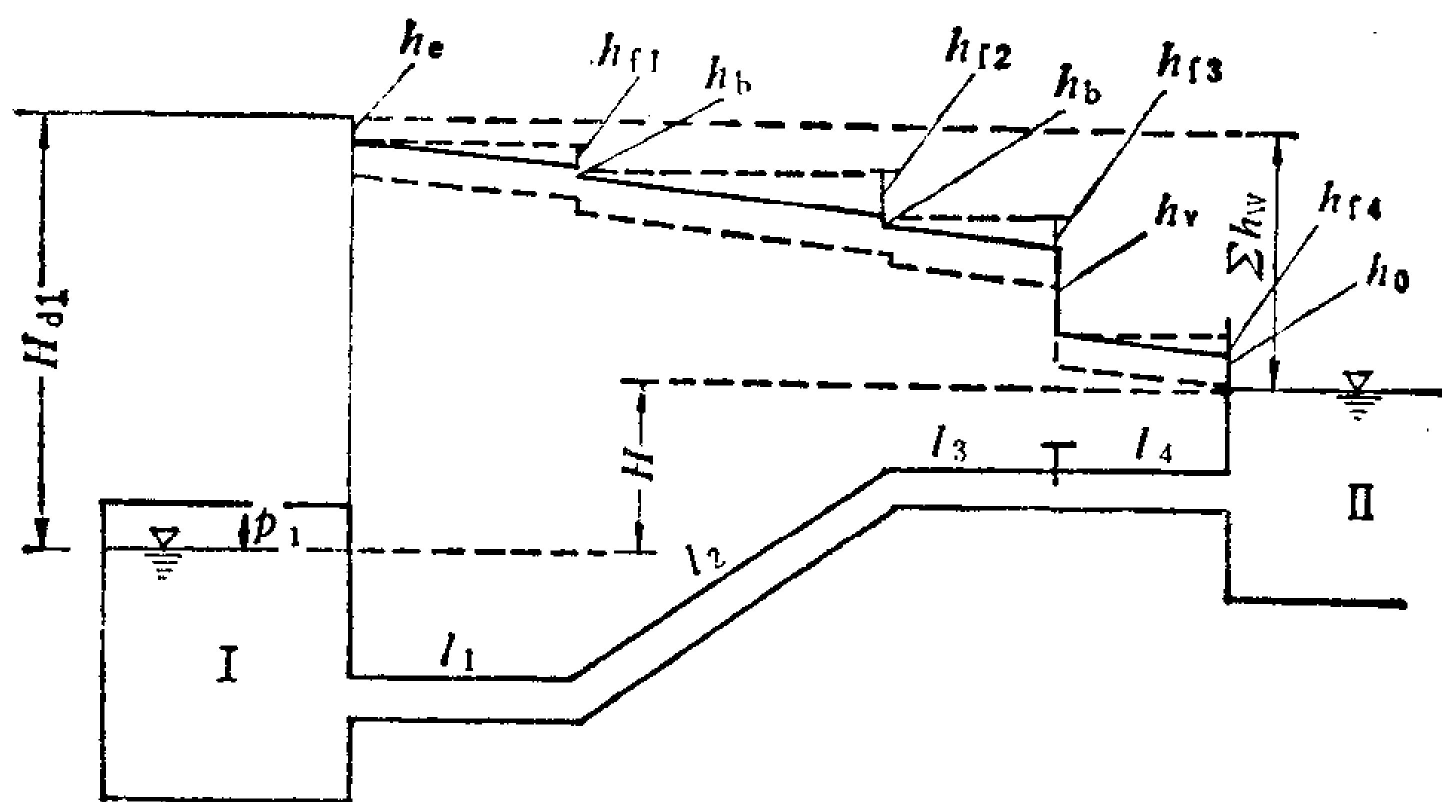
【解】（1）求Q

取容器Ⅰ、Ⅱ的水面为①、②断面，以容器Ⅰ的水面为基准面列能量方程

$$\frac{p_1}{\gamma}=H+\Sigma h_w=H+\left(\lambda\frac{l}{d}+\zeta_e+\zeta_v+2\zeta_b+\zeta_0\right)\frac{v^2}{2g}$$

ζ_e、ζ_0分别为管道进口和出口的阻力系数，其值为$\zeta_e=0.5$，$\zeta_0=1.0$

将已知数值代入，即得



例 7-6图

$$v = 3.31\text{m/s}$$

$$Q = \frac{\pi(0.025)^2}{4} \times 3.31 = 0.00162\text{m}^3/\text{s}$$

（2）绘制水头线　绘制水头线的步骤一般如下。

1）先绘总水头线，为此先要求出起始断面的总水头值，以便确定总水头线的起点。本题中$H_{d1} = \frac{p_1}{\gamma} = 13\text{m}$。如容器I内还有流速水头，总水头线的起点还要高出该水头值。

2）计算各项局部水头损失和各段的沿程水头损失。

3）从起始断面的总水头依次减去各项损失，得各断面的总水头，并连结成总水头线。局部损失一般用突降的“台阶”表示。

4）由总水头线向下减去各管段的流速水头，即得到测压管水头线。在等直径管段中，测压管水头线应与总水头线平行。

5）如为淹没出流，测压管水头线在出口断面应落在下游水面上；如为自由出流，测压管水头线应落在管道出口断面形心上。

依此步骤绘出的本题水头线见例7-6图。实线为总水头线，其下为测压管水头线。

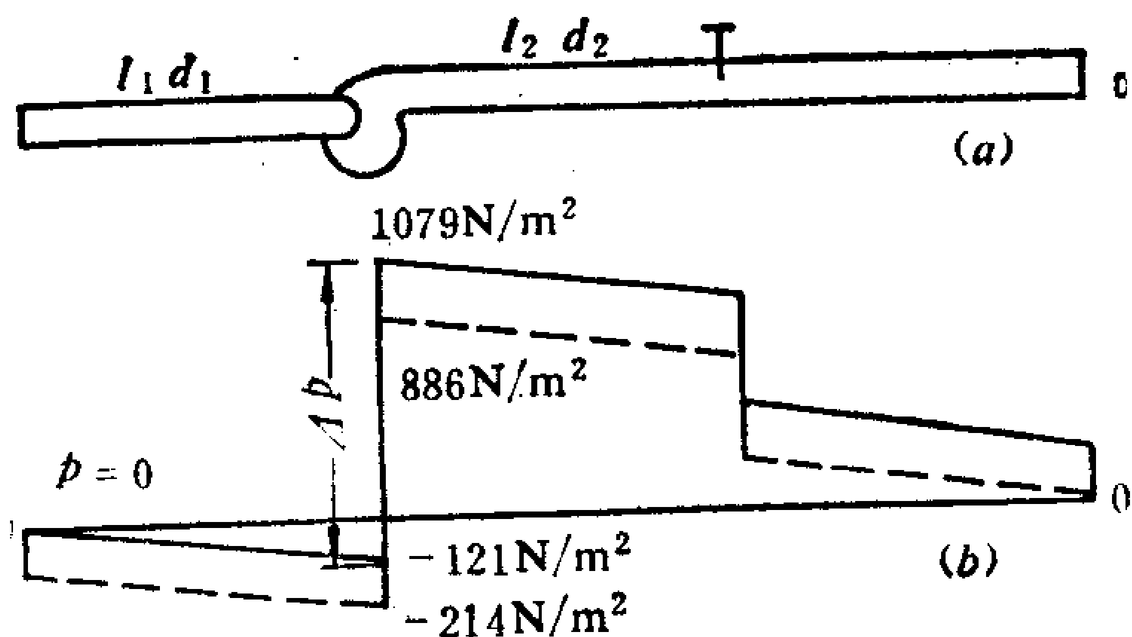
【例 7-7】 风机管道系统如图所示。吸入管直径$d_1 = 300\text{mm}$，管长$l_1 = 10\text{m}$，压出管直径$d_2 = 250\text{mm}$，管长$l_2 = 20\text{m}$，压出管中间有一阀门，其阻力系数$\zeta_v = 3.0$，沿程阻力系数皆为$\lambda = 0.024$，空气密度$\rho = 1.2\text{kg/m}^3$，气流通过风机其全压的增值$\Delta p = 1.2\text{kN/m}^2$

（1）求风量

（2）绘出系统的全压线和静压线

【解】（1）求Q

取进风口前不远但空气流速近似为零处和压出管出口断面列能量方程。由于$z_1 = z_2$，$p_1 = p_2 = 0$，则



例 7-7图

$$\Delta p = \frac{\rho v_2^2}{2} + \Sigma p_w$$

$$\Sigma p_w = \left(\lambda\frac{l_1}{d_1} + \zeta_e\right)\frac{\rho v_1^2}{2} + \left(\lambda\frac{l_2}{d_2} + \zeta_v\right)\frac{\rho v_2^2}{2}$$

ζ_e为进口局部阻力系数，$\zeta_e=0.5$

由总流的连续性方程

$$v_1=v_2\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2$$

代入上式

$$\Delta p=\left(\lambda\frac{l_1}{d_1}+\zeta_e\right)\left(\frac{d_2}{d_1}\right)^4\frac{\rho v_2^2}{2}+\left(1+\lambda\frac{l_2}{d_2}+\zeta_v\right)\frac{\rho v_2^2}{2}$$

将已知各值代入

$$1.2\times1000=6.23\times\frac{1.2\times v_2^2}{2}$$

$$v_2=17.92\text{m/s}$$

$$Q=\frac{\pi(0.25)^2}{4}\times17.92=0.88\text{m}^3/\text{s}$$

（2）绘全压线和静压线

绘制全压线和静压线的步骤与绘水头线类似。以水平线0-0为压强等于零的基准线。由于起始断面的压强、流速皆为零，故全压线的起点在基准线上。气流沿吸入管流动，沿程有压强损失，故吸入管呈现负压，至风机入口处负压最大。气流经风机后全压陡然升高1.2kN/m^2，然后沿途下降，至出口处静压为零，全压等于动压。本题的全压线和静压线见例7-7图（*b*），图中的数字为风机入口和出口处的全压和静压值。

习　　题

7-1　水流经变断面管道，已知细管直径d_1，粗管直径$d_2=2d_1$，试问哪个断面的雷诺数大？两断面雷诺数的比值Re_1/Re_2是多少？

7-2　水管直径$d=10\text{cm}$，管中流速$v=1.0\text{m/s}$，水温为10°C，试判别流态。又流速v等于多少时，流态将发生变化？

7-3　通风管道直径为250mm，输送的空气温度为20°C，试求保持层流的最大流量。若输送空气的质量流量为200kg/h，其流态是层流还是紊流？

7-4　有一矩形断面的小排水沟，水深15cm，底宽20cm，流速0.15m/s，水温10°C，试判别流态。

7-5　散热器由8×12mm的矩形断面水管组成，水的运动粘滞系数为$0.0048\text{cm}^2/\text{s}$，要确保每根水管中的流态为紊流（取$\text{Re}\geqslant4000$）以利散热，试问水管中的流量应为多少？

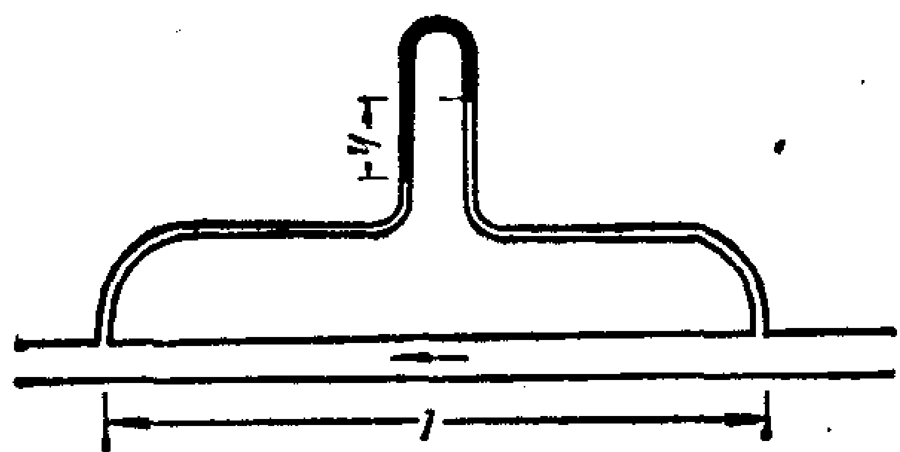
7-6　输油管的直径$d=150\text{mm}$，流量$Q=16.3\text{m}^3/\text{h}$，油的运动粘滞系数$\nu=0.2\text{cm}^2/\text{s}$，试求每公里管长的沿程水头损失。

7-7　应用细管式粘度计测定油的粘度，已知细管直径$d=6\text{mm}$，测量段长$l=2\text{m}$（题7-7图），实测油的流量$Q=77\text{cm}^3/\text{s}$，水银压差计读值$h=30\text{cm}$，油的重度$\gamma=8.83\text{kN/m}^3$，试求油的运动粘滞系数ν和动力粘滞系数μ。

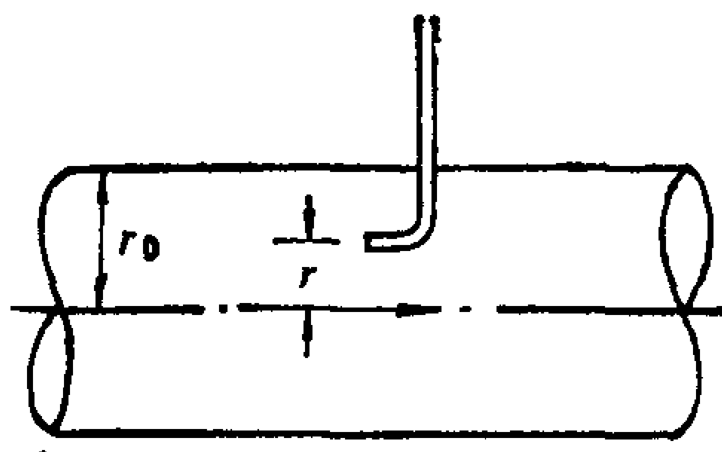
7-8　为了率定圆管内径，在管内通过ν为$0.013\text{cm}^2/\text{s}$的水，实测流量为$35\text{cm}^3/\text{s}$，长15m管段上的水头损失为2cm水柱，试求此圆管的内径。

7-9　要求用毕托管一次测出半径为r_0的圆管层流的断面平均流速，试求毕托管测口应放置的位置（题7-9图）。

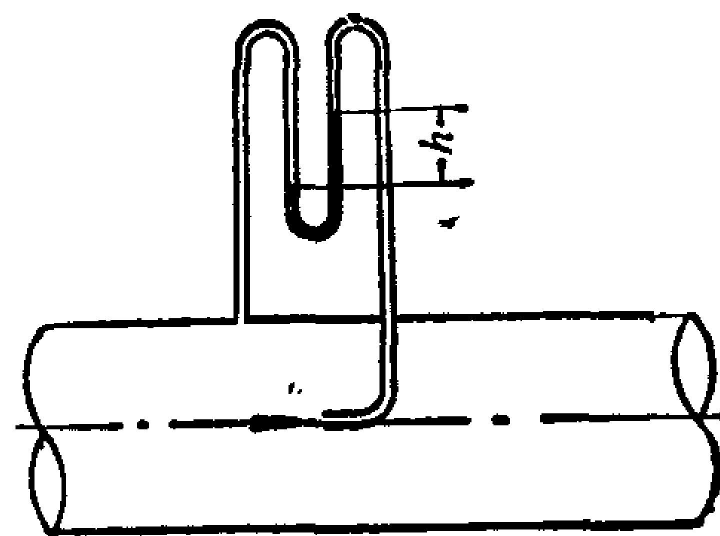
7-10　油管直径为75mm，已知油的重度为8.83kN/m^3，运动粘滞系数为$0.9\text{cm}^2/\text{s}$，在管轴位置安放连接水银压差计的毕托管，水银面高差$h_p=20\text{mm}$，水银重度为133.38kN/m^3（题7-10图），试



题 7-7图



题 7-9图



题 7-10图

求油的流量。

7-11　铁皮风管直径$d=400$mm，风量$Q=1.2\text{m}^3/\text{s}$，空气温度为20°C，试求沿程阻力系数，并指出所在阻力区。

7-12　管道直径$d=50$mm，当量粗糙高度$\Delta=0.25$mm，水温为20°C，试问在多大流量范围内属于过渡区流动？

7-13　钢板制风道，断面尺寸为300×500mm，长度为30m，风量为$2.1\text{m}^3/\text{s}$，温度为20°C，试分别按阿里特苏里公式和莫迪图计算压强损失。

7-14　自来水管长600m，直径300mm，铸铁管，通过流量$60\text{m}^3/\text{h}$，试用莫迪图计算沿程水头损失。

7-15　钢筋混凝土输水管直径为300mm，长度为500m，沿程水头损失为$1\text{mH}_2\text{O}$，试用谢才公式求管道中流速。

7-16　矩形风道的断面尺寸为1200×600mm，空气流量为$42000\text{m}^3/\text{h}$，空气重度为10.89N/m^3，测得相距12m的两断面间的压强差为31.6N/m^2，试求风道的沿程阻力系数。

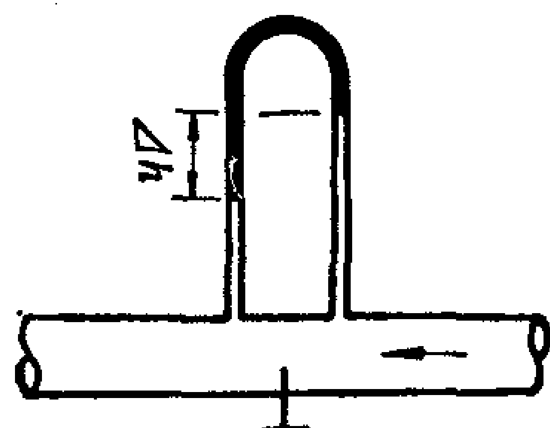
7-17　铸铁输水管长$l=1000$m，直径$d=300$mm，管材的当量糙粒高度$\Delta=1.2$mm，水温10°C，通过流量$Q=100$L/s，试求沿程水头损失。

7-18　圆管和正方形管道的断面面积、长度、相对粗糙都相等，且通过的流量相等，试求两种形状管道沿程损失之比：（1）管流为层流；（2）管流为紊流粗糙区。

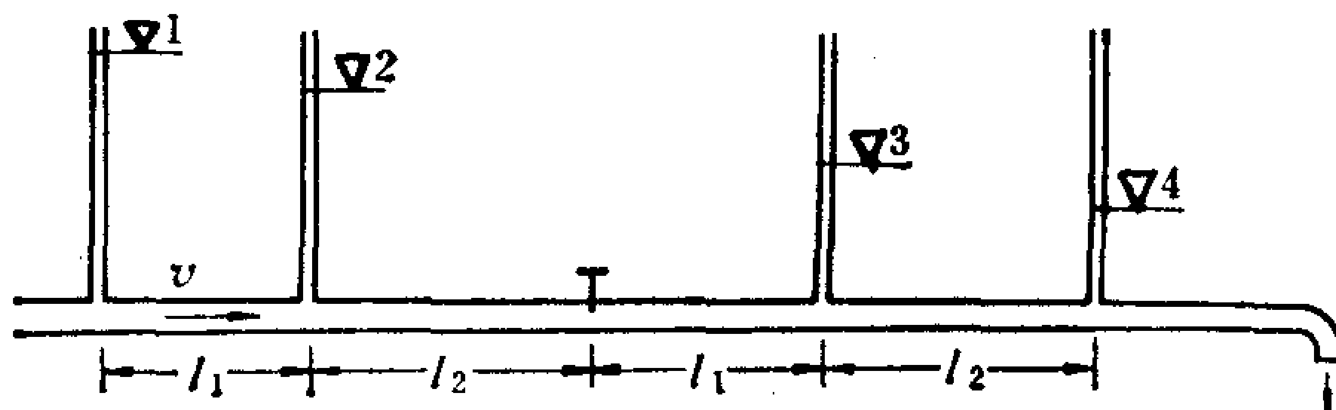
7-19　圆管和正方形管道的断面面积、长度、沿程阻力系数都相等，且管道两端的压强差相等，试求两种形状管道的流量之比。

7-20　输水管道中设有阀门，已知管道直径为50mm，通过流量为3.34l/s，水银压差计读值$\Delta h=150$mmHg，沿程水头损失不计（题7-20图），试求阀门的局部阻力系数。

7-21　测定阀门的局部阻力系数，为消除管道沿程阻力的影响，在阀门上、下游共装设四根测压管，其间距分别为l_1、l_2，管道直径$d=50$mm，测得测压管水面标高$\nabla 1=165$cm，$\nabla 2=160$cm，$\nabla 3=100$cm，$\nabla 4=92$cm，管中流速$v=1.2$m/s（题7-21图），试求阀门的局部阻力系数。



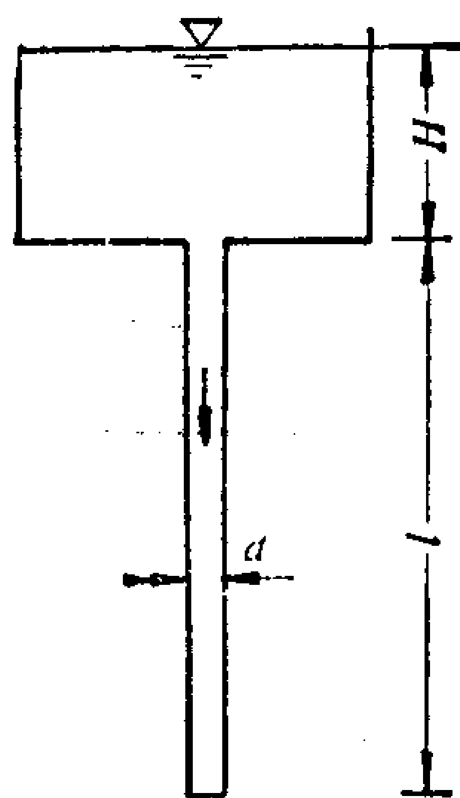
题 7-20图



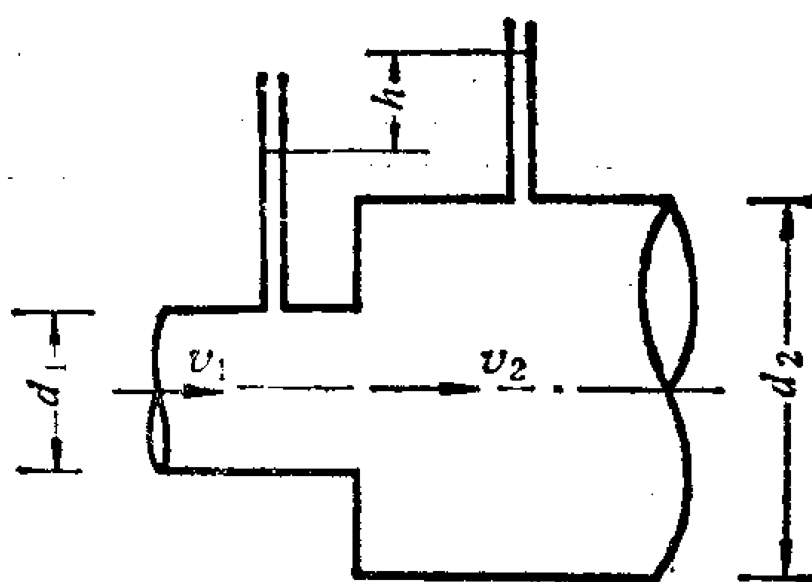
题 7-21图

7-22　水箱中的水通过等直径的垂直管道向大气流出。如水箱的水深H，管道直径d，管道长l（题7-22图），沿程阻力系数λ，局部阻力系数ζ，试问在什么条件下，流量随管长的增加而减小？

7-23　用突然扩大使管道的平均流速由v_1减到v_2，若直径d_1及流速v_1一定（题7-23图），试求使测压管液面差h成为最大值的v_2及d_2是多少？并求最大h值。



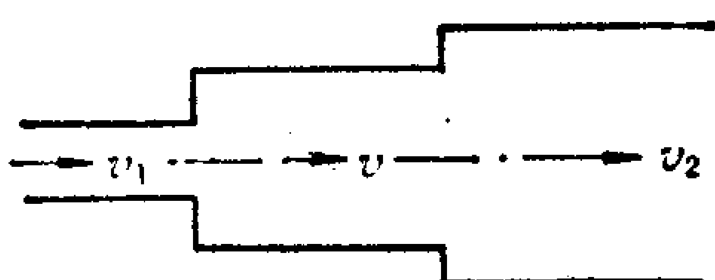
题 7-22图



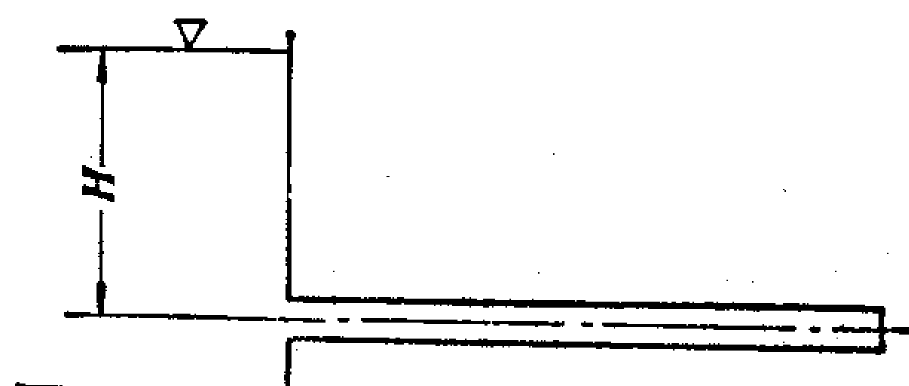
题 7-23图

7-24　流速由v_1变为v_2的突然扩大管（题7-24图），如分为两次扩大，中间流速v取何值时，局部水头损失最小，此时水头损失为多少?并与一次扩大相比较。

7-25　水箱中的水经管道出流，已知管道直径为25mm，长度为6m，水位$H=13$m，沿程阻力系数$\lambda=0.02$（题7-25图），试求流量及管壁切应力τ_0。



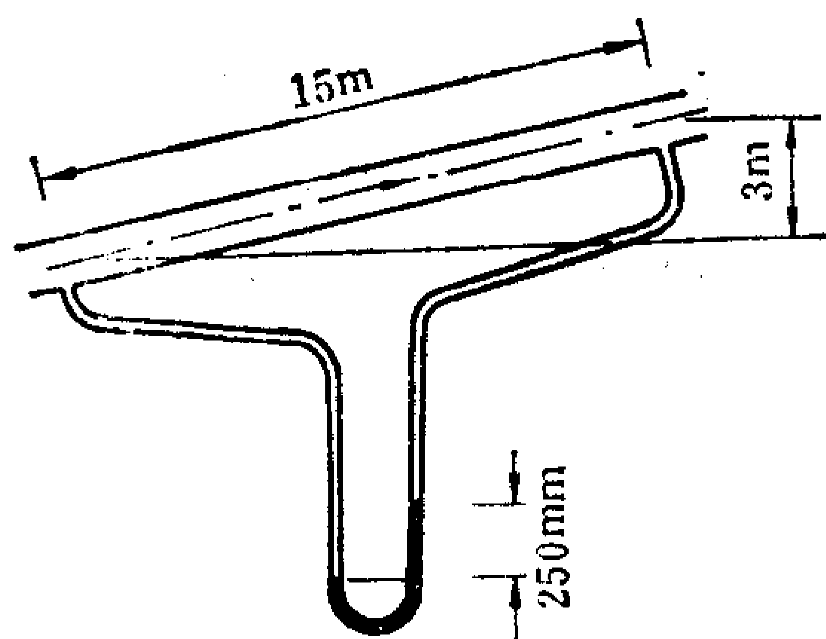
题 7-24图



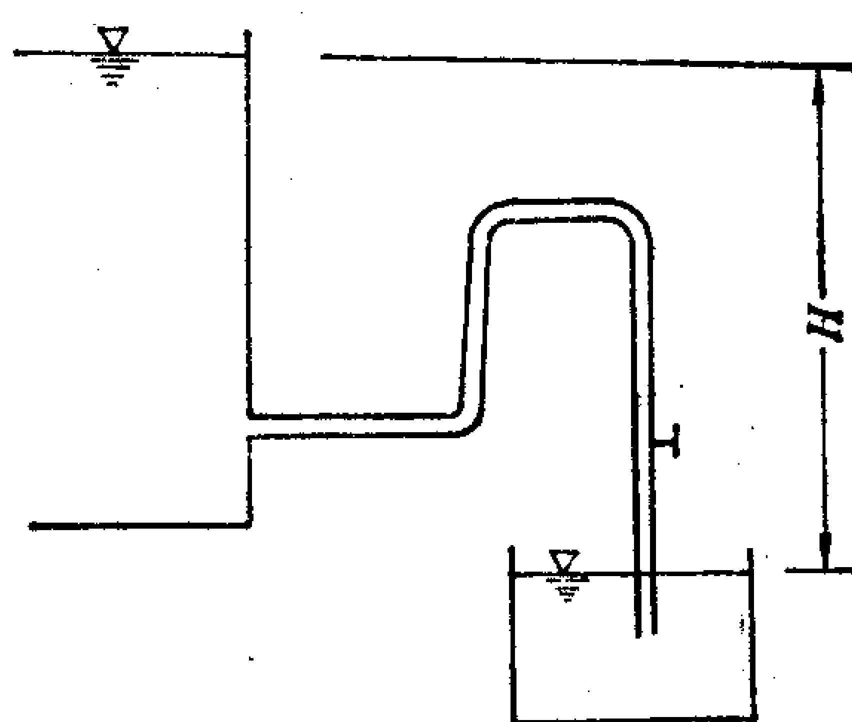
题 7-25图

7-26　水管直径为50mm，1、2两断面相距15m，高差3m，通过流量$Q=6$l/s，水银压差计读值为250mm（题7-26图），试求管道的沿程阻力系数。

7-27　两水池水位恒定，已知管道直径$d=10$cm，管长$l=20$m，沿程阻力系数$\lambda=0.042$，局部阻力系数$\zeta_{弯}=0.8$，$\zeta_{阀}=0.26$，通过流量$Q=65$L/s（题7-27图），试求水池水面高差H。



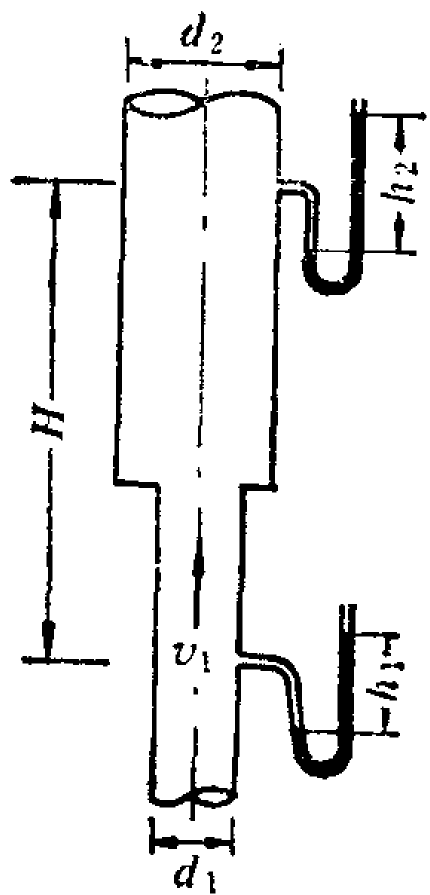
题 7-26图



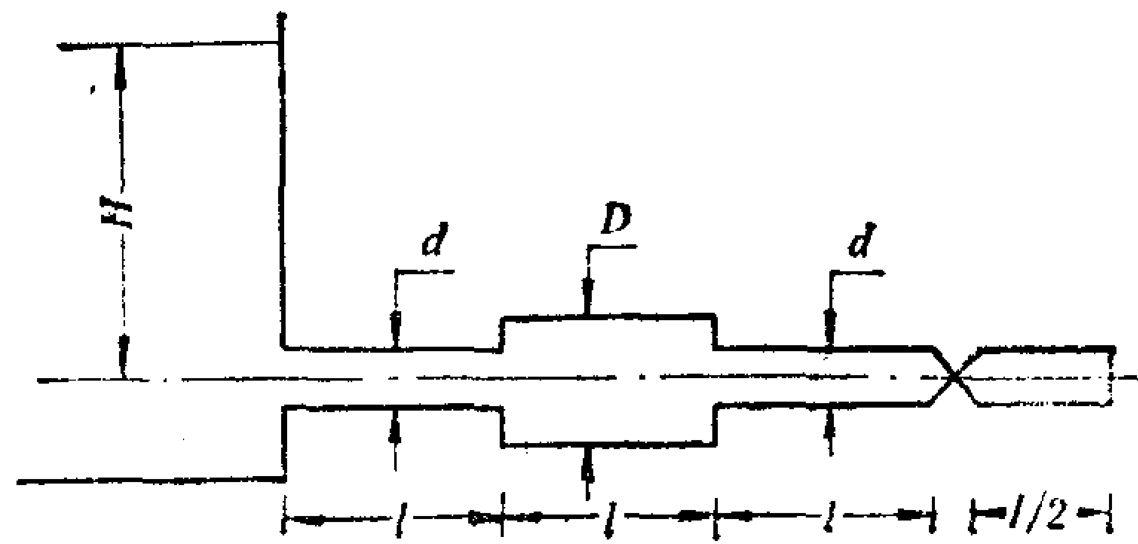
题 7-27图

7-28　气体突然扩大管道，已知管内气体密度$\rho=0.8\text{kg/m}^3$，外部空气密度$\rho_a=1.2\text{kg/m}^3$，直径$d_1=50$mm，$d_2=100$mm，流速$v_1=20$m/s，1断面压力计读值$h_1=100\text{mmH}_2\text{O}$，$H=10$m（题7-28图），沿程阻力不计，试求突扩管的局部压强损失及2断面压力计读值h_2。

7-29　自水池中引出一根具有三段不同直径的水管，已知直径$d=50$mm，$D=200$mm，长度$l=100$m，水位$H=12$m（题7-29图），沿程阻力系数$\lambda=0.03$，局部阻力系数$\zeta_{阀}=5.0$，试求通过水管的



题 7-28图

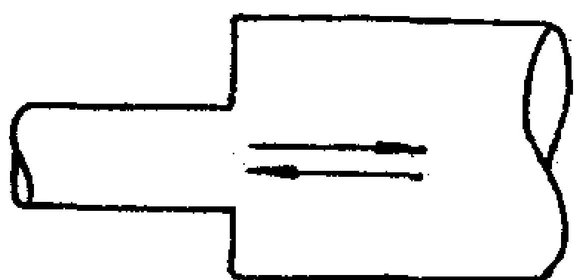


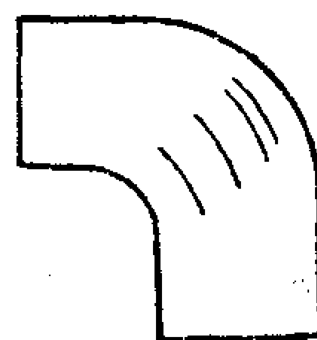
题 7-29图

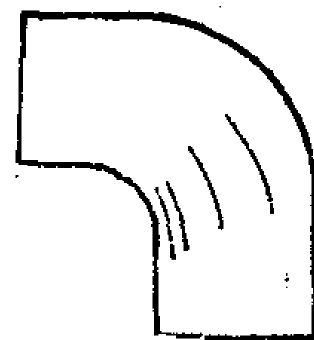
流量，并绘总水头线及测压管水头线。

7-30　变直径管道（题7-30图），有同种流体，以相同的流量自左向右或自右向左流动，试问两种情况的局部水头损失是否相等，为什么？

7-31　弯管内装导流叶片，可降低弯管的局部阻力系数（题7-31图），试问能降低局部阻力系数的原因，并指出a、b两种情况哪一种正确。


题 7-30图


(a)


(b)

题 7-31图

7-32　有一根给定的输水管道，怎样实测它的沿程阻力系数。

第八章　不可压缩流体的管道流动

前面阐述了不可压缩流体恒定总流运动的基本规律，这一章将运用这些基本规律分析不可压缩流体管道流动的问题。管道流动是工程最常见的流动方式，在建筑热能、市政、环境、石油化工等领域中，水、气、油的输送，基本上都是由管道流动来完成的，可见研究流体的管道流动有很大的实用意义。

管道流动的水力计算，实际上是总流连续性方程、能量方程，以及水头损失规律的具体运用。对于管道流动来说，一般沿流程的长度较大，水头损失包括沿程损失和局部损失，工程上为了简化计算，按两类水头损失在全部损失中所占比重不同，将管道分为短管和长管。所谓短管是指水头损失中，沿程损失和局部损失均占相当比重，都不可忽略的管道，如送风管、虹吸管、水泵吸水管等都是短管。长管是指管流的水头损失以沿程损失为主，局部损失和流速水头的总和与沿程损失相比很小，可取沿程损失的某一百分数估算，或者忽略不计而不影响工程所要求的精度，却使水力计算大为简化的管道。如城市室外给水管道就属于长管。

此外，按管线的布置情况，管道可分为简单管道和复杂管道，前者是沿程直径不变，流量不变的管道，后者指由两根以上管段组合成的管道系统，包括串联、并联管道，以及管网。

土建工程中常见的管流大都可按恒定流动考虑，本章除有压管道中的水击一节外，所述均为恒定紊流。

§ 8-1　简　单　管　道

一、短管的水力计算

（1）短管水力计算的基本公式

简单短管的水力计算一般都可直接列能量方程和水头损失计算式解决。像第七章的[例7-6]和[例7-7]就是短管问题。但对于复杂的短管，直接用能量方程和水头损失计算式求解很不方便。为此需建立一个形式简单的短管水力计算基本公式，为分析计算复杂的管道系统提供方便。

有压管流水力计算的主要问题是过流能力的计算，而过流能力是由作用水头和阻力条件决定的，建立起直接表示过流能力、作用水头和阻力三者关系的公式就是管道水力计算的基本公式。下面推导短管水力计算的基本公式。

自由出流简单管道（图8-1），长度为l、直径为d，以0-0为基准面，列①、②断面能量方程

$$H=\frac{\alpha v^2}{2g}+\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}+\Sigma\zeta\frac{v^2}{2g}$$

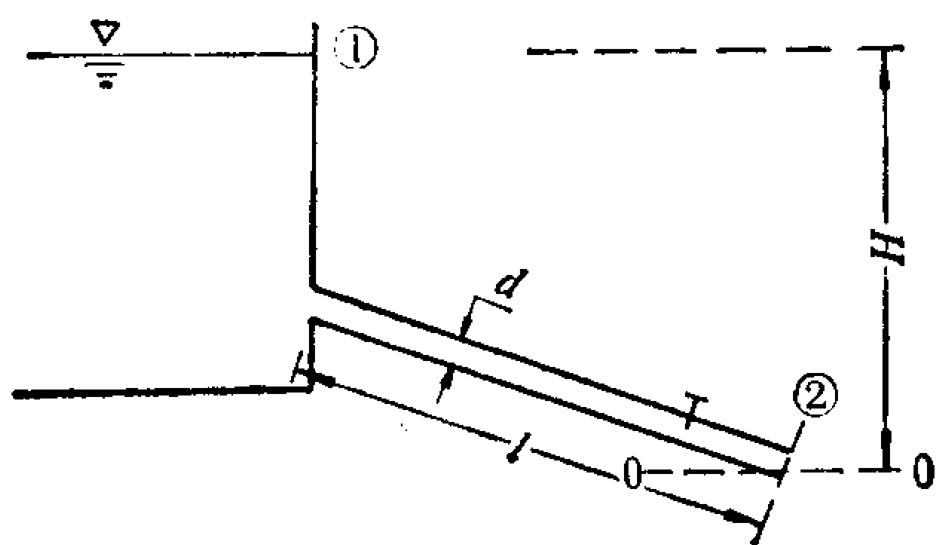


图 8-1 自由出流管道

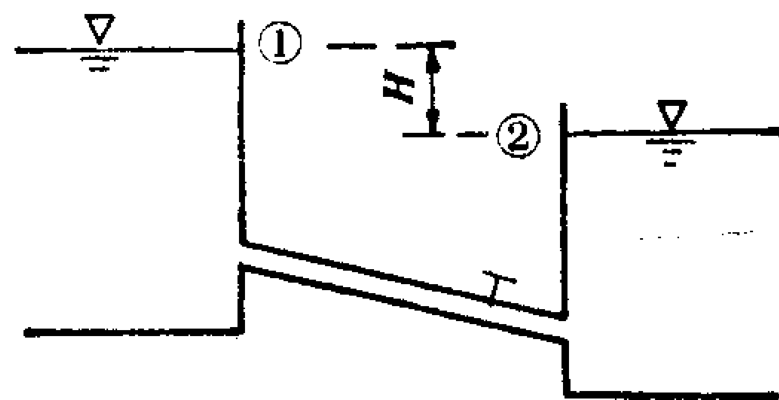


图 8-2 淹没出流管道

其中动能修正系数α与局部阻力系数ζ为同数量级，归并入$\Sigma\zeta$中，则上式

$$H=\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\frac{v^2}{2g}$$

以$v^2=(4Q/\pi d^2)^2$代入上式，整理得

$$H=\frac{8\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)}{\pi^2 d^4 g}Q^2$$

令
$$S_H=\frac{8\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)}{\pi^2 d^4 g}\quad \mathrm{s^2/m^5} \tag{8-1}$$

于是
$$H=S_H Q^2 \tag{8-2}$$

式中，S_H为综合反映管道流动阻力情况的系数称管道阻抗。

淹没出流的情况（图8-2），（8-2）式仍适用，此时作用水头H为上、下游液面差，管道阻抗S_H中$\Sigma\zeta$内不包括动能修正系数α，但比自由出流情况增加出口阻力系数ζ_0，两者数值相同，即$\alpha=\zeta_0=1$。

风机带动的气体管道（图8-3），列①、②断面气流能量方程，得



图 8-3 气体管道

$$p=\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\frac{\rho v^2}{2}$$

以$v^2=(4Q/\pi d^2)^2$代入上式，整理得

$$p=\frac{8\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\rho}{\pi^2 d^4}Q^2$$

令
$$S_p=\frac{8\left(\lambda\frac{l}{d}+\Sigma\zeta\right)\rho}{\pi^2 d^4}\quad \mathrm{kg/m^7} \tag{8-3}$$

于是
$$p=S_p Q^2 \tag{8-4}$$

式中，p为风机的全压强；S_p为气体管道阻抗。

由（8-1）、（8-3）式可知，一定的流体通过一定的管道（长度l、直径d、管壁粗糙Δ、局部构件的配置均已确定），如流动处于阻力平方区，则阻力系数λ和$\Sigma\zeta$均为定值，

从而阻抗S_H或S_p就是一定值。

（2）虹吸管的水力计算

某些简单管道除过流能力外，还有些特殊问题需要考虑，虹吸管就是其中常见的一种。

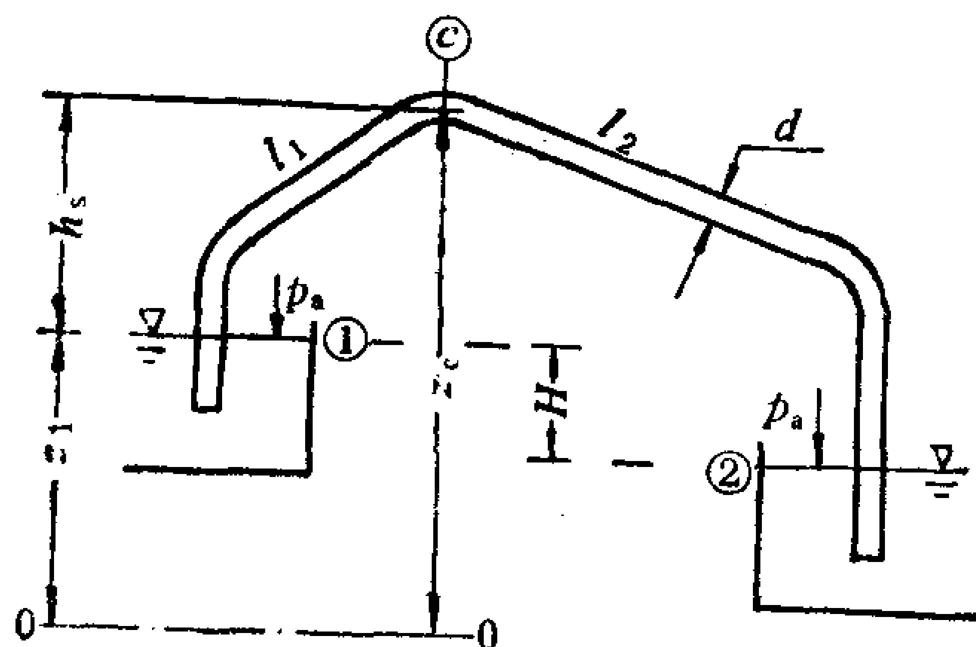


图 8-4 虹吸管

管道轴线的一部分高于上游无压的自由液面，这样的管道称为虹吸管（图8-4）。虹吸管输水，可以跨越较高地形，避免埋设管道工程，以及便于自动操作，而被广泛应用。

因为虹吸管的一部分高出上游无压自由液面，管道中存在真空区段，将造成溶解在水中的空气分离出来，随着真空度的增大，分离出来的空气量增加，并在虹吸管顶部集结，挤缩过流断面，阻碍水流运动，甚至造成断流。为保证虹吸管正常工作，工程上一般限制管中最大真空度不超过允许值$[h_v]=7\sim8.5\text{mH}_2\text{O}$。管道中有真空区段，是虹吸管的水力特点，其最大真空度不超过允许值，则是虹吸管正常过流的条件。

过流能力计算：以上、下游液面①、②为计算断面，列能量方程

$$H=\left(\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_e+3\zeta_b+\zeta_0\right)\frac{v^2}{2g}$$

流速
$$v=\frac{1}{\sqrt{\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\Sigma\zeta}}\sqrt{2gH} \qquad (8\text{-}5)$$

式中λ为沿程阻力系数，ζ_e、ζ_b、ζ_0分别为管道进口、转弯（设各转弯的阻力系数相同）、出口的局部阻力系数。

流量
$$Q=vA$$

最大真空度计算：以上游液面①和最大真空断面©列能量方程

$$z_1+\frac{p_a}{\gamma}=z_c+\frac{p_c}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}+\left(\lambda\frac{l_1}{d}+\zeta_e+2\zeta_b\right)\frac{v^2}{2g}$$

$$\frac{p_a-p_c}{\gamma}=(z_c-z_1)+\left(\lambda\frac{l_1}{d}+\zeta_e+2\zeta_b+1\right)\frac{v^2}{2g}$$

将（8-5）式代入，得

$$\frac{p_a-p_c}{\gamma}=(z_c-z_1)+\frac{\lambda\frac{l_1}{d}+\zeta_e+2\zeta_b+1}{\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_e+3\zeta_b+\zeta_0}\cdot H<[h_v] \qquad (8\text{-}6)$$

（8-6）式表明，虹吸管的最大超高（z_c-z_1）和作用水头H，都受允许真空度$[h_v]$的制约。在虹吸管上设计安装阀门时，为了不加大真空度，应将阀门安装在c断面的下游。

【例 8-1】 虹吸管（图8-4）上、下水池水位差H为2m，管长l_1为15m，l_2为20m，直径d为200mm，进口阻力系数ζ_e为1，转弯阻力系数ζ_b均为0.2，沿程阻力系数λ为0.025，最大允许真空度$[h_v]$为$7\text{mH}_2\text{O}$。试求通过流量及最大超高。

【解】 1）求流量

$$Q=\frac{\frac{1}{4}\pi d^2}{\sqrt{\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_e+3\zeta_b+\zeta_0}}\sqrt{2gH}$$

$$=\frac{0.0314}{\sqrt{4.38+1+0.6+1}}\cdot\sqrt{39.2}=0.0745\text{m}^3/\text{s}$$

上式等号右侧除$\sqrt{H}$以外，余项实际上就是虹吸管的管道阻抗S_H平方根的倒数，所以通过虹吸管的流量也可用（8-1）和（8-2）式计算。

2）求最大超高

$$z_c-z_1=\frac{p_a-p_c}{\gamma}-\frac{\lambda\frac{l_1}{d}+\zeta_e+2\zeta_b+1}{\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_e+3\zeta_b+\zeta_0}\cdot H$$

当

$$\frac{p_a-p_c}{\gamma}=[h_v]\text{时，}\quad z_c-z_1=h_s$$

$$h_s=7-\frac{4.275}{6.98}\times 2=5.78\text{m}$$

二、长管的水力计算

（1）长管水力计算的基本公式

前面推导了短管水力计算的基本公式，如在阻抗S_H、S_p中略去局部阻力项$\Sigma\zeta$，便得到长管水力计算的基本公式

$$H=h_f=S_HQ^2 \tag{8-7}$$

$$S_H=\frac{8\lambda l}{\pi^2d^5g}\quad \text{s}^2/\text{m}^5 \tag{8-8}$$

或

$$p=p_f=S_pQ^2 \tag{8-9}$$

$$S_p=\frac{8\lambda l\rho}{\pi^2d^5}\quad \text{kg/m}^7 \tag{8-10}$$

（2）比摩阻公式

长管经常应用比摩阻进行水力计算。因长管的作用水头全部消耗于沿程损失

$$H=h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}$$

令

$$J=\frac{h_f}{l}=\lambda\frac{1}{d}\frac{v^2}{2g} \tag{8-11}$$

于是

$$H=h_f=Jl \tag{8-12}$$

同理，对气体管道（图8-3）可导出

$$P_m=\frac{p_f}{l}=\lambda\frac{1}{d}\frac{\rho v^2}{2} \tag{8-13}$$

$$p=p_f=P_ml \tag{8-14}$$

式中J、P_m分别为单位长度的水头损失和压强损失，称为比摩阻。工程上按有关规范选取阻力系数λ的计算式，代入比摩阻公式（8-11）、（8-13）式运算，编制成各种直径的管道通过不同流量时的比摩阻计算表（见附录B）。长管的水力计算用比摩阻计算表，使计算工作大为简化。

§ 8-2 复 杂 管 道

一、串联管道

由直径不同的管段首尾相接联成的管道称为串联管道。串联管道通常用于沿程向几处输水或送气，经过一段距离便有流量分出，随着沿程流量减少，要求管径相应减小的情况。

设串联管道各管段的长度分别为l_1、l_2、l_3、直径为d_1、d_2、d_3，通过流量为Q_1、Q_2、Q_3，节点分出流量为q_1、q_2（图8-5）。

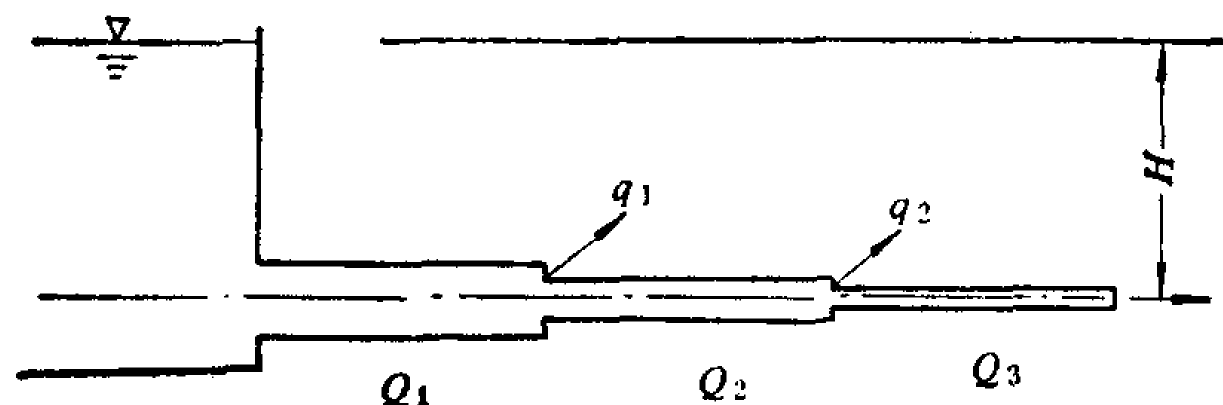


图 8-5 串联管道

串联管道中，两管段的联接点称为节点。根据质量守恒原理，不可压缩流体流向节点的流量等于流出节点的流量，即满足节点流量平衡

$$Q_1 = q_1 + Q_2,\quad Q_2 = q_2 + Q_3$$

一般形式

$$Q_i = q_i + Q_{i+1}$$

又每一管段均为简单管道，水头损失仍按简单管道计算

$$h_{wi} = S_i Q_i^2$$

串联管道总水头损失等于各管段水头损失的总和

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_{wi} = \sum_{i=1}^{n} S_i Q_i^2 \tag{8-15}$$

同理，由风机带动的串联管道，风机的压强

$$p = \sum_{i=1}^{n} p_{wi} = \sum_{i=1}^{n} S_{pi} Q_i^2 \tag{8-16}$$

如节点无流量分出，通过各管段的流量相等，即

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$$

（8-15）式化简为

$$H = Q^2 \sum_{i=1}^{n} S_i$$

令

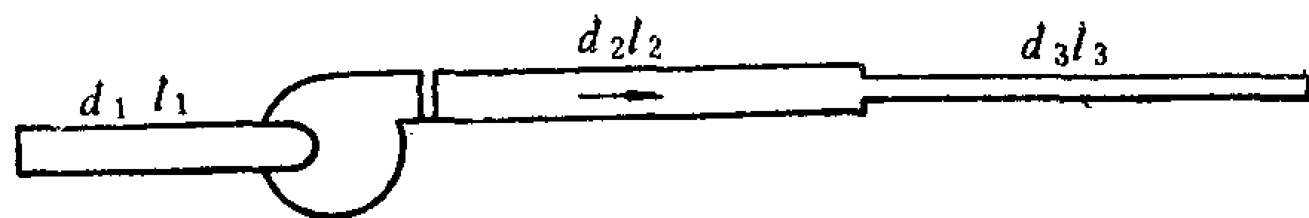
$$S_s = \sum_{i=1}^{n} S_i$$

得

$$H = S_s Q^2 \tag{8-17}$$

（8-17）式与简单管道的基本公式形式相同，其阻抗等于串联各管段的阻抗之和。

【例 8-2】 通风机管道的风管为薄钢板制成，其中吸入管直径$d_1 = 200$mm，长度$l_1 = 10$m，压出管由不同直径的两段管道串联组成，$d_2 = 200$mm，$l_2 = 50$m；$d_3 = 100$m，$l_3 = 50$m，空气温度$t = 20$°C，空气密度$\rho = 1.2$kg/m³，风量$Q = 0.15$m³/s，不计局部阻力。试问风机的压强是多少？



例 8-2 图

【解】

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi d_1^2}{4} = 0.0314\text{m}^2$$

$$v_1 = v_2 = \frac{Q}{A_1} = 4.78\text{m/s}$$

$$\text{Re}_1 = \text{Re}_2 = \frac{v_1 d_1}{\nu} = 6089.72$$

查表7-1，选当量糙粒高度$\Delta = 0.15\text{mm}$，相对粗糙$\frac{\Delta}{d_1} = 0.00075$，由莫迪图查得$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.023$

以相同的方法计算Re_3和Δ/d_3，由莫迪图查得$\lambda_3 = 0.0238$

串联总阻抗 $$S_{sp} = S_{p1} + S_{p2} + S_{p3}$$

按流速水头项归并入局部阻力，依题意不计局部阻力，故计算阻抗S_{p3}可不计入$\alpha = 1$，

$$S_{sp} = \frac{8\lambda_1 l_1 \rho}{\pi^2 d_1^5} + \frac{8\lambda_2 l_2 \rho}{\pi^2 d_2^5} + \frac{8\lambda_3 l_3 \rho}{\pi^2 d_3^5}$$

$$= 699.826 + 3499.128 + 115866.77 = 120065.72\text{kg/m}^7$$

$$p = S_{sp} Q^2 = 120065.72 \times (0.15)^2 = 2701.48\text{N/m}^2$$

本题用比摩阻计算更为简便。由比摩阻计算表（附录C 1）查出

$$P_{m1} = P_{m2} = 1.59\text{N/m}^3 \quad \text{（内插值）}$$

$$P_{m3} = 54.045\text{N/m}^3$$

$$P = P_{m1} l_1 + P_{m2} l_2 + P_{m3} l_3 = 2797.65\text{N/m}^2$$

二、并联管道

在两节点之间并接两条以上管段的管道称为并联管道，图8-6节点A、B间就是并接三条管段的并联管道。并联管道常用于要求提高输送流体可靠性的情况。

分析并联各管段水头损失的关系，因为各管段的起点A和终点B是共同的，A、B两断面间的总水头差只有一个，所以单位重量流体由A点经AB间任一管段至B点，水头损失均等于A、B两断面间的总水头差，即并联各管段的水头损失相等

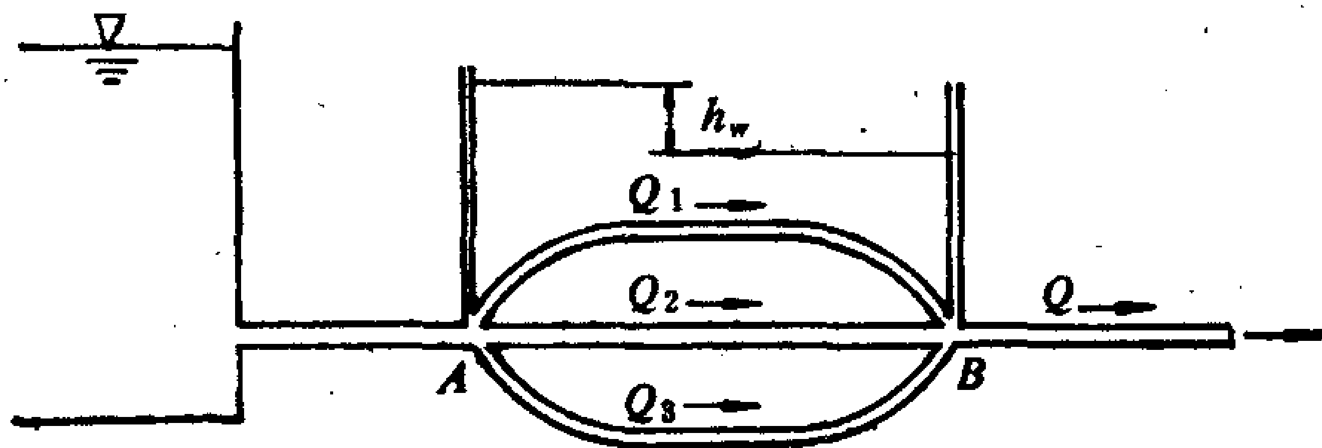


图 8-6 并联管道

$$h_{w1} = h_{w2} = h_{w3} = h_{wAB}$$

或
$$S_1 Q_1^2 = S_2 Q_2^2 = S_3 Q_3^2 = h_{wAB} \quad (8\text{-}18)$$

并联各管段的流量

$$Q_1=\sqrt{\frac{h_{wAB}}{S_1}},\quad Q_2=\sqrt{\frac{h_{wAB}}{S_2}},\quad Q_3=\sqrt{\frac{h_{wAB}}{S_3}} \tag{8-19}$$

并联管段满足节点流量平衡

节点A　　　　$Q=Q_1+Q_2+Q_3$

节点B　　　　$Q_1+Q_2+Q_3=Q$

将（8-19）式代入，得

$$Q=\sqrt{\frac{h_{wAB}}{S_1}}+\sqrt{\frac{h_{wAB}}{S_2}}+\sqrt{\frac{h_{wAB}}{S_3}}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}}\right)\sqrt{h_{wAB}}$$

令

$$\frac{1}{\sqrt{S_p}}=\frac{1}{\sqrt{S_1}}+\frac{1}{\sqrt{S_2}}+\frac{1}{\sqrt{S_3}} \tag{2-20}$$

将（8-20）式代入上式，得

$$h_{wAB}=S_pQ^2 \tag{8-21}$$

（8-21）式与简单管道的基本公式形式相同，其阻抗S_p的平方根倒数等于并联各管段的阻抗S_i的平方根倒数之和，S_p称为并联管段总阻抗。

将（8-21）式代入（8-19）式，得到并联各管段的流量分配

$$Q_1=Q\sqrt{\frac{S_p}{S_1}},\quad Q_2=Q\sqrt{\frac{S_p}{S_2}},\quad Q_3=Q\sqrt{\frac{S_p}{S_3}}$$

$$Q_1:Q_2:Q_3=\frac{1}{\sqrt{S_1}}:\frac{1}{\sqrt{S_2}}:\frac{1}{\sqrt{S_3}}$$

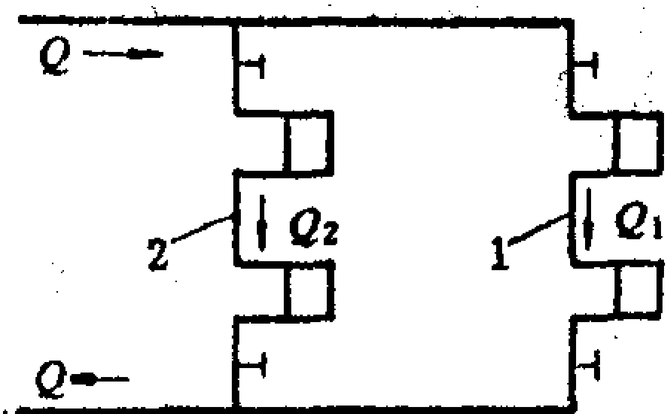
上式表明，并联各管段的流量分配与各管段阻抗的平方根成反比。

【例 8-3】 两层供暖立管，管段1的直径为20mm，总长度为20m，管段2的直径为20mm，总长度为10m，管道的沿程阻力系数$\lambda=0.025$，局部阻力系数$\Sigma\zeta_1=\Sigma\zeta_2=15$，干管中的流量$Q=1\text{L/s}$，热水的密度$\rho=980\text{kg/m}^3$，试求立管的流量$Q_1$和$Q_2$

【解】 管段1、2为节点A、B之间的并联管段，由

$$S_1Q_1^2=S_2Q_2^2$$

$$\frac{Q_1}{Q_2}\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$$



例 8-3图

其中　$S_1=\left(\lambda\frac{l_1}{d_1}+\Sigma\zeta_1\right)\frac{8\rho}{\pi^2d^4}=1.988\times10^{11}\text{s}^2/\text{m}^5$

同理　　$S_2=1.367\times10^{11}\ \text{s}^2/\text{m}^5$

得　　$\frac{Q_1}{Q_2}=0.828$

$$Q=Q_1+Q_2=1.828Q_2$$

$$Q_2=\frac{Q}{1.828}=0.55\text{L/s}$$

$$Q_1=0.828Q_2=0.45\text{L/s}$$

由计算可见，阻抗$S_1>S_2$，流量$Q_1<Q_2$，如要求$Q_1=Q_2$，则要进行阻力平衡，调整管径d及局部阻力$\Sigma\zeta$，达到$S_1=S_2$。

三、沿程均匀泄流管道

以上所述串联和并联管道，其中的每一根管段之间，通过的流量是固定的，称为转输流量或贯通流量。在市政、供热通风、灌溉等工程中，还会遇到除通过管段的转输流量之外，还有沿管段不断泄出流量、称为途泄流量或沿线流量的流动，最简单的情况是单位长度上泄出的流量相等，即沿程均匀泄流管道。

设沿程均匀泄流管段长度为 l，半径为 d（图8-7），通过转输流量Q_z，总途泄流量Q_t，现推导基本公式。

根据质量守恒原理，某断面的流量Q_x，等于管段的转输流量与该断面以后的总途泄流量之和

$$Q_x = Q_z + Q_t - \frac{Q_t}{l}x \tag{8-22}$$

沿程均匀泄流管段流量沿程变化，整个管段不能按简单管道计算。如在距泄流开始断面为 x 的断面M处，取长度为dx的微小管段，可认为通过此微段的流量Q_x不变，其水头损失近似按简单管管道计算

$$dh_w = S_H Q_x^2$$

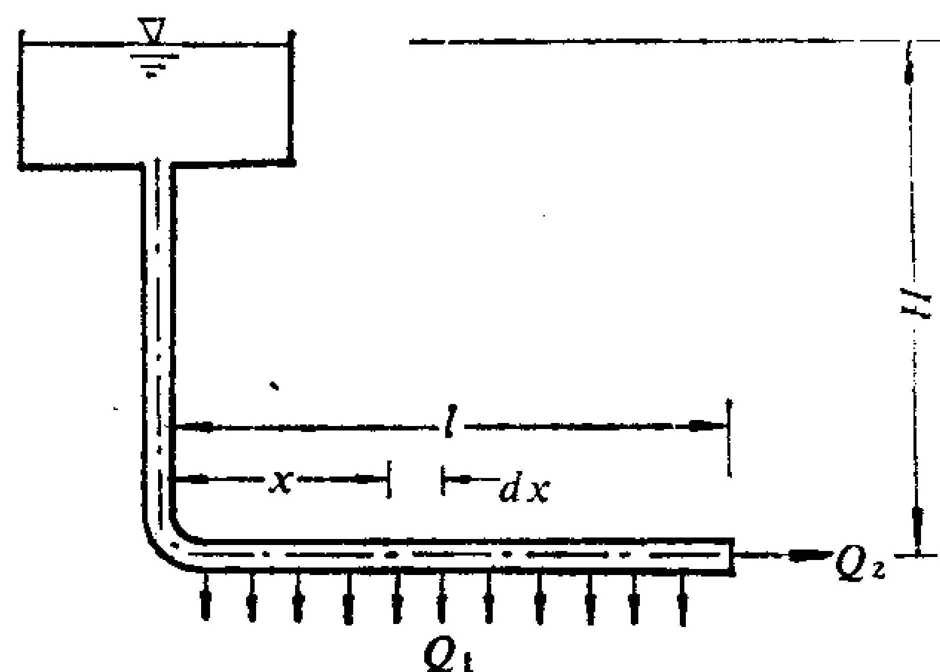


图 8-7　沿程均匀泄流管道

当不计局部阻力时，管道阻抗S_H按（8-8）式

$$S_H = \frac{8\lambda}{\pi^2 d^5 g} l$$

令

$$A = \frac{8\lambda}{\pi^2 d^5 g} \tag{8-23}$$

则

$$S_H = Al$$

式中A称为比阻抗或比阻。对于微小管段$l = dx$，

水头损失

$$dh_w = AQ_x^2 dx$$

将（8-22）式代入上式，积分

$$h_w = \int_0^l dh_w = \int_0^l A\left(Q_z + Q_t - \frac{Q_t}{l}x \right)^2 dx$$

管段直径和粗糙情况一定，且流动处于阻力平方区，比阻抗A是常数，上式积分得

$$h_w = Al\left(Q_z^2 + Q_z Q_t + \frac{1}{3} Q_t^2 \right) \tag{8-24}$$

由于

$$Q_z^2 + Q_z Q_t + \frac{1}{3} Q_t^2 \approx (Q_z + 0.55Q_t)^2$$

（8-24）式可写为

$$h_w = Al(Q_z + 0.55Q_t)^2$$

令

$$Q_c = Q_z + 0.55Q_t \tag{8-25}$$

得

$$h_w = S_H Q_c^2 \tag{8-26}$$

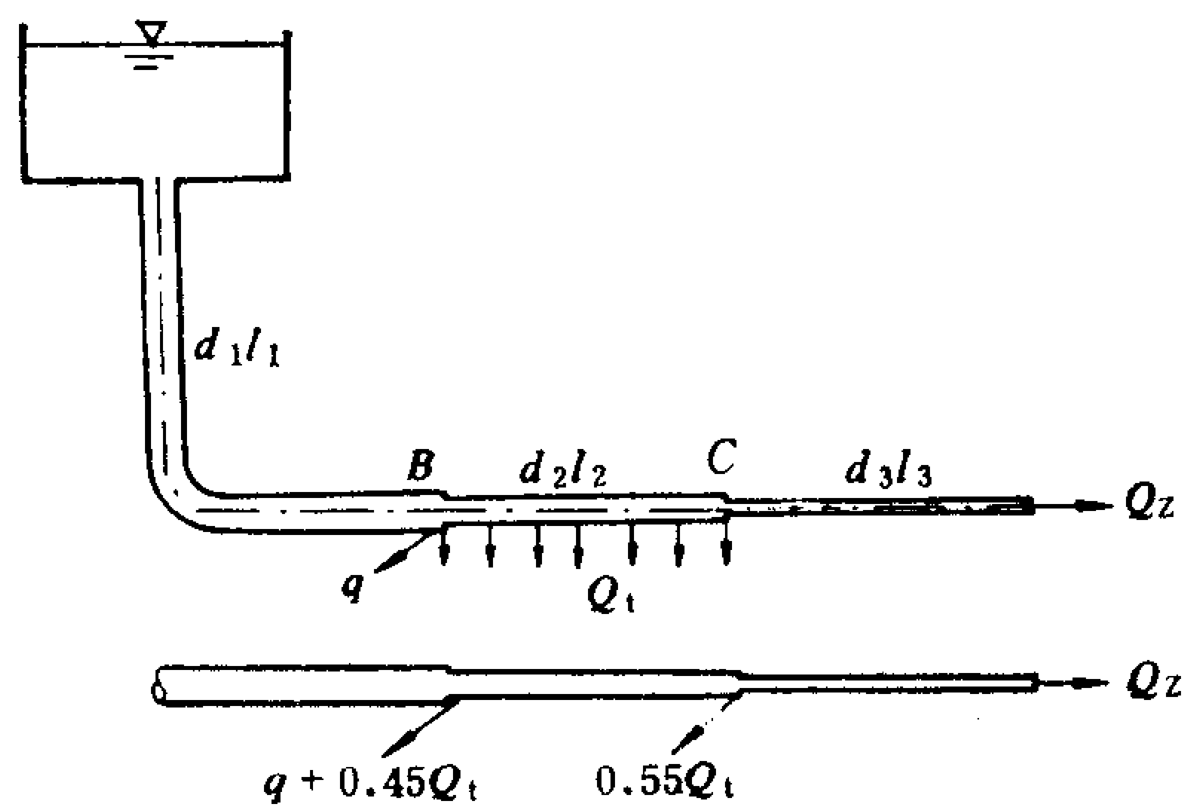
式中Q_c称为折算流量，引入折算流量使沿程均匀泄流管道计算式与简单管道的基本公式形式相同，为分析更复杂的管道系统提供方便。

如管道只有途泄流量，无转输流量，即 $Q_z = 0$，由（8-24）式得

$$h_w = \frac{1}{3} S_H Q_t^2 \tag{8-27}$$

表明管道只有途泄流量时，它的水头损失是通过相同数量的转输流量的1/3。

【例 8-4】 由水塔供水的输水管，由三段组成，中段为均匀泄流管段，其中直径d_1为200mm，长度l_1为500m，d_2为150mm，l_2为150m，d_3为125mm，l_3为200m，节点B分出流量q为0.01m³/s，途泄流量Q_t为0.015m³/s，转输流量Q_z为0.02m³/s，沿程阻力系数$\lambda=0.03$，局部阻力不计，试求需要的作用水头。



例 8-4图

【解】 将途泄流量折算成转输流量，按（8-25）式，把$0.55Q_t$加在节点C，另$0.45Q_t$加在节点B，得到如例8-4图所示流量分配，各管段流量为

$$Q_1=q+Q_t+Q_z=0.045\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_2=0.55Q_t+Q_z=0.028\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_3=Q_z=0.02\text{m}^3/\text{s}$$

整个管道由三段串联而成，作用水头为

$$H=\Sigma h_w=S_1Q_1^2+S_2Q_2^2+S_3Q_3^2$$

其中
$$S_1=A_1l_1=\frac{8\lambda}{\pi^2d_1^5g}l_1=3881.02\text{s}^2/\text{m}^5$$

同理
$$S_2=A_2l_2=4906.38\text{s}^2/\text{m}^5$$

$$S_3=A_3l_3=16278.18\text{s}^2/\text{m}^5$$

将各管段阻抗代入前式得$H=18.26$m

§8-3 管网计算基础

为了满足向更多的用户供水、供煤气，以及送风、排风的需要，往往将管道组合成管网。管网按其布置图形可分为枝状和环状两种。

一、枝状管网

枝状管网的管道在某节点分出后，不再汇合到一起，管线总长度较短，造价较低，常用于通风工程的管网及较小区域的供水管网。如图8-8是由3个吸风口、6根管段组成的排风枝状管网；图8-9是由4个供水点、7根管段组成的给水枝状管网。

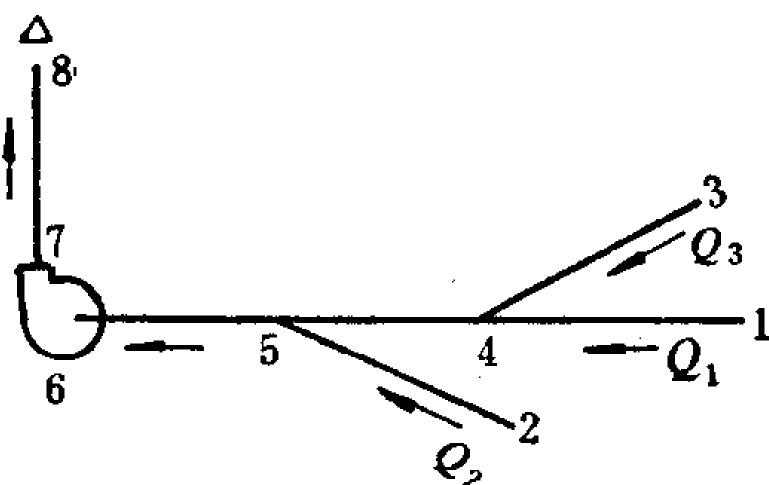


图 8-8 枝状管网（排风）

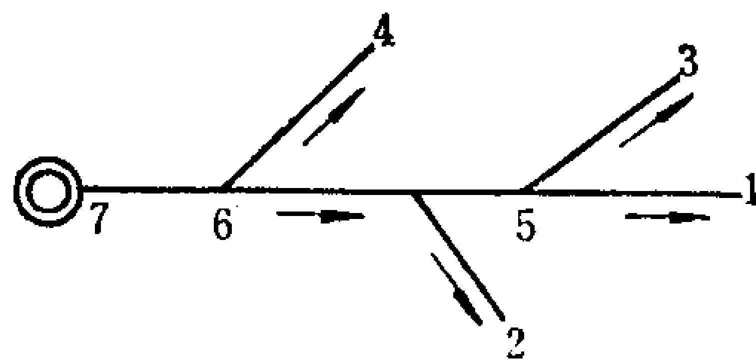


图 8-9 枝状管网（供水）

枝状管网的水力计算分为两类：

1）管网布置已定，包括各管段长度l_i、管壁粗糙（Δ或n）以及局部构件型式和数量

都已确定，用户所需流量Q_c和末端压头p_c（或h_c）已定，要求确定各管段直径d_i及风机风压p（或水塔高度H）。这类问题是新建管网系统的水力计算问题。

计算这类问题，首先按节点流量平衡，由末梢节点向风机（或水塔）逐段计算各管段流量Q_i。其次，计算各管段直径，由

$$Q_i = v_e \frac{\pi d_i^2}{4}$$

$$d_i = \sqrt{\frac{4Q_i}{\pi v_e}} = 1.13\sqrt{\frac{Q_i}{v_e}}$$

式中v_e是根据不同专业的技术经济比较得出的设计流速，作为断面平均流速$v_e = v$，如给水管网v_e取给水总成本（包括建造费和运行费）最低的经济流速，$d = 100 \sim 400\text{mm}$，$v_e = 0.6 \sim 1.0\text{m/s}$；$d > 400\text{mm}$，$v_e = 1.0 \sim 1.4\text{m/s}$；对于排尘管道，$v_e$取防止灰尘沉积堵塞管道而限定的最小流速，可在不同设计手册中查到。然后，计算管段的压强损失p_{wi}(或h_{wi})，并由控制线（要求风机风压最大，或水塔最高的干线）计算所需风压（或塔高）

$$p = \Sigma S_{pi} Q_i^2$$

或

$$H = \Sigma S_{Hi} Q_i^2$$

最后调整支线管径，进行阻力平衡。

2）管网布置和作用压头已定，用户所需流量Q_c和末端压头p_c（或h_c）也已定，要求确定管段直径d_i。这类问题实际是扩建已有管网系统的水力计算问题。

对于这类问题，首先也是按节点流量平衡，由末梢节点向风机（或水塔）逐段计算各管段流量Q_i。然后，计算各管段直径d_i。由于是扩建已有的管网系统，作用压头已经给定（即已有现成的风机或水塔），按前述设计流速计算管径，不能保证技术经济要求，这种情况下，选取各干线中水力坡度J最小者为控制线

$$J = \frac{H - h_e}{\Sigma l + l'} \tag{8-28}$$

式中 H——作用水头；

Σl——控制线长；

l'——局部损失折算成沿程损失的长度，称为局部阻力**当量长度**，即

$$\Sigma\zeta \frac{v^2}{2g} = \lambda \frac{l'}{d} \frac{v^2}{2g}$$

$$l' = \Sigma\zeta \frac{d}{\lambda} \tag{8-29}$$

在管径尚未知的情况下、l'难以确切得出，可在专业设计手册中查到各种局部构件l'的估计值。

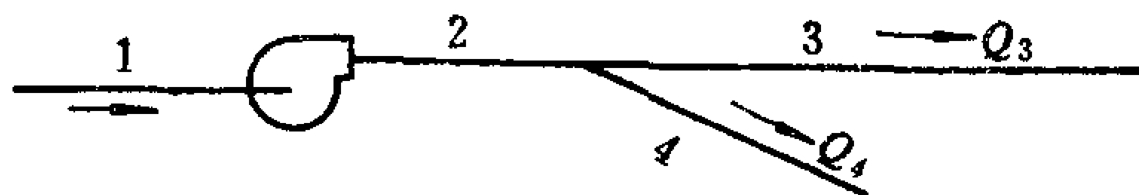
按控制线水头损失均匀分配，即各管段水力坡度相等条件，计算各管段直径

$$J = \lambda \frac{1}{d_i} \frac{1}{2g}\left(\frac{4Q_i}{\pi d_i^2}\right)^2$$

$$d_i = \left(\frac{8\lambda Q_i^2}{\pi^2 g J}\right)^{1/5}$$

控制线管径确定后，便可算出各节点压头，并作为已知条件，继续计算支线管径。

【例 8-5】 枝状送风管道由薄钢板制造，各段长度$l_1 = l_2 = 30\text{m}$，$l_3 = 25\text{m}$，风量$Q_3 = 30000\text{m}^3/\text{h}$，$Q_4 = 40000\text{m}^3/\text{h}$．空气温度为20℃，限定风速$v$不超过15m/s，局部阻力不



例 8-5图

计，试求各管段直径及风机风压。

【解】 计算各管段流量

$$Q_3=\frac{30000}{3600}=8.33\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_4=\frac{40000}{3600}=11.11\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_2=Q_3+Q_4=19.44\text{m}^3/\text{s}$$

$$Q_1=Q_2=19.44\text{m}^3/\text{s}$$

按限定流速计算各管段直径

$$d_3=1.13\sqrt{\frac{Q_3}{v_e}}=1.13\sqrt{\frac{8.33}{15}}=0.84\text{m}$$

同理 $d_4=0.97\text{m}，\ d_1=d_2=1.28\text{m}$

计算各管段压强损失，管段3：

$$\text{Re}_3=\frac{vd_3}{\nu}=\frac{15\times0.84}{15.7\times10^{-6}}=8.03\times10^5$$

$$\frac{\varDelta}{d_3}=\frac{0.15}{840}=0.00018$$

由莫迪图查得$\lambda_3=0.0145$

$$S_{p3}=\frac{8\lambda_3 l_3\rho}{\pi^2 d_3^5}=1.35\text{kg/m}^7$$

$$p_{w3}=S_{p3}Q_3^2=93.68\text{N/m}^2$$

同理 $p_{w4}=49\text{N/m}^2，\ p_{w1}=p_{w2}=43.46\text{N/m}^2$

按控制线（1-2-3）计算风机风压

$$p=p_{w1}+p_{w2}+p_{w3}=180.6\text{N/m}^2$$

最后，进行支线（管段4）阻力平衡计算，因管段3、4出口外均为大气空间，全压为零，出口条件相同，两管段为并联管道，由

$$S_{p3}Q_3^2=S_{p4}Q_4^2$$

$$S_{p4}=S_{p3}\left(\frac{Q_3}{Q_4}\right)^2=0.759$$

$$0.759=\frac{8\lambda_4\rho l_4}{\pi^2 d_4'^5} \qquad \lambda_4\text{仍取}0.014$$

得 $d_4'=0.85\text{m}$

校核流速

$$v_4'=\frac{4Q}{\pi d_4'^2}=19.59\text{m/s}>15\text{m/s}$$

超过限定流速，故不允许缩小管段4直径，可在该管段加设阀门调节（增大ζ）达到阻力平衡。

二、环状管网

环状管网的管道连成闭合环路，不会因管网内某一处故障而中断该点以后用户所需流量，从而提高了管网工作的可靠性。一般城镇配水管网，煤气管网多采用环状管网。如图8-10就是二环和三环管网。

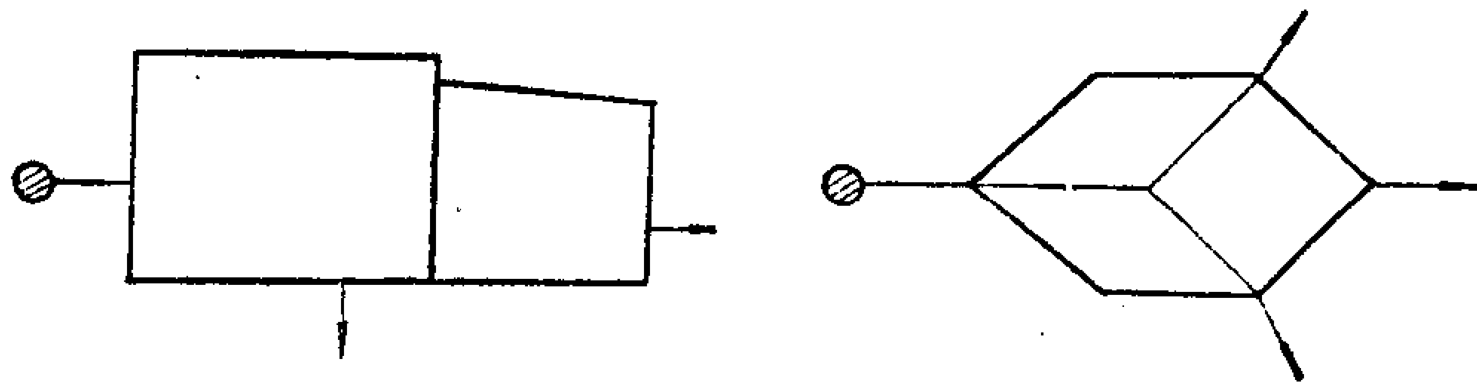


图 8-10 环状管网（二环、三环）

进行管网水力计算之前，已知管线布置及用户所需流量Q_c和末端压头p_c（或h_c），环状管网水力计算的目的在于确定各管段通过的流量Q_i及直径d_i进而确定管网所需压头p（或H）。

研究任一形状的环状管网得出，管网的管段数n_y和环数n_k及节点数n_p有以下关系：

$$n_y = n_k + n_p - 1$$

管网中每一管段均有两个未知数，Q_i和d_i，所以水力计算的未知量总数为$2n_y = 2(n_k + n_p - 1)$个。

求解上述未知量所依据的条件为：

1）对于任一节点，流向节点的流量和流出节点的流量相等。如以流向节点的流量为正值，流出节点的流量为负值，则二者的总和为零，即在各节点

$$\Sigma Q_i = 0 \qquad (8\text{-}30)$$

2）对于任一闭合环路，由某一节点沿两个方向至另一个节点的水头损失相等。这相当于并联管道中，并联管段的水头损失相等。如以顺时针方向流动的水头损失为正值，逆时针方向为负值，则二者的总和为零，即在各环

$$\Sigma h_{wi} = \Sigma S_i Q_i^2 = 0 \qquad (8\text{-}31)$$

根据条件1）可列出（$n_p - 1$）个独立方程式$\Sigma Q_i = 0$，又根据条件2）可列出n_k个方程式$\Sigma S_i Q_i^2 = 0$，由此，环状管网共可建立（$n_k + n_p - 1$）个方程式。

比较管网未知量数与可建立方程式数，当已知各管段直径，或者直径虽然未知，但可由前述设计流速来确定时，未知量数减半，满足未知量与方程式数目一致，代数方程组有确定解。环状管网的水力计算就是求方程组（8-30）、（8-31）的数值解。由于直接求解十分复杂，工程上多用逐步近似方法。首先根据节点上用户所需流量，初拟各管段的流向，并按（8-30）式第一次分配流量Q_i。由分配的流量用设计流速算出直径d_i，再计算各管段水头损失h_{wi}。最后验算各环的水头损失是否满足（8-31）式$\Sigma h_{wi} = 0$，如不满足，则需对所分配的流量进行调整。重复以上步骤逐次逼近，直至各环满足（8-31）式，或闭合差$\Delta h = \Sigma h_{wi}$小于规定值。

工程上环状管网的计算方法有多种，应用较广的有哈代-克罗斯（Hardy-Cross）法，介绍如下：

首先根据节点流量平衡条件$\Sigma Q_i = 0$分配各管段流量Q_i，由所分配的流量计算水头损失，并按（8-31）式计算各环路闭合差，即

$$h_{wi} = S_i Q_i^2$$

$$\Delta h = \sum_{环} h_{wi}$$

当最初分配的流量不满足闭合条件时，在各环路加入校正流量ΔQ，各管段相应得到水头损失增量Δh_{wi}，即

$$h_{wi} + \Delta h_{wi} = S_i(Q_i + \Delta Q)^2 = S_i Q_i^2\left(1 + \frac{\Delta Q}{Q_i}\right)^2$$

上式按二项式展开，取前两项得

$$h_{wi} + \Delta h_{wi} = S_i Q_i^2\left(1 + 2\frac{\Delta Q}{Q_i}\right) = S_i Q_i^2 + 2S_i Q_i \Delta Q$$

如加入校正流量后，环路满足闭合条件，则有

$$\Sigma(h_{wi} + \Delta h_{wi}) = \Sigma h_{wi} + \Sigma\Delta h_{wi} = \Sigma h_{wi} + 2\Sigma S_i Q_i \Delta Q = 0$$

于是

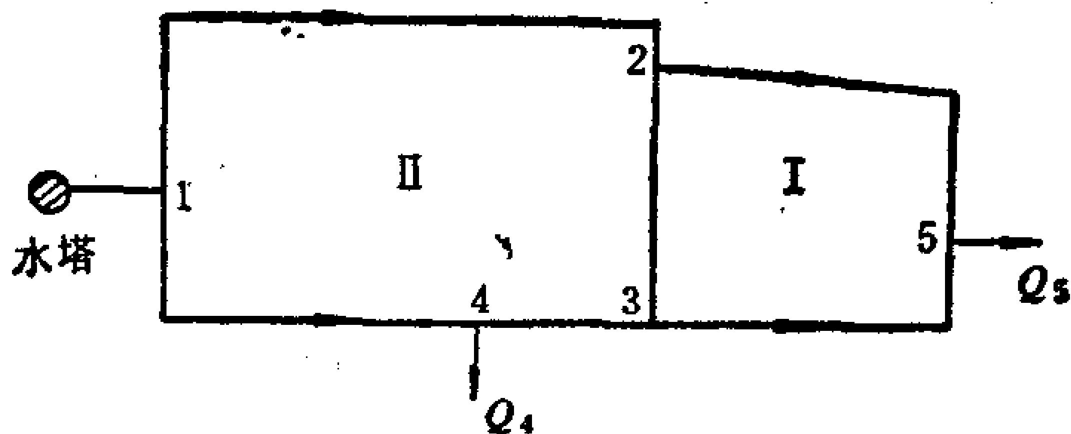
$$\Delta Q = -\frac{\Sigma h_{wi}}{2\Sigma S_i Q_i} = -\frac{\Sigma h_{wi}}{2\Sigma\frac{S_i Q_i^2}{Q_i}} = -\frac{\Sigma h_{wi}}{2\Sigma\frac{h_{wi}}{Q_i}} \qquad (8\text{-}32)$$

按（8-32）式计算，为使h_{wi}与Q_i取得一致符号，规定环路内流向以顺时针方向为正，逆时针方向为负。

将ΔQ与各管段初分配流量相加得第二次分配流量，并以同样步骤逐次计算，直至达到所要求的精度。

近年来，电子计算机用于管网计算日益普遍，特别是对于多环管网的计算，更具迅速、准确的优越性。

【例 8-6】 水平两环给水管网（例8-6图），已知用水点流量$Q_4 = 0.032\text{m}^3/\text{s}$，$Q_5 = 0.054\text{m}^3/\text{s}$，各管段均为铸铁管，长度及直径如表8-1所示。试求各管段通过的流量（闭合差小于0.5m即可）。



例 8-6图

管线布置　　　　表 8-1

环序	管段	长度 (m)	直径 (mm)
Ⅰ	2～5	220	200
	5～3	210	200
	2～3	90	150
Ⅱ	1～2	270	200
	2～3	90	150
	3～4	80	200
	4～1	250	250

【解】 本题为环状管网水力计算问题，计算步骤如下（为便于计算列表进行）：

1）初拟流向，分配流量。初拟各管段流向如例8-6图，按节点流量平衡$\Sigma Q_i=0$，第一次分配流量，分配值列入表8-2。

表 8-2

环序	管段	初次分配流量 Q_i (L/s)	h_{wi} (m)	h_{wi}/Q_i	ΔQ	各管段校正流量	二次分配流量	h_{wi}
I	2～5	+30	+1.84	0.0614	-1.82	-1.82	28.18	+1.62
	5～3	-24	-1.17	0.0487		-1.82	-25.82	-1.35
	3～2	-6	-0.17	0.0283		3.86-1.82	-3.96	-0.08
	Σ		+0.5	0.138				+0.19
II	1～2	+36	+3.2	0.089	-3.86	-3.86	32.14	+2.57
	2～3	+6	+0.17	0.0283		-3.86+1.82	3.96	+0.03
	3～4	-18	-0.27	0.015		-3.86	-21.86	-0.35
	4～1	-50	-1.77	0.0354		-3.86	-53.86	-2.04
	Σ		+1.33	0.168				+0.23

2）计算各管段水头损失。按分配流量计算各管段阻抗S_i及水头损失$h_{wi}=S_iQ_i^2$，见表8-2。

3）计算环路闭合差。

$$\sum_{I} h_{wi}=1.84-1.17-0.17=0.5\text{m}$$

$$\sum_{II} h_{wi}=3.2+0.17-0.27-1.77=1.33\text{m}$$

闭合差大于规定值，按（8-32）式计算校正流量ΔQ。

4）调整分配。将各管段分配流量Q_i与校正流量ΔQ相加得二次分配流量，对两环的共同管段（如管段2-3），ΔQ应为邻环校正流量的负值与本环校正流量之和，然后重复2）、3）步骤计算。本题按二次分配流量计算，各环已满足闭合要求，故二次分配流量即为所求各管段的流量。

§8-4 有压管道中的水击

本章前三节讨论了各种有压管道的恒定流动，这一节有压管道中的水击属于非恒定流动问题。

一、水击现象

在液体有压管道中，由于某种原因（如阀门突然启闭，换向阀突然变换工位，水泵机组突然停车等），使液流速度发生突然变化，同时引起压强大幅度波动的现象称为**水击**，或称**水锤**。由水击产生的瞬时压强称为**水击压强**，可达管道正常工作压强的几十倍至数百倍。这种压强大幅度的波动，有很大的破坏性，可导致管道系统强烈振动、噪声、造成阀门破坏，管道接头断开，甚至管道爆裂等重大事故。

（1）水击发生的原因

现以简单管道阀门突然关闭为例说明水击发生的原因。

设简单管道长度为l，直径为d，阀门关闭前管道中为恒定流动，流速为v_0(图8-11)。当阀门突然关闭，使紧靠阀门的一层液体突然停止流动，流速由v_0突变为零，根据动量原理，物体动量的变化等于作用在该物体上外力的冲量，这里外力就是阀门对液体的作用力，受到外力作用，该层液体的压强突然升至$p_0+\Delta p$，Δp即水击压强。

图 8-11　水击的发生

很大的水击压强使该层（mn段）发生液体压缩和管壁膨胀两种变形。由于这两种变形，紧靠阀门的液层停止流动后，与之相接的第二层及其后续各层液体逐层地停止流动，同时压强逐层升高。由此可见，阀门突然关闭，管道中液体不是在同一时刻全部停止流动，压强也不是在同一时刻同时升高，而是以波的形式由阀门迅速传向管道进口。从以上分析不难看出，引起管道液流流速突然变化的因素（如阀门突然关闭）是发生水击的条件，液体本身具有惯性和压缩性则是发生水击的内在原因。

（2）水击的传播过程

水击以波的形式传播，称为**水击波**。典型传播过程如图8-12所示。

第一阶段：升压波从阀门向管道进口传播阶段。设阀门在时间$t=0$瞬时关闭，紧靠阀门的流层，流速由原流速v_0变为零，相应压强升高Δp，液体被压缩，并以波的形式向管道进口传播。如以a表示水击波的传播速度，则在$0<t<l/a$时段，水击波传播到的距离内，液体停止流动，压强升至$p_0+\Delta p$；水击波未传播到的部分，流速仍为v_0，压强为p_0。在$t=l/a$时刻，水击波传至管道进口，全管处于被压缩状态。

第二阶段：降压波从管道进口向阀门传播阶段。时间$t=l/a$（第一阶段末，第二阶段开始），管内压强$p_0+\Delta p$大于进口外侧静压强，在压强差Δp作用下，管道内液体以和Δp相应的流速值$-v_0$向水池倒流，随即进口处压强恢复为p_0，于是又与相邻的流层出现压强差，这样液体自管道进口逐层向水池倒流，这个过程相当于第一阶段的反射波。在$t=2l/a$时刻，反射波传至阀门断面，全管压强恢复为原来状态。

第三阶段：降压波从阀门向管道进口传播阶段。在$t=2l/a$时刻，由于惯性作用，液体仍要以流速$-v_0$向水池倒流，而阀门处无液体补充，因此紧靠阀门的流层首先停止流动，流速由$-v_0$变为零，相应压强降低Δp，这个降压波向阀门由管道进口传播。在$t=3l/a$时刻传至管道进口，全管处于降压状态。

第四阶段：升压波从管道进口向阀门传播阶段。在$t=3l/a$时刻，因管道进口外侧压强p_0大于管内压强$p_0-\Delta p$，在压强差Δp作用下，液体以和Δp相应的流速值v_0向管道内流动，自进口压强逐层恢复为p_0，液体由降压状态复原　在$t=4l/a$时刻，这个升压波传至阀门断面，全管恢复到起始状态。由于惯性作用，液体仍要以v_0流动，但阀门关闭，流动受阻停止，于是和第一阶段开始阀门突然关闭的情况相同，又发生升压波自阀门向管道进口传播，重复上述四个阶段。

以上水击的传播完成了一个周期，在一个周期内，水击波由阀门传到进口，再由进口

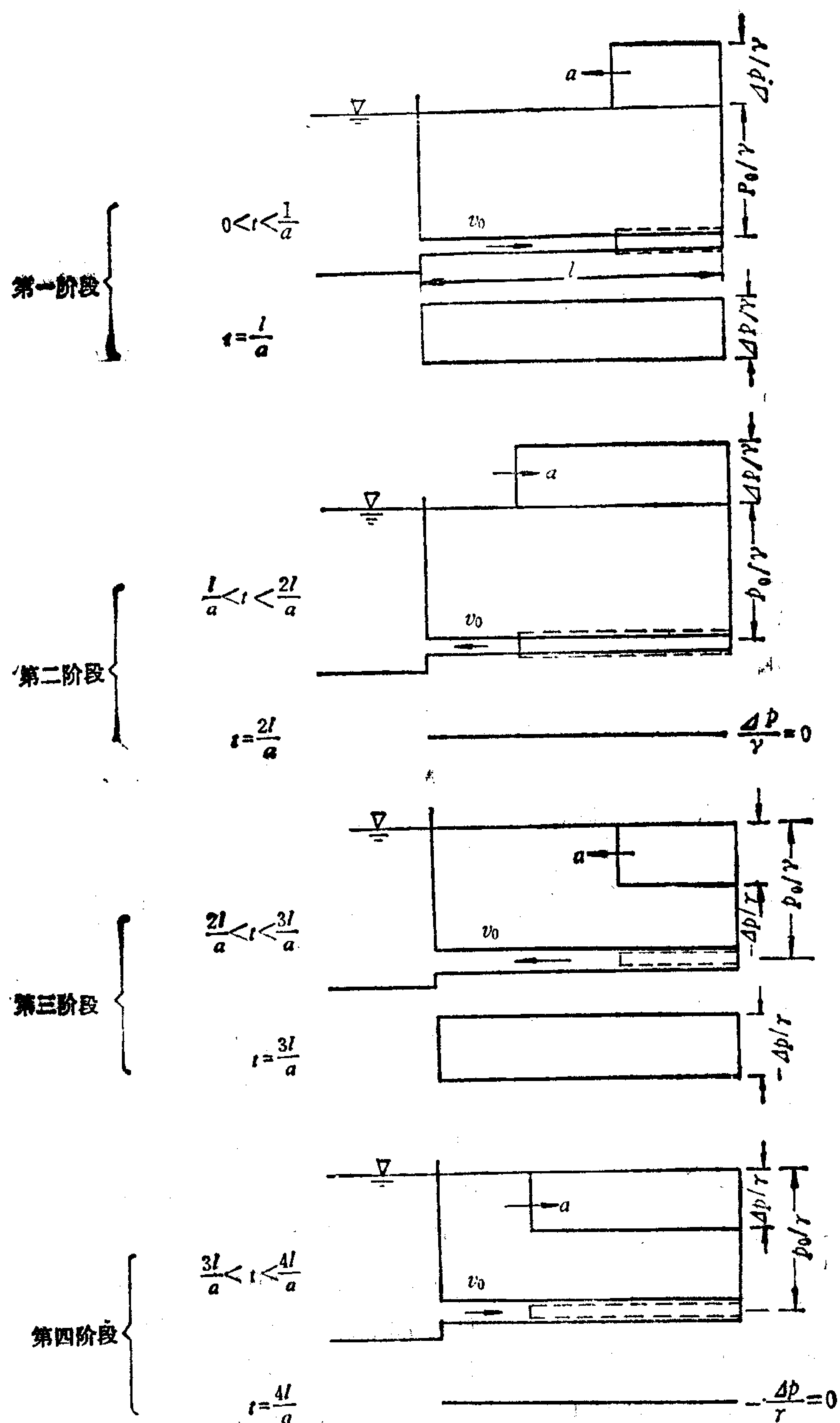


图 8-12 水击波传播过程

至阀门共往返两次，往返一次所需时间$T=2l/a$称为相或相长。实际上水击波传播速度很快，前述各阶段是在极短时间内连续完成的。

在水击的传播过程中，管道各断面的流速和压强皆随时间变化，所以水击过程是非恒定流。图8-13是阀门断面压强随时间的变化图，阀门在$t=0$时刻瞬时关闭，压强由p_0升至$p_0+\Delta p$，该值保持到$t=2l/a$时刻，即水击波往返一次的时间。在$t=2l/a$时刻，压强由$p_0+\Delta p$突然降至$p_0-\Delta p$，该值保持到$t=4l/a$时刻。在$t=4l/a$时刻，压强由$p_0-\Delta p$升至p_0，然后周期性变化。

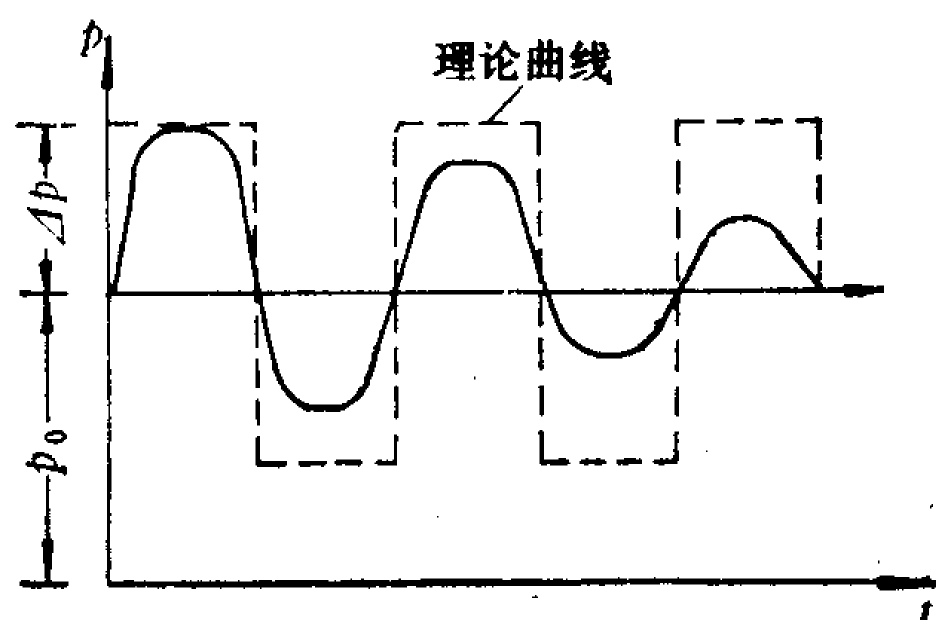


图 8-13　阀门断面压强变化

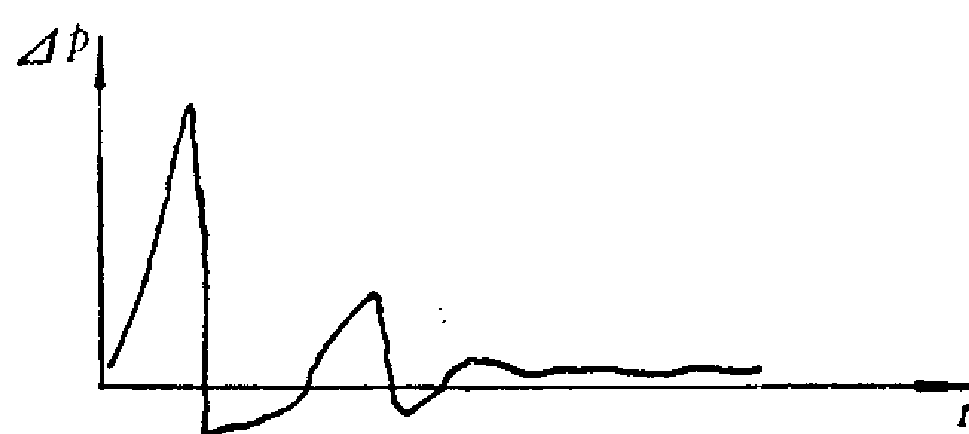


图 8-14　实测阀门断面水击压强变化

如果水击传播过程中没有能量损失，它将一直周期性的传播下去。但实际上液体在流动过程中，能量不断损失，因而水击压强迅速衰减。阀门断面实测的水击压强随时间变化如图8-14所示。

二、水击压强计算

前面讨论了水击发生的原因及传播过程。在此基础上，进行水击压强 Δp 的计算，为设计有压管道及控制运行提供依据。

（1）直接水击

在前面的讨论中，认为阀门是瞬时关闭的，实际上阀门关闭总有一个过程。如关闭时间小于一个相长（$T_z < 2l/a$），那么最早发出的水击波的反射波回到阀门以前，阀门已全关闭，这时阀门处的水击压强和阀门在瞬时关闭相同，这种水击称为**直接水击**。

直接水击压强的计算式可用动量方程导出，推导的方法有两种：其一是用非恒定流动量方程（4-55）式推导；另一种方法是取动控制体，把非恒定流转化为恒定流问题来解。这里采用后一种方法。

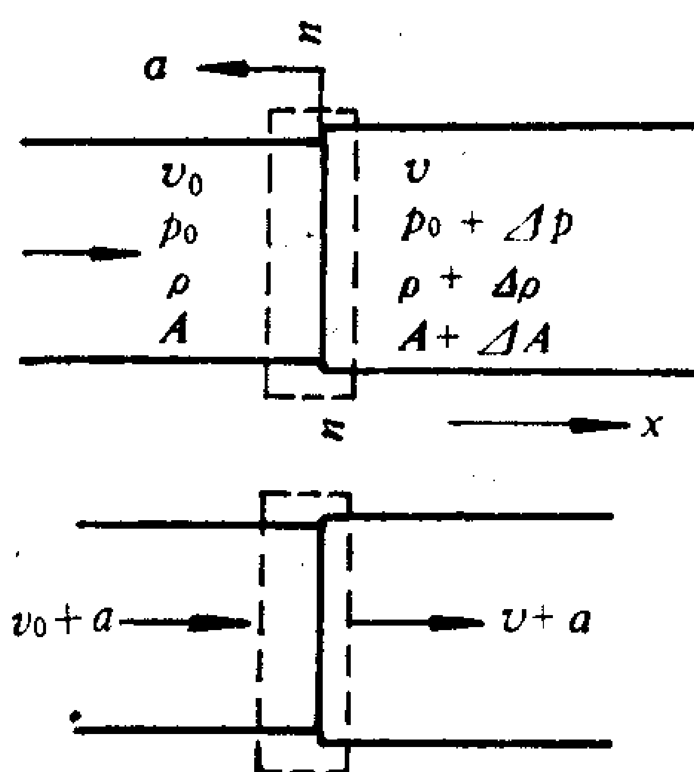


图 8-15　直接水击压强计算

有压管流因突然关小阀门造成水击，如水击波现传播至 $n-n$ 断面（见图8-15），其速度为 a。在水击波到达前，管内流速为 v_0，压强为 p_0，液体密度为 ρ，过流断面为 A；波峰过后，流速降至 v，压强、密度和过流断面分别增大到 $p_0+\Delta p$、$\rho+\Delta\rho$ 和 $A+\Delta A$。取固结在波峰上的动坐标系，它随波峰作匀速直线运动，因而仍为惯性坐标系。于波峰前后微小距离处取两过流断面构成控制体（图中虚线所示），液体分别以相对速度 v_0+a 和 $v+a$ 流入和流出该控制体，它们都不随时间而变。这样，对这个动坐标系来说，流动就是恒定的。

令 x 轴方向与流速方向一致，列恒定总流的动量方程，作用于控制体的外力为

$$\Sigma F_x = p_0A-(p_0+\Delta p)(A+\Delta A)$$

发生直接水击的管壁材料的弹性模量都很大，因而 $\Delta A \ll A$，$A+\Delta A\approx A$，故 $\Sigma F_x\approx -\Delta pA$，于是总流的动量方程为

$$-\Delta pA=(\rho+\Delta\rho)(A+\Delta A)(v+a)^2-\rho A(v_0+a)^2$$

将总流连续性方程 $(\rho+\Delta\rho)(A+\Delta A)(v+a)=\rho A(v_0+a)$ 代入上式，得

$$-\Delta pA=\rho A(v_0+a)(v-v_0)$$

水击波的传播速度a一般远大于管内流速v_0，$v_0+a\approx a$，因此

$$\Delta p=\rho a(v_0-v) \tag{8-33}$$

如阀门瞬时完全关闭，$v=0$，得水击压强最大值的计算公式

$$\Delta p=\rho a v_0 \quad 或 \quad \frac{\Delta p}{\gamma}=\frac{a v_0}{g} \tag{8-34}$$

直接水击压强的计算式是俄国流体力学家儒柯夫斯基（Жуковский）最早导出的，故上式又称为**儒柯夫斯基公式**。

（2）间接水击

如阀门关闭时间$T_z>2l/a$，则开始关闭时发出的水击波的反射波，在阀门尚未完全关闭前，已返回阀门断面，随即变为负的水击波向管道进口传播。由于负水击压强和阀门继续关闭所产生的正水击压强相迭加，使阀门处最大水击压强小于直接水击压强，这种情况的水击称为**间接水击**。

间接水击由于正水击波与反射波相互作用，计算更为复杂，一般情况下，间接水击压强可近似由下式计算

$$\Delta p=\rho a v_0\frac{T}{T_z}$$

或

$$\frac{\Delta p}{\gamma}=\frac{a v_0}{g}\frac{T}{T_z}=\frac{v_0}{g}\frac{2l}{T_z} \tag{8-35}$$

式中　v_0——水击前管道中平均流速；

T——水击波相长$T=2l/a$；

T_z——阀门关闭时间。

由（8-35）式可见，间接水击压强与水击波传播速度无关。

三、水击波的传播速度

（8-34）式表明，直接水击压强与水击波的传播速度成正比，因此，计算直接水击压强，需要知道水击波的传播速度a。考虑到水的压缩性和管壁的弹性变形，可得水管中水击波的传播速度（推导过程从略）

$$a=\frac{a_0}{\sqrt{1+\frac{E_0}{E}\frac{d}{\delta}}} \tag{8-36}$$

式中　a_0——水中声波的传播速度，水温10℃左右，压强为1～25大气压时，$a_0=1435\text{m/s}$；

E_0——水的弹性模量，$E_0=2.04\times10^5\text{N/cm}^2$；

E——管壁材料的弹性模量（表8-3）；

d——管道直径；

δ——管壁厚度。

管壁材料的弹性模量　　**表 8-3**

管材	铸铁管	钢管	钢筋混凝土管	石棉水泥管	木管
E (N/cm²)	8.73×10^6	2.06×10^7	2.06×10^7	3.24×10^6	6.86×10^5

对于一般钢管（d/δ）≈100，（E/E_0）≈0.01，代入（8-36）式得 $a\approx 1000m/s$，如阀门关闭前流速$v_0=1m/s$，阀门突然关闭引起的直接水击由(8-34）式算得($\Delta p/\gamma$)≈100m，可见直接水击压强是很大的。

四、停泵水击

因水泵突然停车而引起的水击称为停泵水击。离心泵正常运行时均匀供水，需要停泵之前，按操作规程先关闭出水阀门，这样离心泵正常运行和正常停泵，系统中都不会发生水击。但是，如突然断电或机组突然发生机械故障，水泵机组突然停车，往往会引起停泵水击，成为造成输水系统事故的重要原因。

在水泵突然停车的最初时间，压水管内的水流由于惯性作用，继续以逐渐减小的速度流动，而此时水泵已失去动力，转速突降，供水量骤减，于是压水管在靠近水泵处压强降低或出现真空。当压水管中水流速度减至零，由于压差和重力作用，水自压水池向水泵倒流，并冲动止回阀突然关闭，导致压强升高发生水击。这种情况对于几何给水高度很大的压水管道尤为严重。突然停泵后，首先出现压强降低，然后因止回阀突然关闭引起压强升高是停泵水击的特点。停泵水击实测压强随时间的变化曲线围绕几何给水高度摆动，如图8-16。

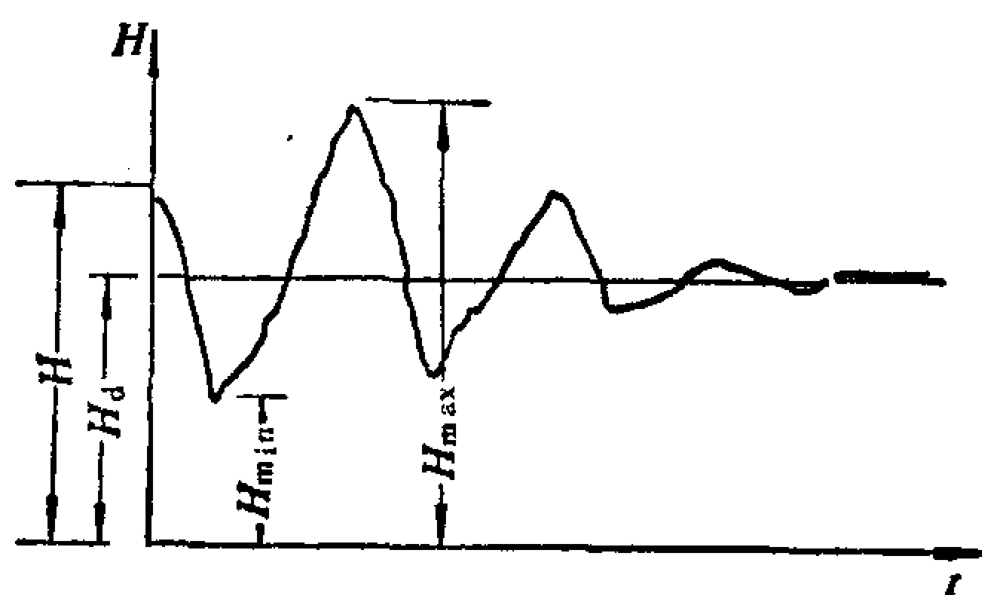


图 8-16 停泵水击

五、防止水击危害的措施

水击能够引起管道变形甚至爆裂，造成严重危害。通过研究水击发生的原因及影响因素，可找到防止水击危害的措施，如：

1）限制管道中流速。（8-33）、（8-35）式表明，减小管道中流速v_0，水击压强Δp呈线性降低，因此，一般给水管网中，流速不大于3m/s；

2）控制阀门关闭或开启时间。控制阀门的关闭或开启时间，以避免直接水击，也可降低间接水击压强；

3）减小管道长度和增加管道的弹性。减小管道长度，使水击波的相长减小，有利于使直接水击变为间接水击。增大管道的弹性，弹性模量E减小，将使水击波传播速度减小，水击压强降低；

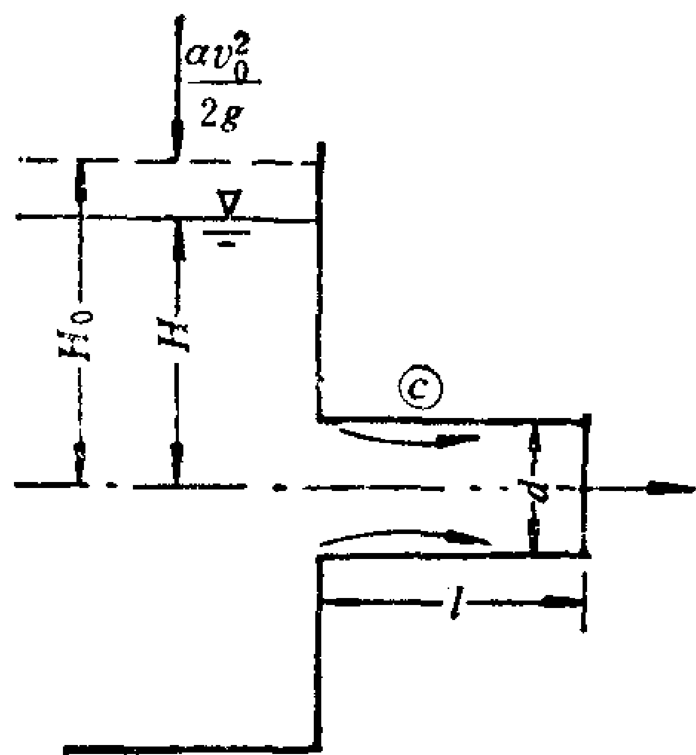
4）设置安全阀，进行过载保护。

习 题

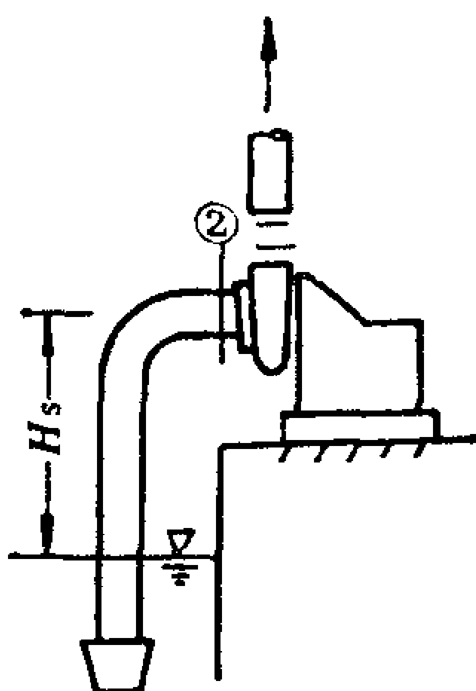
8-1 在圆形孔口上外接长度$l=(3\sim4)d$的短管称为圆柱形外管嘴（题8-1图）。水经管嘴出流，因惯性作用，在管嘴进口不远处形成收缩断面©，其后突扩至出口断面满管出流，已知收缩系数$\varepsilon=0.63$（$\varepsilon=A_c/A$），由进口至收缩断面的阻力系数$\zeta_0=0.06$（对应于收缩断面的流速v_c)，因管嘴长度很短，沿程阻力不计，试求对应于出口流速的阻力系数ζ_m和流速系数φ_m。

8-2 上题中，为了使管嘴能保持满管出流，收缩断面的真空值不得超过 7 mH_2O，试求保证该管嘴正常工作的最大作用水头[H_0]。

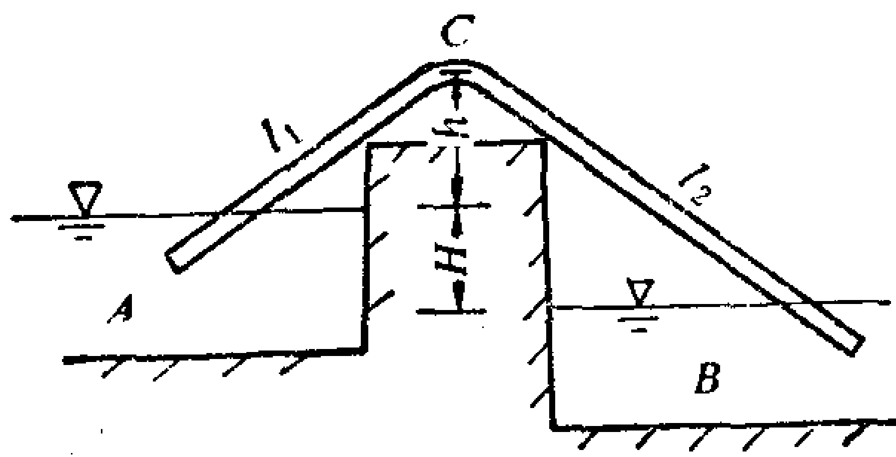
8-3 离心泵由吸水池抽水，最大抽水量为8.1L/s，吸水管长为8m，直径为100mm，沿程阻力系数$\lambda=0.045$，直径100mm带底阀的滤网阻力系数$\zeta=7$，90°弯管局部阻力系数$\zeta_b=0.3$，泵进口断面2允许吸上真空高度[H_s]=5.7m，试求水泵的最大安装高度。



题 8-1图



题 8-3图

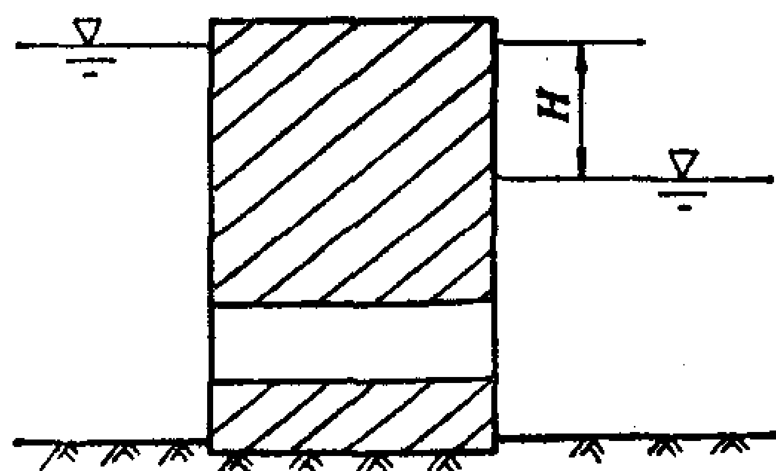


题 8-4图

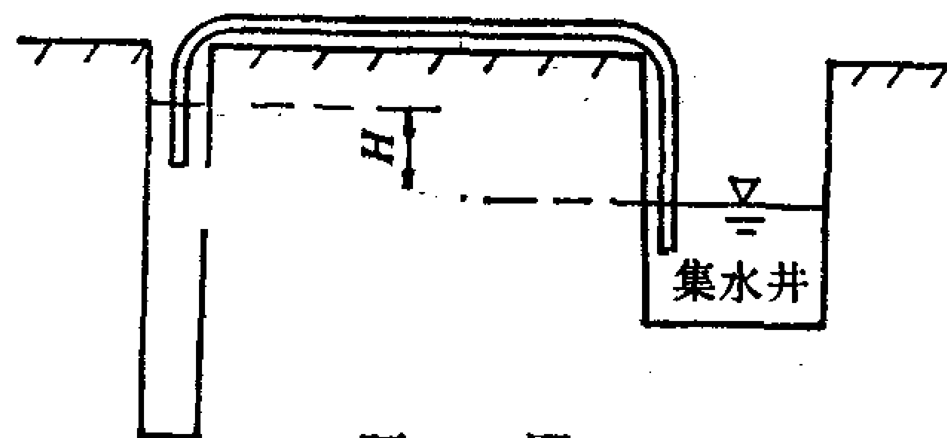
8-4 虹吸管将A池中的水输入B池，已知长度$l_1=3$m，$l_2=5$m，直径$d=75$mm，两池水面高差$H=2$ m，最大超高$h=1.8$m，沿程阻力系数$\lambda=0.02$，局部阻力系数：进口$\zeta_e=0.5$，转弯$\zeta_b=0.3$，出口$\zeta_0=1$。试求流量及管道最大超高断面的真空度。

8-5 有压排水涵管，上、下游水位差为1.5m，排水量为2.0m³/s，涵管长为20m，沿程阻力系数$\lambda=0.03$，局部阻力系数：进口$\zeta_e=0.5$，出口$\zeta_0=1.0$（以后管道进、出口局部阻力系数不再给出）。试求涵管直径。

8-6 用虹吸管将钻井中的水输送到集水井，已知虹吸管全长60m，直径200mm，虹吸管为钢管，粗糙系数$n=0.012$，管道进口、弯头的局部阻力系数分别为$\zeta_e=0.5$、$\zeta_b=0.5$，水位差$H=1.5$m，试求虹吸管的流量。



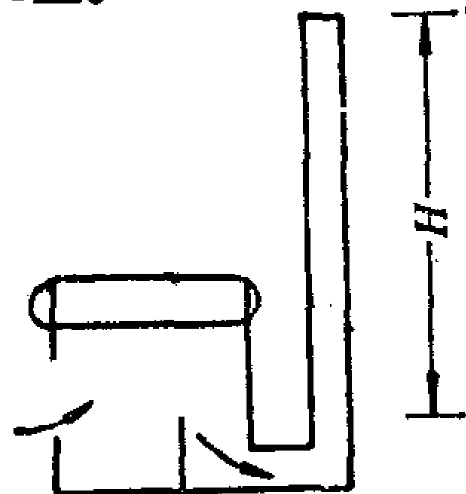
题 8-5图



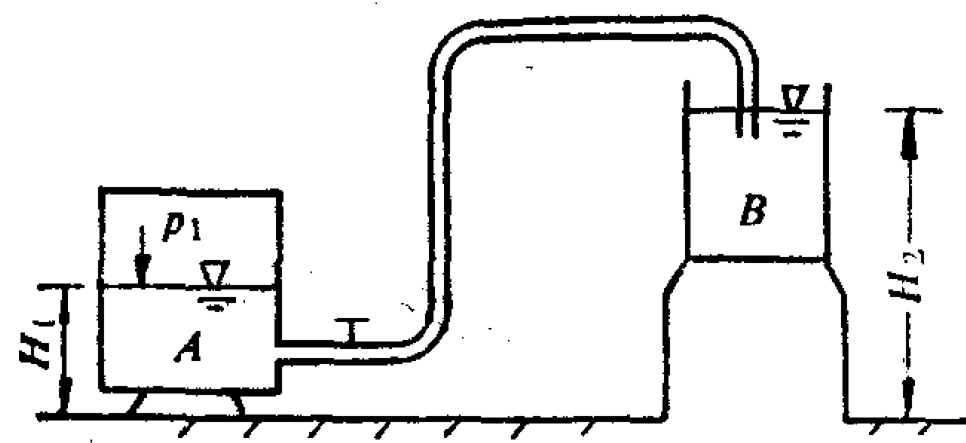
题 8-6图

8-7 自然排烟锅炉，烟囱直径$d=0.9$m，烟气流量$Q=7.0\text{m}^3/\text{s}$，烟气密度$\rho=0.7\text{kg/m}^3$，外部空气密度$\rho_a=1.2\text{kg/m}^3$，烟囱沿程阻力系数$\lambda=0.035$，为使底部真空度不小于10mmH_2O，试求烟囱的高度H。

8-8 水从密闭容器A，沿直径$d=25$mm、长度$l=10$m的管道流入容器B，已知容器A水面的相对压强$p_1=2$at，水面高$H_1=1$m，$H_2=5$m，沿程阻力系数$\lambda=0.025$，局部阻力系数：阀门$\zeta_v=4.0$，弯头$\zeta_b=0.3$，试求流量。



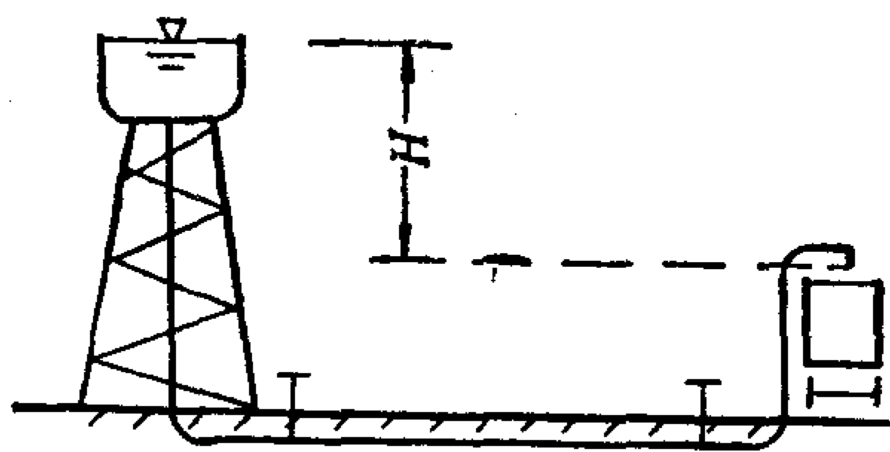
题 8-7图



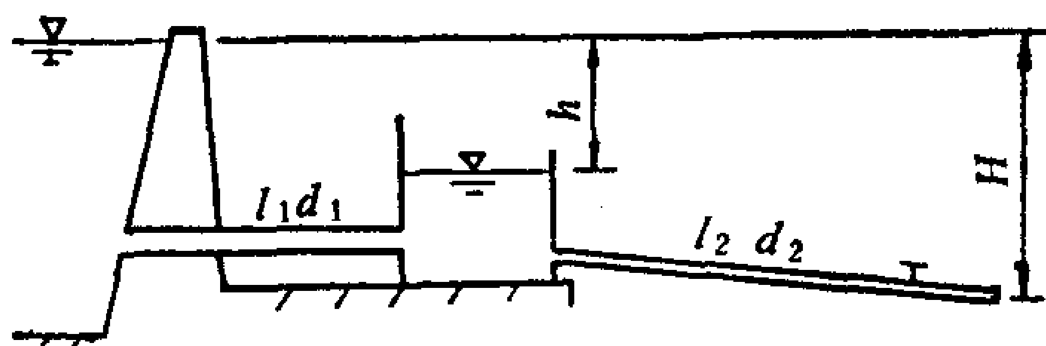
题 8-8图

8-9 由水塔向水车供水，已知供水管直径$d=100$mm，长度$l=80$m，中间装有两个闸阀和四个90°弯头，管道的沿程阻力系数$\lambda=0.03$，局部阻力系数：阀门$\zeta_v=0.12$，弯头$\zeta_b=0.48$，水塔的水头$H=6$m，水车的有效容积$V=7\text{m}^3$，试求水车充满水所需时间。

8-10　由水库引水，先用长$l_1=25\text{m}$，直径$d_1=75\text{mm}$的管道将水引至贮水池中，再由长$l_2=150\text{m}$，直径$d_2=50\text{mm}$的管道将水引至用水点。已知水头$H=8\text{m}$，沿程阻力系数$\lambda_1=\lambda_2=0.03$，阀门局部阻力系数$\zeta_v=3$，试求：1）流量Q和水面高差h；2）绘总水头线和测压管水头线。



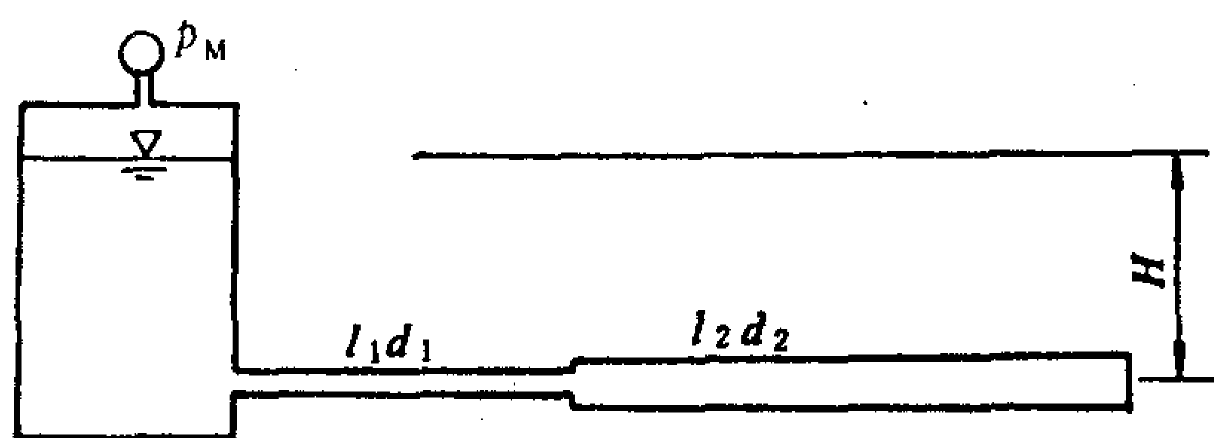
题 8-9图



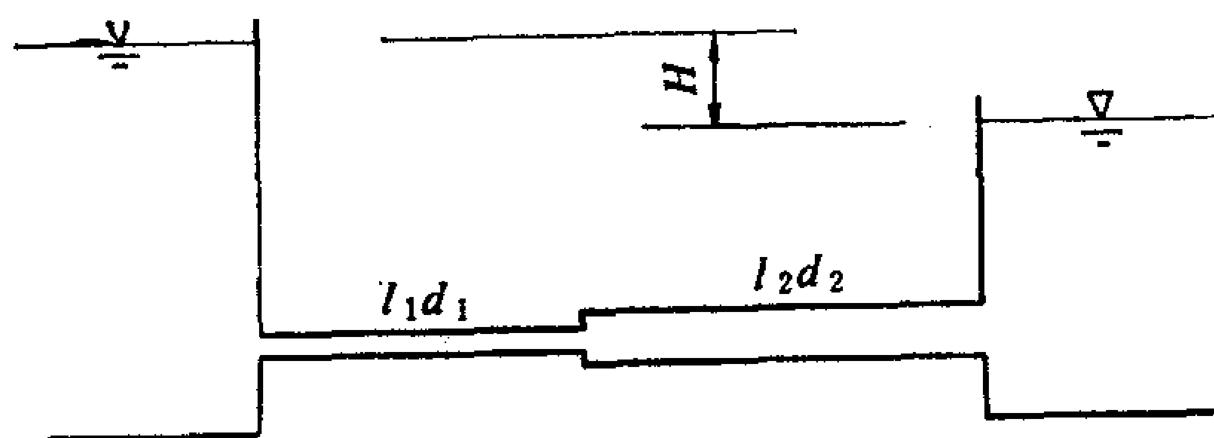
题 8-10图

8-11　自密闭容器经两段串联管道输水，已知压力表读值$p_M=1\text{at}$，水头$H=2\text{m}$，管长$l_1=10\text{m}$、$l_2=20\text{m}$，直径$d_1=100\text{mm}$、$d_2=200\text{mm}$，沿程阻力系数$\lambda_1=\lambda_2=0.03$，试求流量并绘总水头线和测压管水头线。

8-12　两水池水面高差恒定，$H=3.82\text{m}$，用直径$d_1=100\text{mm}$、$d_2=200\text{mm}$，长度$l_1=6\text{m}$、$l_2=10\text{m}$的串联管道相连接，沿程阻力系数$\lambda_1=\lambda_2=0.02$，试求：1）流量并绘总水头线和测压管水头线；2）若直径改为$d_1=d_2=200\text{mm}$，λ不变，流量增大多少倍？



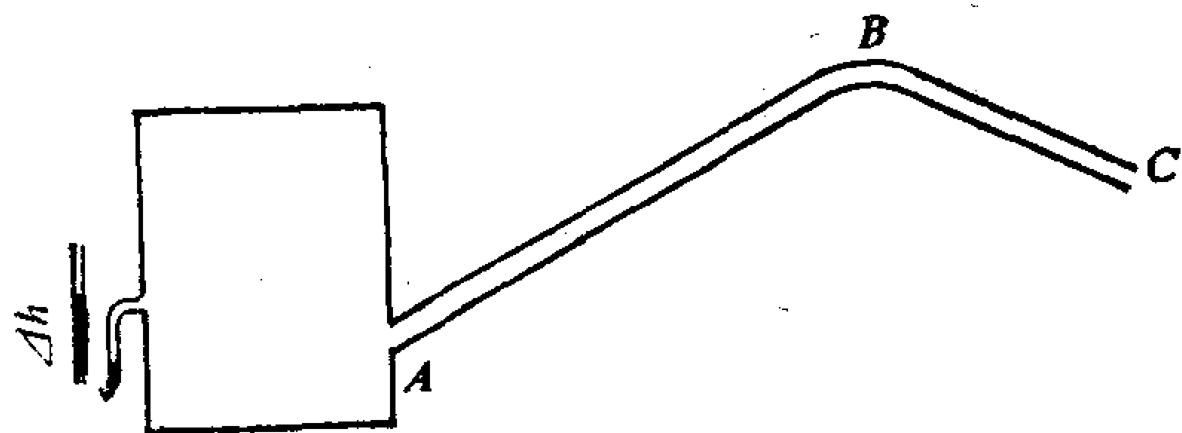
题 8-11图



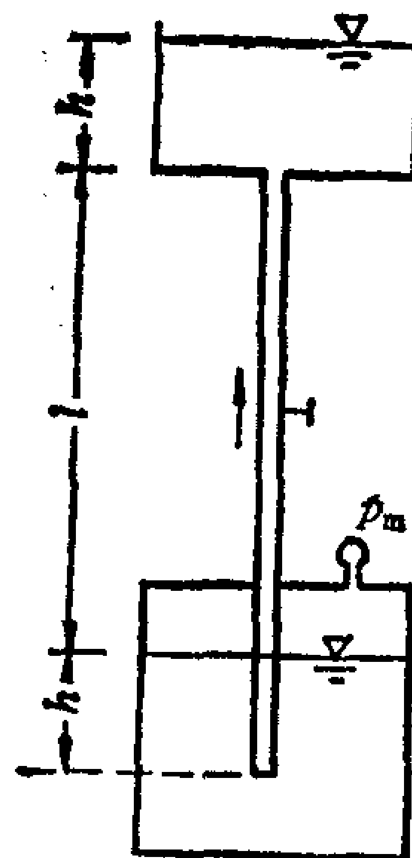
题 8-12图

8-13　储气箱中的煤气经管道ABC流入大气中，已知$\Delta h=10\text{mmH}_2\text{O}$，断面标高$z_A=0$、$z_B=10\text{m}$、$z_C=5\text{m}$，管道直径$d=100\text{mm}$，长度$l_{AB}=20\text{m}$、$l_{BC}=10\text{m}$沿程阻力系数$\lambda=0.03$，局部阻力系数：进口$\zeta_e=0.6$、转弯$\zeta_t=0.4$，煤气密度$\rho=0.6\text{kg/m}^3$，空气密度$\rho_a=1.2\text{kg/m}^3$，试求流量并绘总压线、势压线和位压线。

8-14　水从密闭水箱沿垂直管道送入高位水池中，已知管道直径$d=25\text{mm}$，管长$l=3\text{m}$，水深$h=0.5\text{m}$，流量$Q=1.5\text{L/s}$，沿程阻力系数$\lambda=0.033$，阀门的局部阻力系数$\zeta_v=9.3$，试求密闭容器上压力表读值p_m，并绘总水头线和测压管水头线。



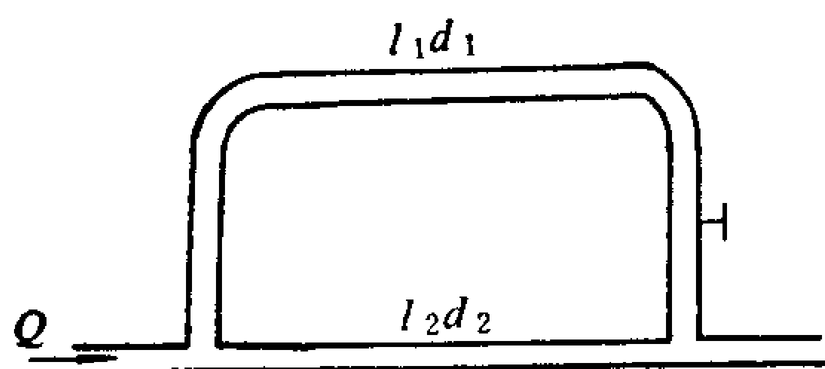
题 8-13图



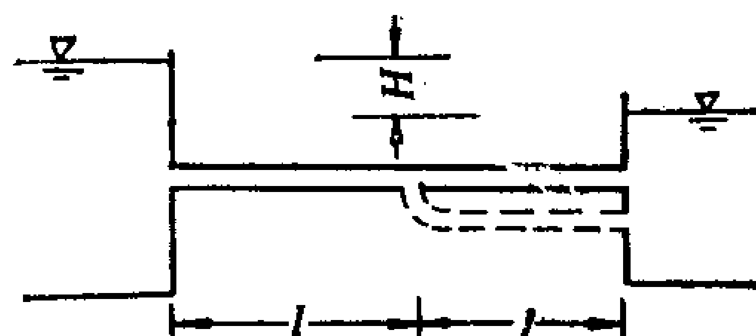
题 8-14图

8-15　并联管道，总流量$Q=25\text{L/s}$，其中一根管长$l_1=50\text{m}$、直径$d_1=100\text{mm}$，沿程阻力系数$\lambda_1=0.03$，阀门的局部阻力系数$\zeta=3$；另一根管长$l_2=30\text{m}$，直径$d_2=50\text{mm}$，沿程阻力系数$\lambda_2=0.04$，试求各管段的流量及并联管道的水头损失。

8-16　在长为$2l$，直径为d的管道上，并联一根直径相同，长为l的支管（题8-16图中虚线），若水头H不变，不计局部损失，试求并联支管前后的流量比。



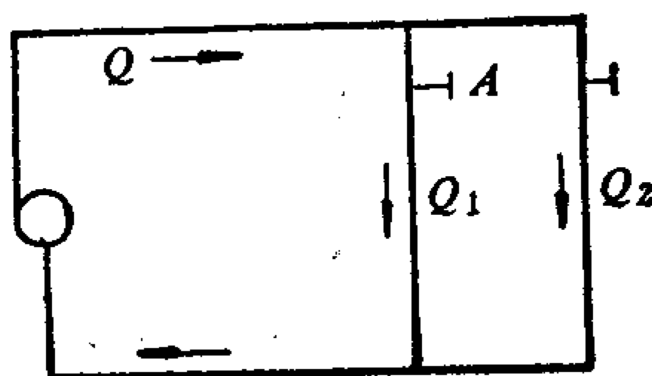
题 8-15图



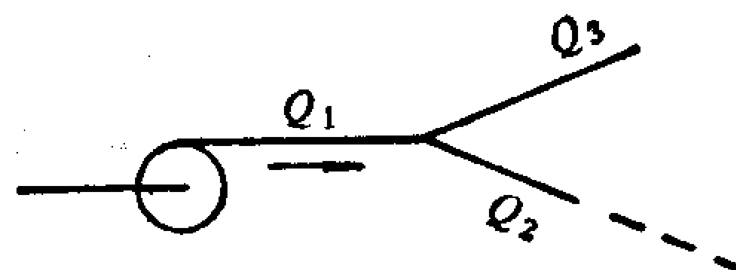
题 8-16图

8-17　有一泵循环管道，各支管阀门全开时，支管流量分别为Q_1、Q_2，若将阀门A开度关小，其它条件不变，试论证主管流量Q怎样变化，支管流量Q、Q_2怎样变化。

8-18　枝状送风管道，各段流量分别为Q_1、Q_2、Q_3，若在支管2末端接长，如图中虚线所示，试问Q_1、Q_2、Q_3有何变化？



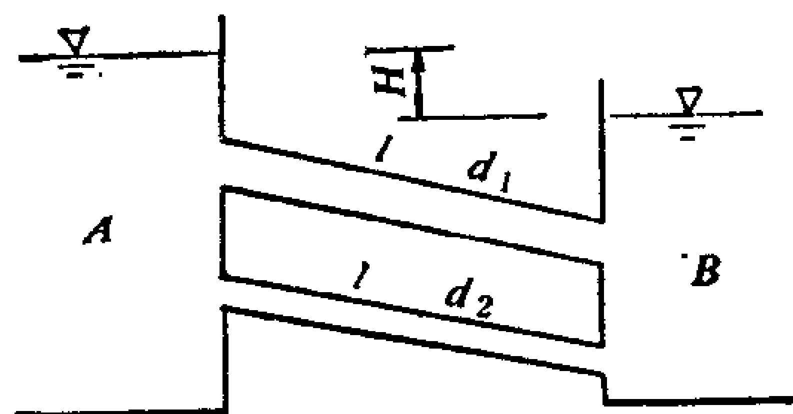
题 8-17图



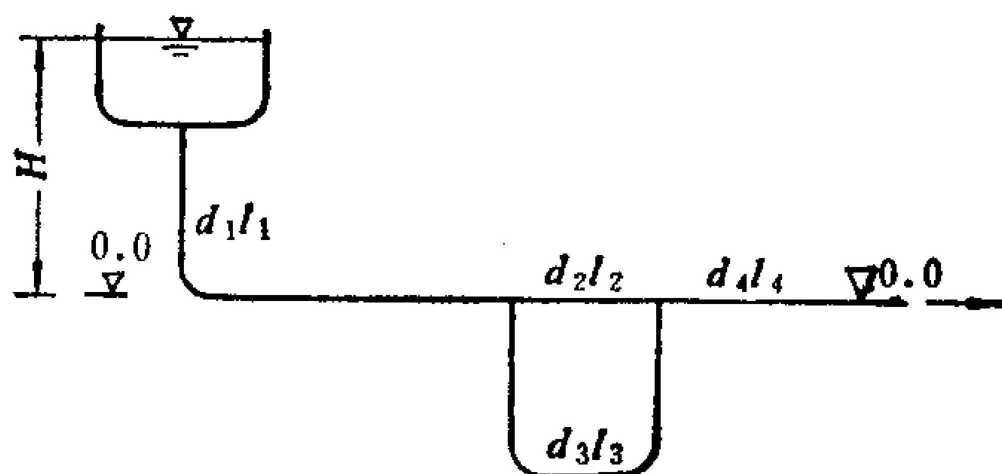
题 8-18图

8-19　应用长度同为l的两根管道，从水池A向水池B输水，其中粗管直径为细管直径为两倍$d_1=2d_2$，两管的沿程阻力系数相同，局部阻力不计。试求两管中流量比。

8-20　水塔经串并联管道供水，已知供水量$Q=0.1\text{m}^3/\text{s}$，各段直径$d_1=d_4=200\text{mm}$，$d_2=d_3=150\text{mm}$，各段管长$l_1=l_4=100\text{m}$，$l_2=50\text{m}$，$l_3=200\text{m}$，各段沿程阻力系数$\lambda=0.02$，局部阻力不计。试求并联管段的流量Q_2、Q_3及水塔水面高度H。



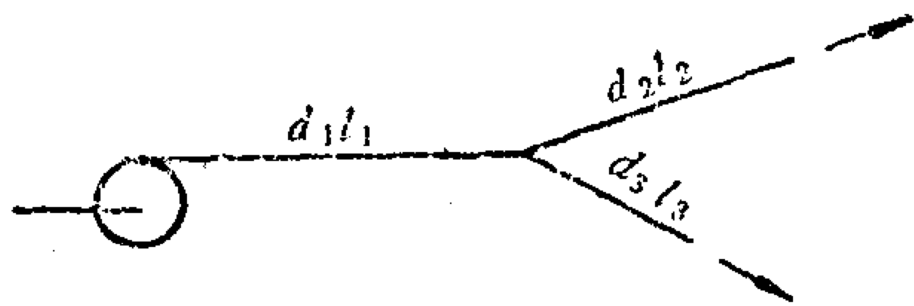
题 8-19图



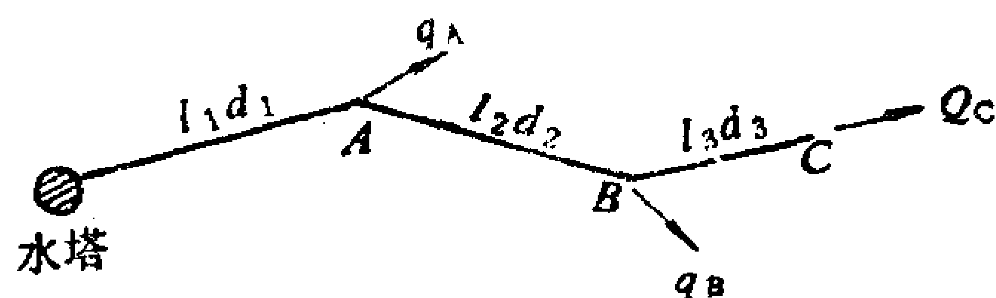
题 8-20图

8-21　通风机向水平风道系统送风，已知干管直径$d_1=300\text{mm}$，长度$l_1=30\text{m}$，末端接两支管，其一直径$d_2=150\text{mm}$，长度$l_2=20\text{m}$；另一支管是截面为$0.15\text{m}\times0.2\text{m}$的矩形管，长度$l_3=15\text{m}$，通风机送风量$Q=0.5\text{m}^3/\text{s}$，各管段沿程阻力系数均为$\lambda=0.04$，空气密度$\rho=1.29\text{kg/m}^3$，忽略局部阻力，试求通风机的风压。

8-22　工厂供水系统，由水泵向A、B、C三处供水，管道均为铸铁管，已知流量$Q_c=10\text{L/s}$，$q_B=$



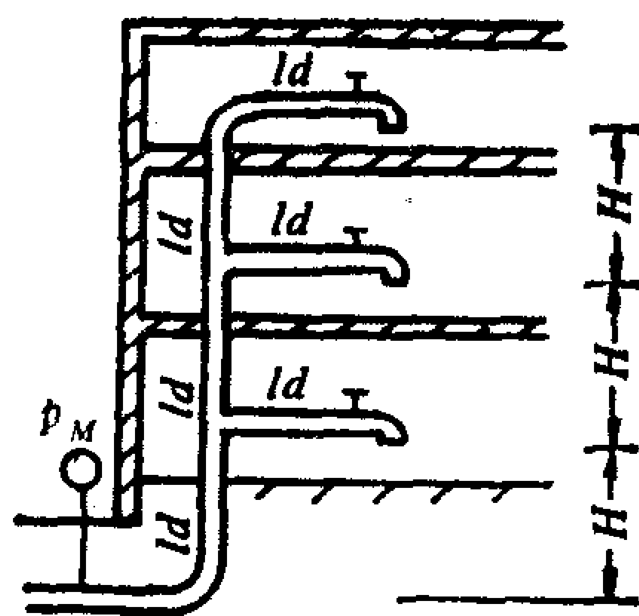
题 8-21图



题 8-22图

5L/s，$q_A = 10$L/s，各段管长$l_1 = 350$m，$l_2 = 450$m，$l_3 = 100$m，各段直径$d_1 = 200$mm，$d_2 = 150$mm，$d_3 = 100$mm，整个场地水平，试求水泵出口压强（用比摩阻计算表计算）。

8-23　三层楼的自来水管道，已知各楼层管长$l = 4$ m，直径$d = 60$mm，各层供水口高差$H = 3.5$ m，沿程阻力系数$\lambda = 0.03$，龙头全开时阻力系数$\zeta = 3$，不计其它局部阻力。试求当龙头全开时，供给每层用户的流量不少于3L/s，进户压强p_M应为多少？



题 8-23图

8-24　电厂引水钢管直径$d = 180$mm，壁厚$\delta = 10$mm，流速$v = 2$m/s，阀门前压强为10bar，试求当阀门突然关闭时，管壁中的应力比原来增加多少倍？

8-25　输水钢管直径$d = 100$mm，壁厚$\delta = 7$mm，流速$v = 1.2$m/s，试求阀门突然完全关闭时的水击压强，又如该管道改用铸铁管水击压强有何变化？

第九章　理想不可压缩流体平面无旋流动

在第五章我们用微元体分析法建立了微分形式的流体运动基本方程组——连续性方程和运动方程。对于不可压缩流体，这个方程组是封闭的，原则上可以求解。但是，其中的运动方程是非线性的，即使是不考虑粘性的理想流体，要求解这一组方程也很困难。不过对于质量力中只有重力的理想不可压缩流体无旋流动，运动方程可以简化为柯西-拉格朗日积分，于是这一方程组就由一个二阶线性偏微分方程和一个有限关系式组成，即

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{5-47}$$

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\text{常数} \tag{5-55}$$

我们只要根据边界条件和初始条件由（5-47）式求出速度势函数$\varphi(x,y,z,t)$，再代入（5-55）式中，即可求得压强$p(x,y,z,t)$。这就使问题大为简化。这一章我们就来讨论在平面流动条件下如何求解这一简化的方程组。主要是讨论如何根据边界条件求解恒定流动的拉普拉斯方程问题。

§9-1　平面流动及其流函数　流网

若流场中各点的速度都平行于某一固定平面，且各物理量在垂直于此平面的方向上没有变化，则这种流动称为平面流动。如取xoy平面与流动平行，则流速在z轴的分量为零，即$u_z=0$；各物理量在z轴方向没有变化，它们对z轴的偏导数为零，即$\frac{\partial}{\partial z}=0$。

在实际问题中，严格的平面流动是不存在的。但是，当流体绕过像烟囱、管道、低速机翼等细长柱体流动或水在宽阔的直渠道内流动时，除端部或岸边附近外，沿横向的速度分量很小，压强、密度等物理量沿横向的变化也很小，都可近似地认为是平面流动。

平面流动的速度矢量$\vec{u}$只有两个分量u_x和u_y，各物理量都只是x、y的函数，因此与空间流动比较，显然又做了进一步的简化。理想不可压缩流动平面流动虽然是一种做了相当大简化的流动模型，但研究这种流动仍有重要的理论意义和实用价值。这种流动的计算方法经过一定的修正后在工程中得到广泛的应用。通过对它的研究有助于加深对流动性质的了解。其处理问题的方法对解决更复杂的流动问题，也是重要的借鉴。

一、流函数及其性质

由不可压缩流体平面流动的连续性方程

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0\qquad\text{或}\qquad\frac{\partial u_x}{\partial x}=-\frac{\partial u_y}{\partial y} \tag{9-1}$$

可以引进一个重要的新函数——流函数ψ。

从数学分析得知，（9-1）式是$u_x dy-u_y dx$为某一函数$\psi(x,y,t)$的全微分的必要且

充分条件，即
$$d\psi = u_x dy - u_y dx \tag{9-2}$$
成立。函数$\psi(x,y,t)$即为流函数。当$t=t_0$时，
$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy$$
得流函数与流速的关系为
$$u_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad u_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{9-3}$$
在柱坐标系中，平面流动的连续性方程为
$$\frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} = -\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} \tag{9-4}$$
因此
$$d\psi = ru_r d\theta - u_\theta dr \tag{9-5}$$
$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \qquad u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \tag{9-6}$$
流函数仅由不可压缩流体平面流动的连续性微分方程引入，因此，不论流体是否理想，流动是否恒定、无旋，只要是不可压缩流体平面流动，都有流函数存在。

如将（9-3）式或（9-6）式代入连续性微分方程，即得
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0 \quad 或 \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta\partial r} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} = 0$$
这就是说，只要有流函数存在，就自然满足连续性方程。

流函数具有下列一些性质：

（1）流函数的等值线就是流线。

在流函数的等值线上$\psi=$常数，$d\psi=0$，由（9-2）式得
$$u_x dy - u_y dx = 0 \quad 或 \quad \frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$
这就是流线微分方程。所以给流函数以不同的常数，就可以得到一族流线。

（2）流经任意曲线AB的单位厚度流量等于此曲线两端点的流函数差值。

如图9-1所示，在AB线上沿A至B方向取一有向微元线段$\vec{dl}$，通过该微元线段的流量dQ为
$$dQ = u_n dl = \vec{u}\cdot\vec{n}\,dl = [u_x\cos(\widehat{n,x}) + u_y\cos(\widehat{n,y})]dl$$
$\vec{n}$为dl法线方向的单位矢量，由于

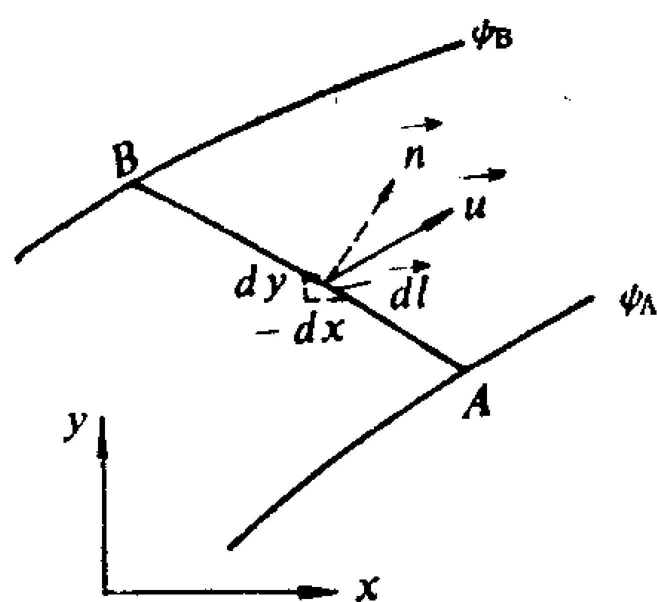


图 9-1　流函数沿曲线AB的线积分

$$\cos(\widehat{n,x}) = \frac{dy}{dl}, \qquad \cos(\widehat{n,y}) = -\frac{dx}{dl}$$
再将u_x、u_y用（9-3）式代入，
$$dQ = \left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{dx}{dl}\right] = d\psi$$
沿曲线AB积分
$$Q_{AB} = \int_A^B dQ = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A$$
这一性质也可表述为：通过任意两条流线间的单位厚度流量等于这两条流线的流函数

差值。

如 l 为封闭曲线，两端点的流函数值相等，因此在单连通域的平面流动中，通过任意封闭曲线的流量为零。

（3）在平面无旋流动中等势线与等流函数线（即流线）处处正交。

在流场中取两条流函数差值为$\delta\psi$的相邻流线和两条势函数差值为$\delta\varphi$的相邻等势线（见图9-2）。在A点分别做流线和等势线的切线AB、AC，其长为δs和δn。由（9-2）式可知，B点与A点的流函数差值应为

$$\delta\psi = u_x\delta s_y - u_y\delta s_x$$

当$\delta s\to 0$时，可认为B点与A点在同一流线上，因而$\delta\psi=0$。由此得

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\delta s_y}{\delta s_x} = \frac{u_y}{u_x}$$

类似可知，C点与A点的速度势差值为

$$\delta\varphi = u_x\delta n_x + u_y\delta n_y$$

当$\delta n\to 0$时，可认为C点与A点在同一等势线上，故$\delta\varphi=0$，可得

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\delta n_y}{\delta n_x} = -\frac{u_x}{u_y}$$

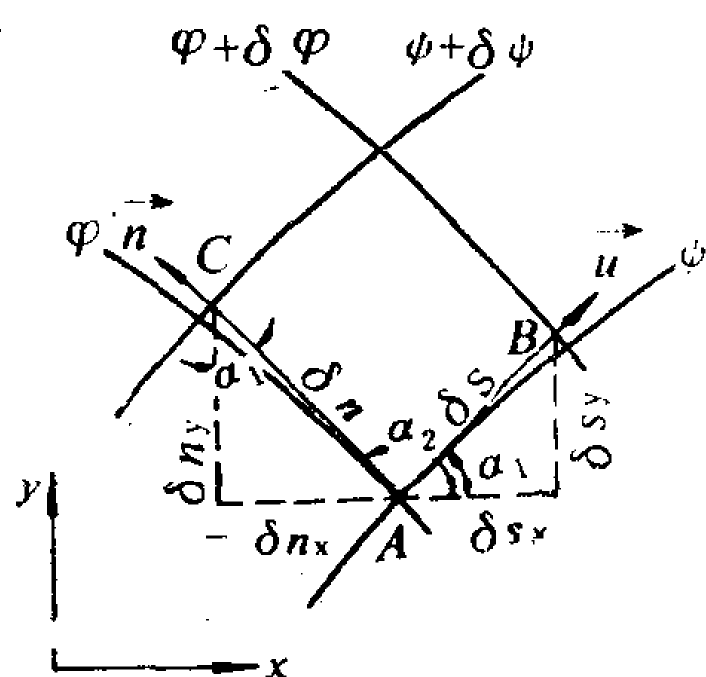


图 9-2 等势线与流线正交

将$\operatorname{tg}\alpha_1$与$\operatorname{tg}\alpha_2$相乘，得

$$(\operatorname{tg}\alpha_1)(\operatorname{tg}\alpha_2) = -1$$

这就证明了等势线与流线相互垂直，因此等势线也就是过流断面线。

（4）在图9-2所示的坐标系中，将速度矢量$\vec{u}$沿逆时针方向转90°即为流函数ψ的增值方向。

$\vec{u}$逆时针方向转90°为$\vec{n}$方向，现来分析$\vec{n}$方向上C点的流函数增量$\delta\psi$。

$$\delta\psi = u_x\delta n_y - u_y\delta n_x$$

而

$$\delta n_x = -\delta n\sin\alpha_1,\qquad \delta n_y = \delta n\cos\alpha_1$$

$$u_x = u\cos\alpha_1,\qquad u_y = u\sin\alpha_1$$

代入上式

$$\delta\psi = u\delta n(\sin^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_1) = u\delta n \tag{9-7}$$

在$\vec{n}$的正方向上$\delta n>0$，因此$\delta\psi>0$，这就证明了沿$\vec{n}$方向ψ是增值的。

（5）在平面无旋流动中，流函数也满足拉普拉斯方程，也是个调和函数。

在平面流动中，$u_z=0, \frac{\partial}{\partial z}=0$，因而

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) = 0$$

$$\omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) = 0$$

流体微团的旋转角速度矢量必然平行于z轴

$$|\vec{\omega}| = \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \tag{9-8}$$

如流动又是无旋的，ω_z也等于零。将上式中的u_x、u_y用（9-3）式代入，并令它等于零，得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0 \qquad (9\text{-}9)$$

可见平面无旋流动的流函数也满足拉普拉斯方程，它也是调和函数。

由（5-45）和（9-3）式可得，

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$$

满足这个关系的两个调和函数称为共轭调和函数。已知其中的一个就能求出另一个。

求得ψ后，就可得到流速的两个分量u_x和u_y，因此求解平面无旋流动的速度场，既可解方程$\nabla^2\varphi=0$，也可解方程$\nabla^2\psi=0$。这两个方程虽然形式相同，但求解时的边界条件不同。例如在不动的固体壁面上，速度势的条件是$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$，而流函数的条件是$\psi=$常数。可根据问题的具体情况，从解题简便的角度选定解哪个方程。

在柱坐标系中

$$\omega_z=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\theta}{r} \qquad (9\text{-}10)$$

如令$\omega_z=0$，并将式中的u_θ和u_r用（9-6）式代入，即得平面无旋流动中用柱坐标表示的流函数拉普拉斯方程。

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}=0 \qquad (9\text{-}11)$$

二、流网

平面无旋流动的流场中，各点在同一瞬时都有各自的ψ值和φ值，因此可以画出一族等势线和一族流线。这两族曲线构成一个正交的网格，叫做流网。网格的形状取决于相邻流线间的流函数差值$\delta\psi$及相邻等势线间的速度势函数差值$\delta\varphi$。（9-7）式已给出了$\delta\psi$与网格边长δn的关系。现在再来分析$\delta\varphi$与另一边长δs的关系。

在图9-2中，由A点至B点的速度势增量$\delta\varphi$为

$$\delta\varphi=\vec{u}\cdot\vec{ds}=u_x\delta s_x+u_y\delta s_y$$

而 $\delta s_x=\delta s\cos\alpha_1$，$\delta s_y=\delta s\sin\alpha_1$，因此

$$\delta\varphi=u\delta s(\cos^2\alpha_1+\sin^2\alpha_1)=u\delta s \qquad (9\text{-}12)$$

从（9-7）和（9-12）式可得

$$\frac{\delta\varphi}{\delta\psi}=\frac{\delta s}{\delta n}$$

这表明，绘制流网时若令相邻流线间的$\delta\psi$和相邻等势线之间的$\delta\varphi$各为固定的常数，则各网格的边长δs和δn之比不变。为了简便起见，绘制流网时常令$\delta\psi=\delta\varphi$，这样流网的每个网格都为曲线正方形。

绘制流网是求解恒定平面势流的一种近似的图解法。有了流网就可以近似地得出流场中各点的流速分布，从而也可以得出压强分布。

由于流网中每个正方形网格的$\delta\psi=\delta q=\delta\varphi=$常数，从（9-7）式或（9-12）式可知，任一网格中的流速为

$$u=\frac{\delta\psi}{\delta n}\quad 或\quad u=\frac{\delta\varphi}{\delta s}$$

且不同网格中的流速与其网格边长成反比，即

$$\frac{u_1}{u_2}=\frac{\delta n_2}{\delta n_1}=\frac{\delta s_2}{\delta s_1} \tag{9-13}$$

在流网中直接量出各处的δn或δs，从上式就可以得出各点流速的相对关系。如根据边界条件已知流场中某一点的流速，流场其它各点的流速就可由（9-13）式求得。

流场中的压强分布可由（5-55）式求得。在恒定流中$\frac{\partial \varphi}{\partial t}=0$，因此

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=gz_0+\frac{p_0}{\rho}+\frac{u_0^2}{2}$$

如从边界条件已知某“0”点的z_0、p_0和u_0，由上式即可求得流场中任一点的压强。

流网的画法是先用铅笔按一定的比例画出流场的边界（如图9-3中的$ABDC$）。再根据边界条件定出边界上的流线或等势线，如固体边界一定是流线（图中的AB、CD线），入流和出流的过流断面是等势线（图中的AC、BD线）。然后根据流动的趋势勾绘一系列流线，各相邻流线间的流量应相等。再绘垂直于流线的等势线，使之成正交的方形网格。流线和等势线都应该是光滑的曲线，不能有突然转折。流网初绘成后进行检查，凡不符合流网特性的地方要做修改，直至满意为止。流网的网格越密，得出的结果越精确。检查网格是否为正方形，可绘出各网格的对角线。如每个网格的对角线正交并相等，且对角线也形成正方形，则网格是正确的。否则，就需修改。

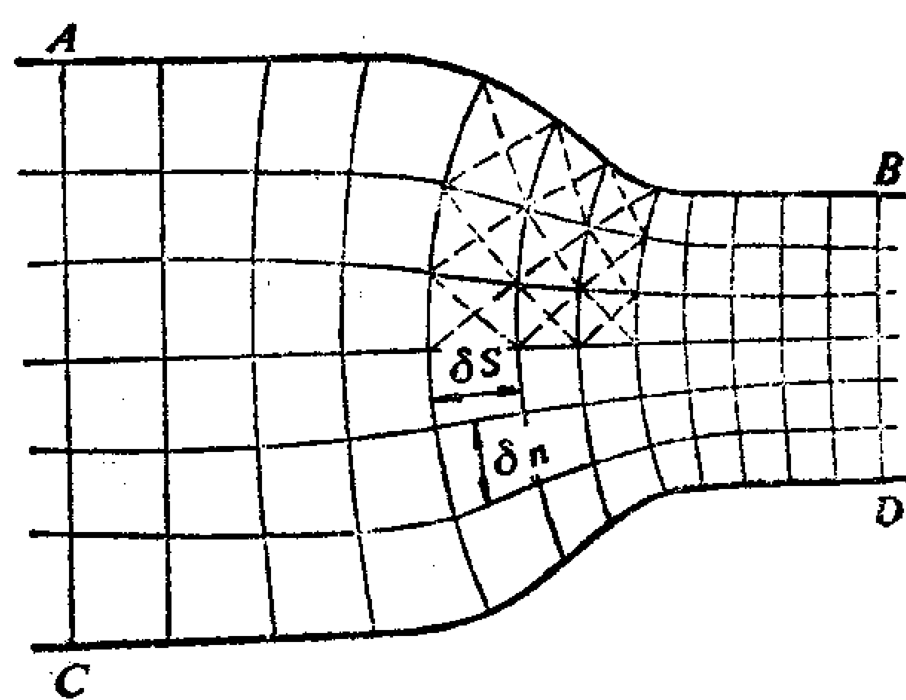


图 9-3 流网

还应指出，在边界突变的局部地方会出现三角形或五角形的网格，这是由于网格不是无穷小造成的，这不会影响整个流网的精度。

徒手绘制流网的方法看起来似乎很麻烦，但取得一定经验后并不困难。这种方法简单易行，精度一般也能达到工程上的要求，所以工程上是时常应用的。

§ 9-2 几种基本的平面势流

从这一节开始，我们介绍平面无旋流动的另一种解法——**势流叠加法**。任何一个平面无旋流动都存在着相应的速度势函数和流函数。反之，任何一对共轭调和函数也都对应于一个平面无旋流动。如已知两个平面无旋流动的速度势φ_1、φ_2和流函数ψ_1、ψ_2，现分别把速度势和流函数各自相加，即

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2,\quad \psi=\psi_1+\psi_2$$

因
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi_2}{\partial y^2}=0$$

所以它们的和φ及ψ也都满足拉普拉斯方程，也是互为共轭的一对调和函数，因而是另一平面无旋流动的速度势和流函数。

由于

$$\left.\begin{aligned}u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=u_{1x}+u_{2x}\\u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}=u_{1y}+u_{2y}\end{aligned}\right\}\tag{9-14}$$

或

$$\left.\begin{aligned}u_x=\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\psi_2}{\partial y}=u_{1x}+u_{2x}\\u_y=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}-\frac{\partial\psi_2}{\partial x}=u_{1y}+u_{2y}\end{aligned}\right\}\tag{9-14'}$$

因此叠加后的速度势和流函数所对应的速度场就是原来两个平面无旋流动速度场的矢量和。

利用平面势流的这种可叠加性，我们先求出几种简单的基本流动的速度势和流函数，然后把它们以不同的方式叠加起来，从而可以得到一些稍复杂的并有实际意义的平面势流的解。不难看出，势流叠加原理可以推广到两个以上流动的叠加。

做为基本流动的流场中，一般都存在速度为无穷大的奇点，因此势流叠加法也称奇点法。

下面介绍几种基本的平面势流。

一、等速均匀流

流场中各点的流速矢量皆互相平行，且大小相等，这种流动称为等速均匀流。

令x轴与各点的流速u_0方向一致，则

$$u_x=u_0,\quad u_y=0$$

将此速度分量代入（9-8）式中，得$\omega_z=0$，故知此流动为平面无旋流动。

求速度势函数：

$$d\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=u_xdx+u_ydy=u_0dx$$

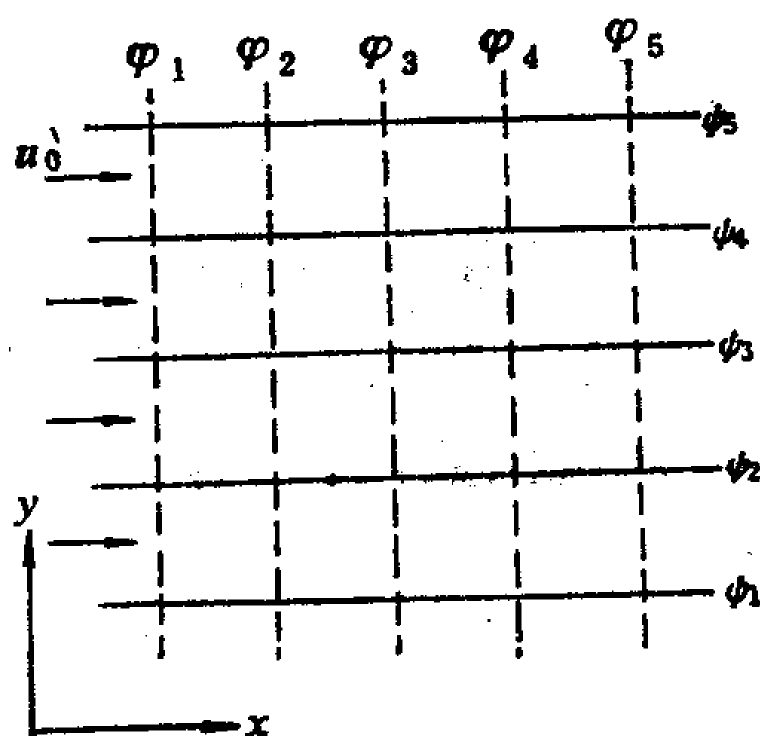


图 9-4　等速均匀流

积分得

$$\varphi=u_0x+C_1$$

令φ为不同常数，可得一族等势线φ_1、φ_2……，显然这是一组平行于y轴的直线。见图9-4。

求流函数：

$$d\psi=u_xdy-u_ydx=u_0dy$$

积分得

$$\psi=u_0y+C_2$$

流线是一组平行于x轴的直线。

速度势和流函数中的常数项C_1、C_2一般不影响流动，为简便起见，可令其为零，这意味着通过坐标原点的等势线和流线的φ值和ψ值为零。在以后分析其它流动时，也都令φ和ψ中的常数项为零。因此，等速均匀流的速度势函数和流函数为

$$\varphi=u_0x\tag{9-15}$$

$$\psi=u_0y\tag{9-16}$$

二、源流和汇流

流体从平面的一点流出，均匀地向四周做径向直线运动，这样的流动称为源流。在源流的分析中采用柱坐标系比较方便（见图9-5）。若将坐标原点放在源点O处，设由源点流出的单位厚度流量为Q，也称为源流强度，则在以O点为圆心，r为半径的圆周上，切向速度为零，径向速度在圆周上分布均匀，故其速度场为

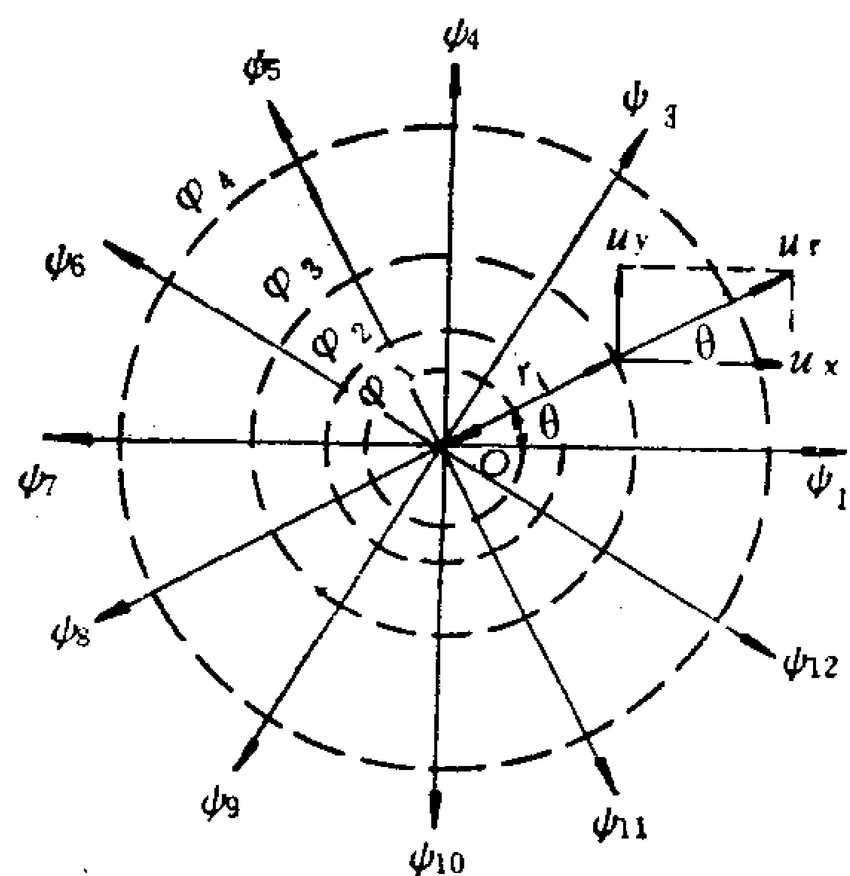


图 9-5 源流

$$u_\theta = 0, \qquad u_r = \frac{Q}{2\pi r}$$

若用 $$u_x = u_r\cos\theta = \frac{Q}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r} = \frac{Q}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$u_y = u_r\sin\theta = \frac{Q}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r} = \frac{Q}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2}$$

代入（9-8）式，得

$$\omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q}{2\pi}\left[-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} + \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2}\right] = 0$$

这表明源流是平面势流。

求速度势函数：由前已知

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial Q}$$

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}dr + \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}d\theta = u_r dr + ru_\theta d\theta = \frac{Q}{2\pi}\frac{dr}{r}$$

积分得

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r \tag{9-17}$$

等势线是一组以o点为圆心的同心圆。

求流函数：

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}dr + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}d\theta = -u_\theta dr + ru_r d\theta = \frac{\theta}{2\pi}d\theta$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta \tag{9-18}$$

流线是一组由源点引出的径向直线。

若流体均匀地从四周沿径向流入一点，这种流动称为汇流。汇流的流线也是一组由原点引出的径向直线，只是流速方向与源流相反。汇流的等势线也是一组同心圆（见图9-6）。汇流的速度势和流函数的表达式与源流相似，只是符号相反，即

$$\varphi = -\frac{Q}{2\pi}\ln r \tag{9-19}$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\theta \tag{9-20}$$

源流（或汇流）在源点（或汇点）处的流速为无穷大，这当然是不能实现的，这样的点称为奇点。但如将源点附近的区域除外，则理想流体从一小孔流入间距很小的平行平板间的流动，就近似于源流。

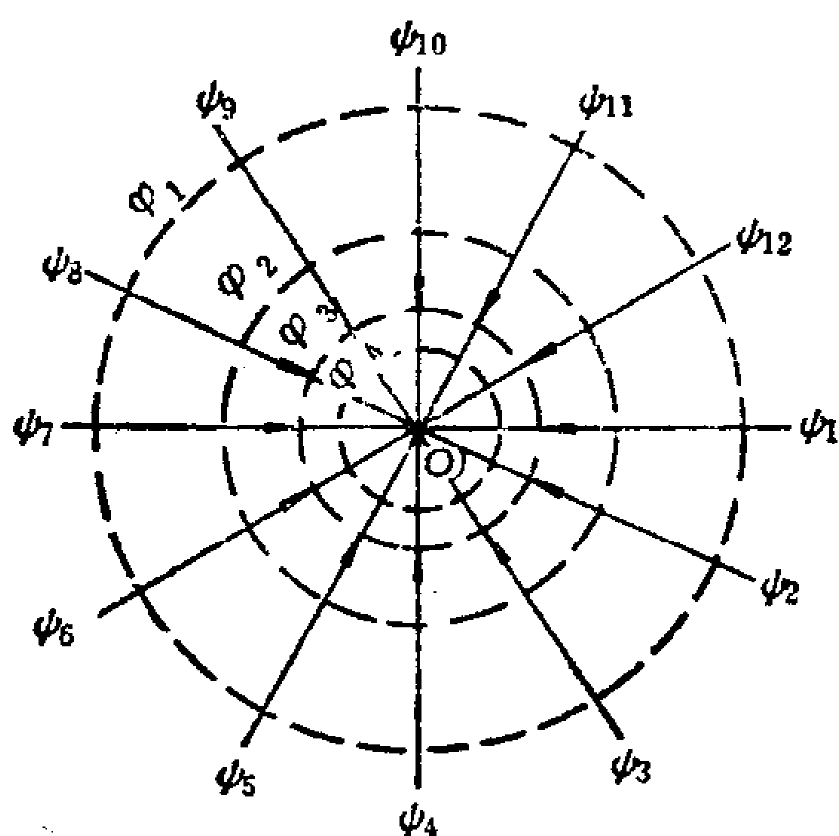


图 9-6 汇流

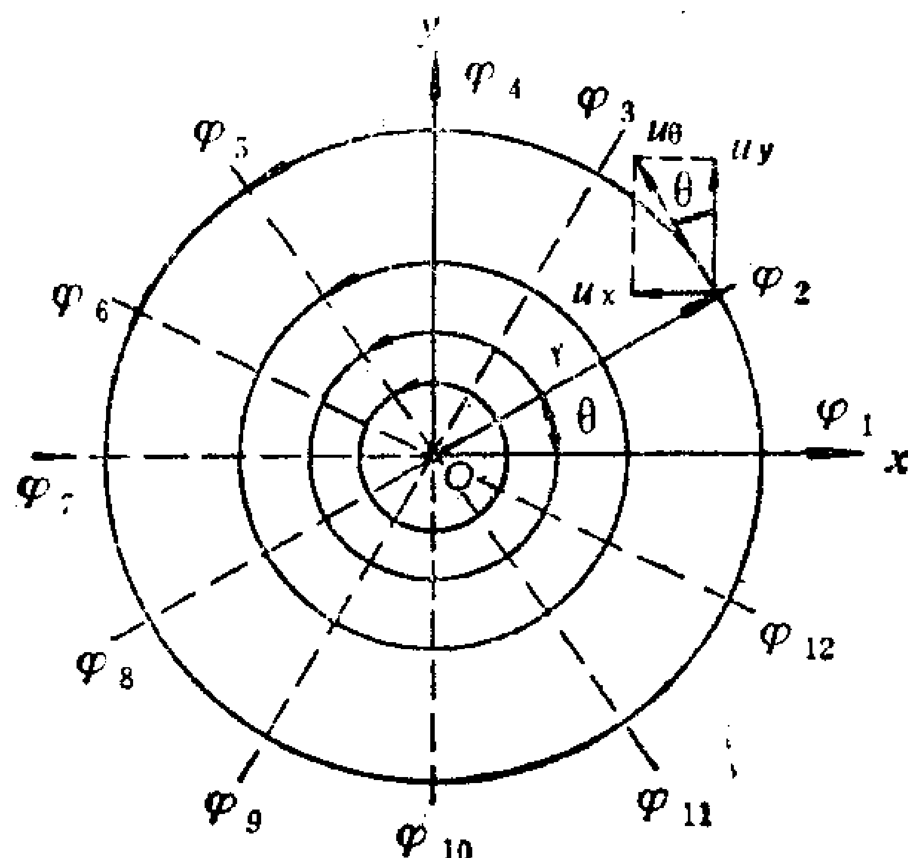


图 9-7 势涡流

三、势涡流

流体皆环绕某一点作匀速圆周运动，且速度与圆周半径成反比，这样的流动称为**势涡流**（见图9-7）。若把坐标原点置放在势涡中心点上，则在柱坐标系中势涡流的速度为：

$$u_r = 0\ ,\ \ u_\theta = \frac{b}{r}$$

其中b为常数。

在§5-5中我们已经了解，除势涡中心点外，在流场其它各点流动都是无旋的。

如沿某一半径为r的圆周求速度环量Γ

$$\Gamma = 2\pi r u_\theta = 2\pi b$$

因而势涡流的速度表达式也可写成

$$u_r = 0,\ \ u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{9-21}$$

Γ是个不随圆周半径而变的常数，也称为**势涡强度**。当环量为逆时针方向时，$\Gamma>0$；环量为顺时针方向时，$\Gamma<0$。

求速度势函数：

$$d\varphi = u_r dr + r u_\theta d\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} d\theta$$

$$\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta \tag{9-22}$$

求流函数：

$$d\psi = -u_\theta dr + r u_r d_\theta = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{dr}{r}$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{9-23}$$

势涡流的等势线是一组由原点引出的径向直线，流线是一组同心圆。

四、直角内的流动

上面介绍的几个基本流动是先给出速度场，求速度势函数和流函数。下面介绍的流动将是给出速度势函数或流函数，然后分析它所代表的流动情况。

设平面流动的速度势函数为

$$\varphi = a(x^2 - y^2) \tag{9-24}$$

现求它的流函数，并讨论它所代表的流动。

求速度：

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2ax \\ u_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay \end{aligned}\right\} \tag{9-25}$$

将此速度分量代入（9-8）式中，得$\omega_z = 0$，说明给出的函数满足作为速度势函数的条件。

求流函数：因

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_x = 2ax$$

积分得

$$\psi = \int 2ax\,dy + C(x) = 2axy + C(x)$$

由于 $\quad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = -\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = u_y = -2ay - C'(x)$

由（9-24）式又得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2ay$$

比较上两式可知$C'(x) = 0$，$C(x) =$常数。因此流函数为

$$\psi = 2axy \tag{9-26}$$

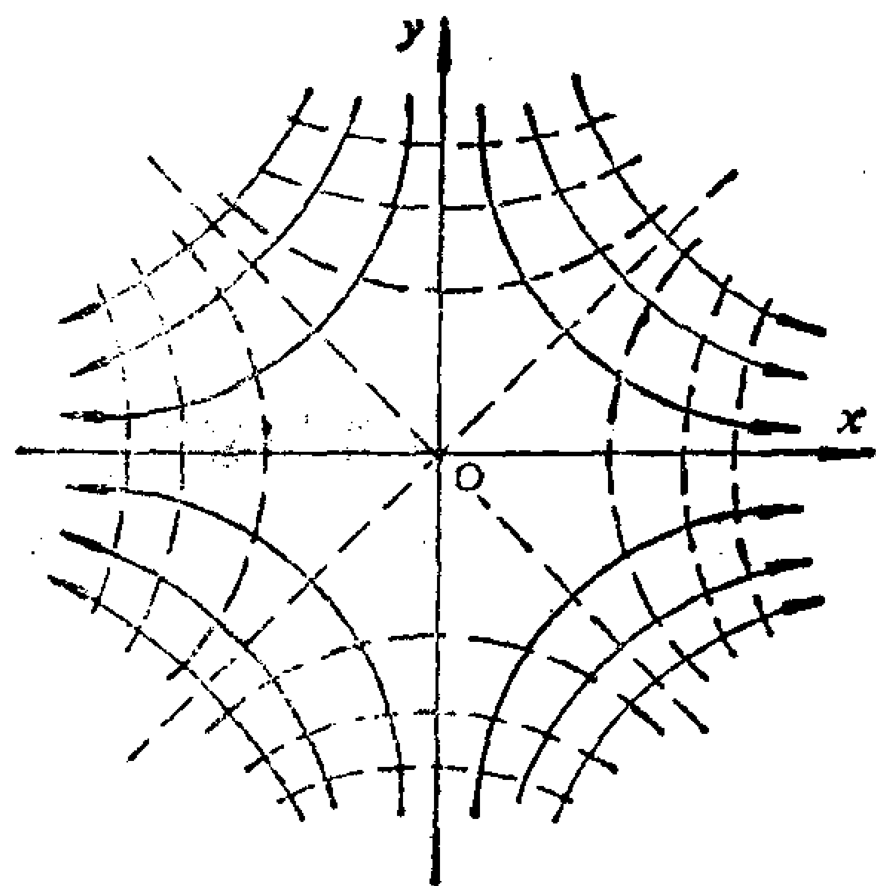


图 9-8 直流内的流动

分析流线和等势线：

由（9-26）式可知，流线方程为

$$xy = C_1$$

这是以两个坐标轴为渐近线的双曲线族，见图9-8中的实线。当$C_1 > 0$时，流线在第Ⅰ，第Ⅲ象限；$C_1 < 0$时，流线在第Ⅱ、第Ⅳ象限；$C_1 = 0$时，流线与坐标轴重合。流动方向可由流速表达式（9-25）作出判断。例如，在第Ⅰ象限x、y皆为正值，因而$u_x > 0$，$u_y < 0$，可知流动流向x轴正方向。

等势线方程为

$$x^2 - y^2 = C_2$$

它是以坐标轴的等分角线为渐近线的一族双曲线（图9-8中的虚线）。

若将$\psi = 0$的流线，即图中x、y的正轴，换成固体壁面，因理想流体沿固体壁面可以自由移动，不产生内摩擦力，因而不影响原来的流动。故（9-24）式和（9-26）式也就分别是直角内流动的速度势函数和流函数。

将$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$代入（9-24）式和（9-26）式，即得用柱坐标表示的速度势函数和流函数。

$$\varphi = a(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta) = ar^2\cos 2\theta \tag{9-27}$$

$$\psi = 2ar^2\sin\theta\cos\theta = ar^2\sin 2\theta \tag{9-28}$$

可以把它推广到边界为任意转角α的流动情况，其速度势函数和流函数为

$$\varphi = ar^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi\theta}{\alpha} \tag{9-29}$$

$$\psi = ar^{\frac{\pi}{\alpha}} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha} \tag{9-30}$$

其流动图形如图9-9所示。

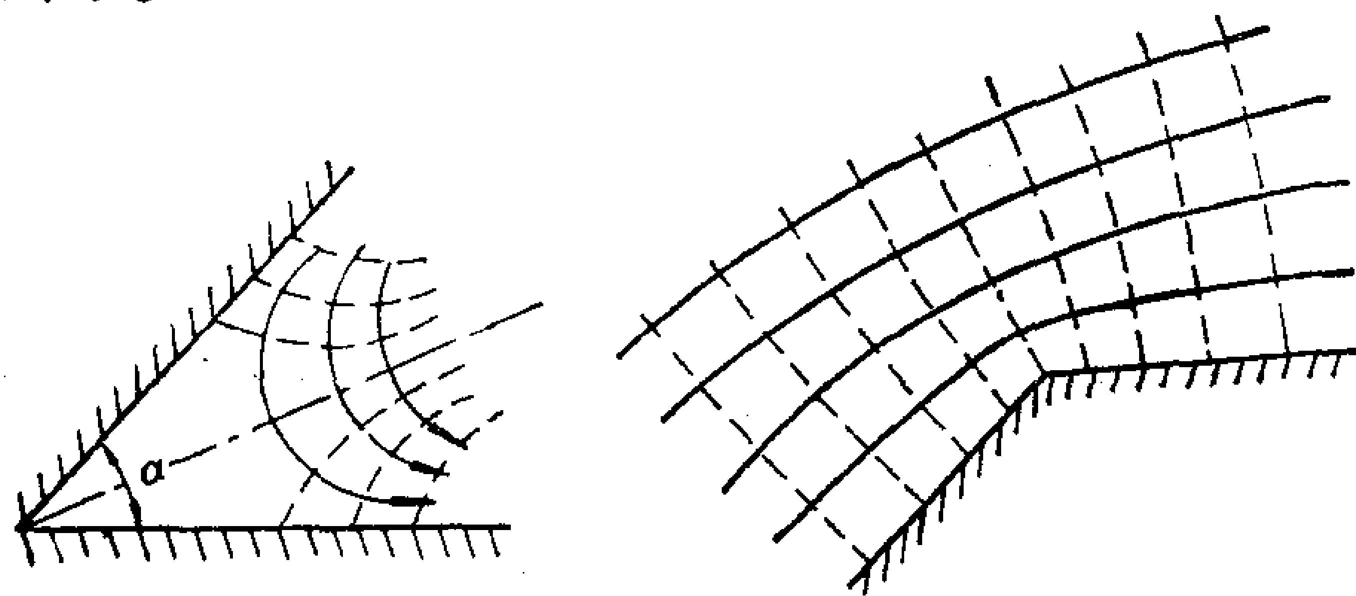


图 9-9　绕锐角和钝角的流动

§ 9-3　势 流 叠 加 举 例

一、等速均匀流与源流的叠加

如将与 x 轴正方向一致的等速均匀流和位于坐标原点的源流叠加，可得速度势函数和流函数为

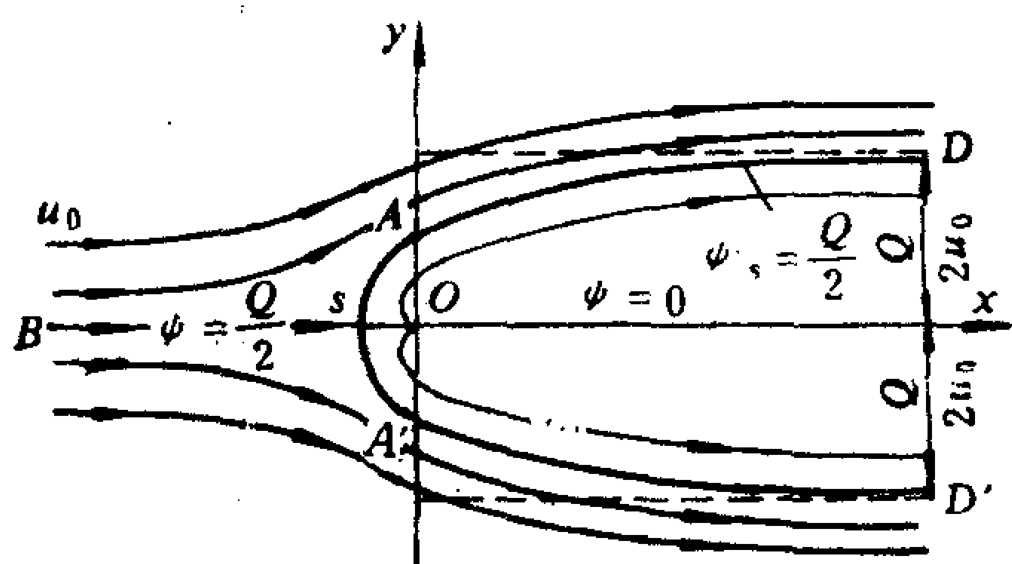


图 9-10　等速均匀流与源流叠加

$$\varphi = u_0 x + \frac{Q}{2\pi}\ln r$$

$$\psi = u_0 y + \frac{Q}{2\pi}\theta$$

现分析它所代表的流动。

求速度：因 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = u_0 + \frac{Q}{2\pi}\,\frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{y}{x^2 + y^2}$$

求驻点位置：设 s 为驻点，因驻点处 $u_{ys} = 0$，故

$$\frac{Q}{2\pi}\,\frac{y_s}{x_s^2 + y_s^2} = 0 \qquad y_s = 0$$

又因 $u_{xs} = 0$

$$u_0 + \frac{Q}{2\pi}\,\frac{x_s}{x_s^2 + y_s^2} = 0$$

将 $y_s = 0$ 代入，得

$$x_s = -\frac{Q}{2\pi u_0}$$

通过驻点的流线方程：流线方程为

$$\psi = u_0 y + \frac{Q}{2\pi}\theta = \psi_s$$

将驻点坐标 $y_s = 0$，$\theta_s = \pi$ 代入，可得通过驻点流线的流函数值为 $\psi_s = \frac{Q}{2}$，故方程为

$$u_0 y + \frac{Q}{2\pi}\theta = \frac{Q}{2}$$

由此式可知，当$x \to \infty$时，$\theta \to 0$或2π，$y \to \pm\frac{Q}{2u_0}$，即过驻点的流线在$x \to \infty$时以$y = \pm\frac{Q}{2u_0}$为渐近线。当$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$时，$y = \pm\frac{Q}{4u_0}$，即为图9-10中的$A$和$A'$点。当$\theta = \pi$时，$y = 0$，即为图中的$Bs$线。

因此，通过驻点的流线是一条这样的曲线：在s点左侧为Bs线，在s点右侧分为两支，一支为sAD，另一支为$sA'D'$。如将流线$DAsA'D'$用固体壁面代替，不会影响边界外部的流动，故叠加后的φ和ψ也就是等速均匀来流绕平面半无限长流线型钝头柱体流动的解。

二、源流和势涡流的叠加

如将强度为Q的源流与强度为Γ的势涡流都放置在坐标原点上，则叠加后的速度势函数和流函数为

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}(Q\ln r + \Gamma\theta)$$

$$\psi = \frac{1}{2\pi}(Q\theta - \Gamma\ln r)$$

求速度：

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

因源流的$u_\theta = 0$，势涡流的$u_r = 0$，所以叠加后的源涡流，其u_r与源流相同，u_θ与势涡流相同。

分析流线和等势线：令φ = 常数

$$Q\ln r + \Gamma\theta = c_1 \quad 或 \quad r = c_1'\exp -\frac{\Gamma}{Q}\theta$$

令ψ = 常数

$$Q\theta - \Gamma\ln r = c_2 \quad 或 \quad r = c_2'\exp\frac{Q}{\Gamma}\theta$$

流线和等势线都是对数螺旋线。它们相互成正交。水泵蜗壳内的流动就近似于这种流动。

三、等强度源流和汇流的叠加　偶极流

设有强度皆为Q的源流和汇流，源点和汇点分别位于$(-a, o)$和(a, o)两点上。今将两者的速度势函数和流函数各自叠加，得

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r_1 - \frac{Q}{2\pi}\ln r_2 = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2} \tag{9-31}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta_1 - \frac{Q}{2\pi}\theta_2 = \frac{Q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \tag{9-32}$$

分析流线和等势线：令ψ = 常数，可得流线方程

$$\theta_1 - \theta_2 = C_1$$

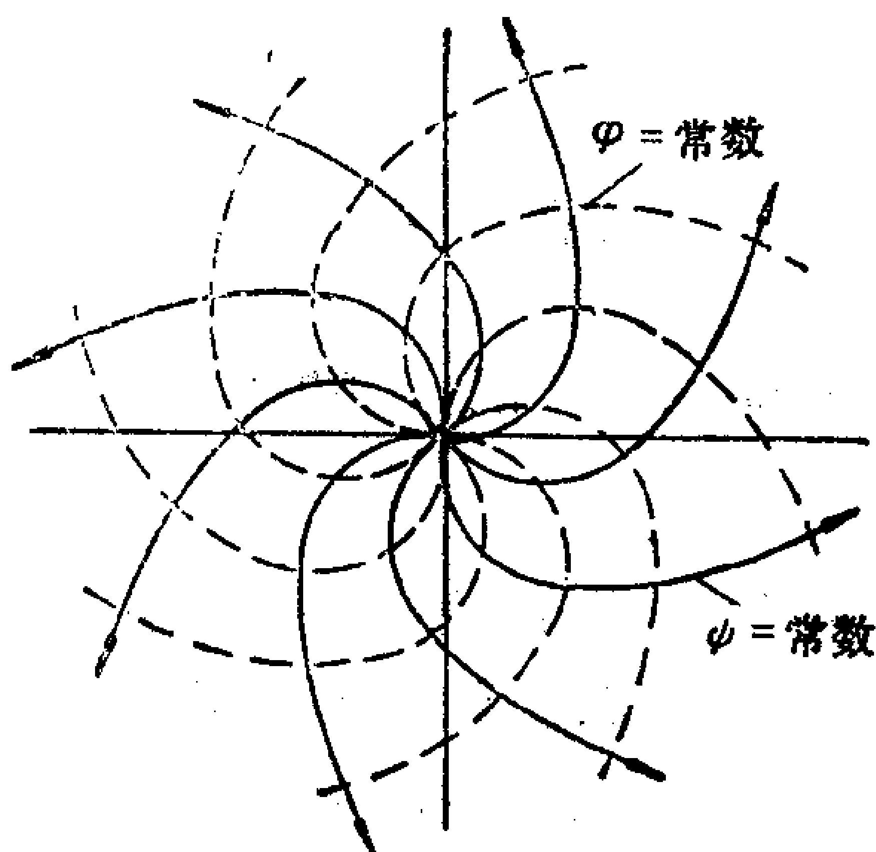


图 9-11　源流与势涡流叠加

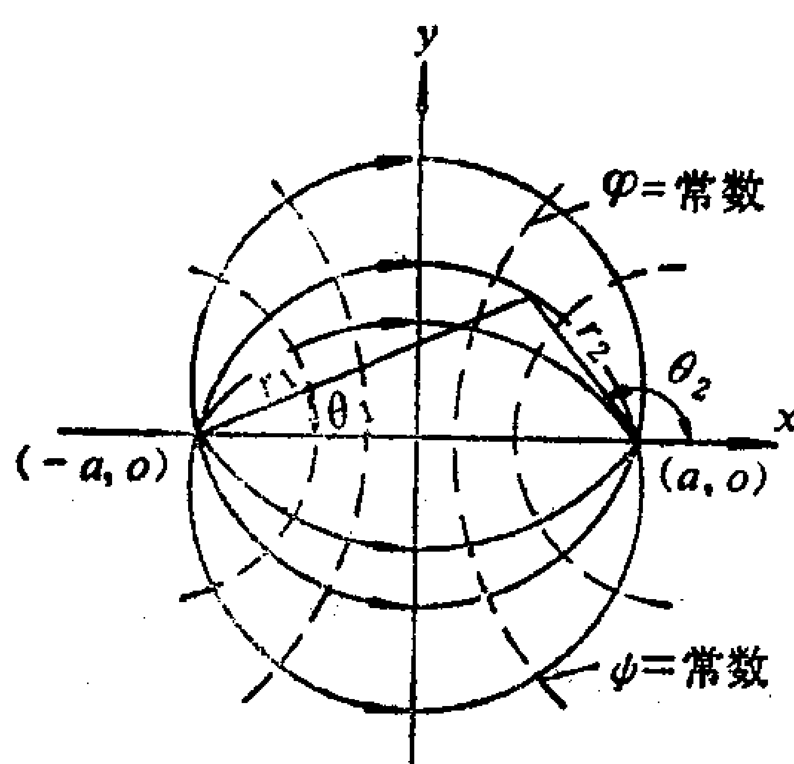


图 9-12　源流与汇流叠加

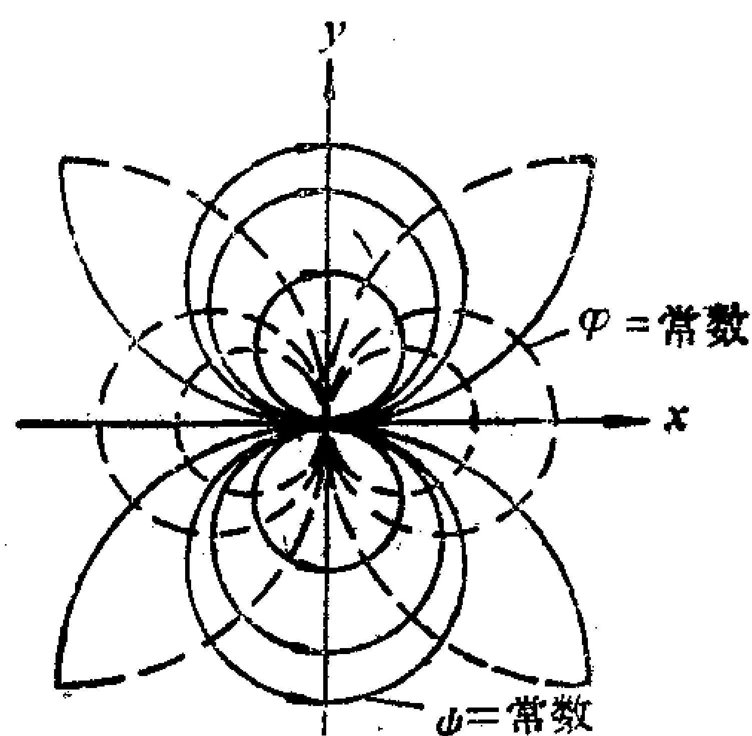


图 9-13　偶极流

由平面几何可知，这是一组圆心位于 y 轴的共弦圆（图9-12中的实线）。

令φ＝常数，可得等势线方程

$$\frac{r_1}{r_2}=C_2$$

因$r_1^2=(x+a)^2+y^2$，$r_2^2=(x-a)^2+y^2$，代入上式，化简后为

$$x^2+y^2-\frac{2a(C_2^2+1)}{C_2^2-1}x+a^2=0$$

这是一组圆心位于 x 轴的圆(图中的虚线)，圆心坐标为$x_0=\frac{a(C_2^2-1)}{C_2^2-1}$，$y_0=0$。圆的半径为$R=\frac{2aC_2}{C_2^2-1}$。

求偶极流的势函数：在上述流动中如源点和汇点无限趋近，即$2a\to 0$，得到的就是偶极流。因此偶极流的速度势函数为

$$\varphi=\lim_{a\to 0}\left[\frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{\frac{(x+a)^2+y^2}{(x-a)^2+y^2}}\right]=\lim_{a\to 0}\left\{\frac{Q}{4\pi}\ln\left[1+\frac{4ax}{(x-a)^2+y^2}\right]\right\}$$

如将$a=0$直接代入上式，则$\varphi=0$。这是因为如将位于同一点的等强度源流和汇流简单叠加，由源点流出的流体立刻流入汇点，该点以外不会出现流动。为此需要附加一个条件，即认为随着a的不断减小，源和汇的强度不断增大，使$2aQ$保持常数。令$m=2aQ$，m称为偶极矩，它实际上用来表示偶极流的强度。m是个矢量，它的方向是由源点指向汇点。

设$\alpha=\frac{4ax}{(x-a)^2+y^2}$，则$\ln\left[1+\frac{4ax}{(x-a)^2+y^2}\right]=\ln[1+\alpha]$将上式用级数展开

$\ln[1+\alpha]=\alpha-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{\alpha^3}{3}-\frac{\alpha^4}{4}+\cdots\cdots$当$\alpha\to 0$时，级数中的高次项为高阶微小量，可略去。故

$$\varphi=\lim_{a\to 0}\frac{Q}{4\pi}\frac{4ax}{(x-a)^2+y^2}$$

将$m=2aQ$代入，即得偶极流的速度势函数为

$$\varphi=\frac{m}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{m}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r}\qquad(9\text{-}33)$$

求偶极流的流函数：由前已知，距离为$2a$的等强度源流和汇流叠加后的流函数为

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

由于$\tan\theta_1 = \frac{y}{x+a}$， $\tan\theta_2 = \frac{y}{x-a}$，根据三角函数关系

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} = \frac{\frac{y}{x+a} - \frac{y}{x-a}}{1+\frac{y}{x+a}\frac{y}{x-a}}$$

$$= \frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \arctan\frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2} = \arctan\beta \qquad (9\text{-}34)$$

式中$\beta = \frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}$。将$\arctan\beta$用级数展开

$$\arctan\beta = \beta - \frac{\beta^3}{3} + \frac{\beta^5}{5} - \cdots\cdots$$

当$a \to 0$时，高次项同样可以忽略，故

$$\psi = \lim_{a\to 0}\left[\frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}\right] = \lim_{a\to 0}\left[\frac{-2aQy}{2\pi(x^2+y^2-a^2)}\right]$$

将$m = 2aQ$代入，得

$$\psi = -\frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{m}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r} \qquad (9\text{-}35)$$

分析偶极流的流线和等势线：偶极流的流线方程为

$$\psi = -\frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = C_1$$

或

$$x^2+y^2+\frac{m}{2\pi C_1}y = 0$$

也可写成

$$x^2+\left(y+\frac{m}{4\pi C_1}\right)^2 = \left(\frac{m}{4\pi C_1}\right)^2$$

这是一组圆心在y轴上、半径为$\frac{m}{4\pi C_1}$的圆。圆心坐标为$\left(0，-\frac{m}{4\pi C_1}\right)$。由于圆心在$y$轴上的坐标与半径相等，所以这些圆都通过偶极点（即坐标原点）。

偶极流的等势线方程为

$$\varphi = \frac{m}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} = C_2$$

它可以改写成

$$\left(x-\frac{m}{4\pi C_2}\right)^2+y^2 = \left(\frac{m}{4\pi C_2}\right)^2$$

这表明等势线是一组圆心在x轴上、坐标为$\left(\frac{m}{4\pi C_2}，0\right)$、半径为$\frac{m}{4\pi C_2}$的圆。这些圆也都通过偶极点。图9-13给出了偶极流的流动图形。

偶极流的速度场：由（9-33）式或（9-35）式不难求得偶极流的流速分量。在迪卡尔坐标系中

$$u_x = \frac{m}{2\pi}\frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ u_y = -\frac{m}{2\pi}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \tag{9-36}$$

在柱坐标系中

$$u_r = -\frac{m}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r^2} \\ u_\theta = -\frac{m}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r^2} \tag{9-37}$$

偶极流本身并无实际意义，但它与某些基本流动叠加，就可得到有重大实际意义的流动的解，所以偶极流实际上也是势流叠加法的一个基本流动。

四、等速均匀流与等强度源流和汇流的叠加

若在本节"三"中的源汇流上再叠加一个与 x 轴方向一致的等速均匀流，则得到的速度势函数和流函数为

$$\varphi = u_0 x + \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

$$\psi = u_0 y + \frac{Q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2)$$

式中 $r_1 = \sqrt{(x+a)^2+y^2}$，$r_2 = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$

求速度：

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = u_0 + \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{x+a}{(x+a)^2+y^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2+y^2}\right]$$

$$u_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi}\left[\frac{y}{(x+a)^2+y^2} - \frac{y}{(x-a)^2+y^2}\right]$$

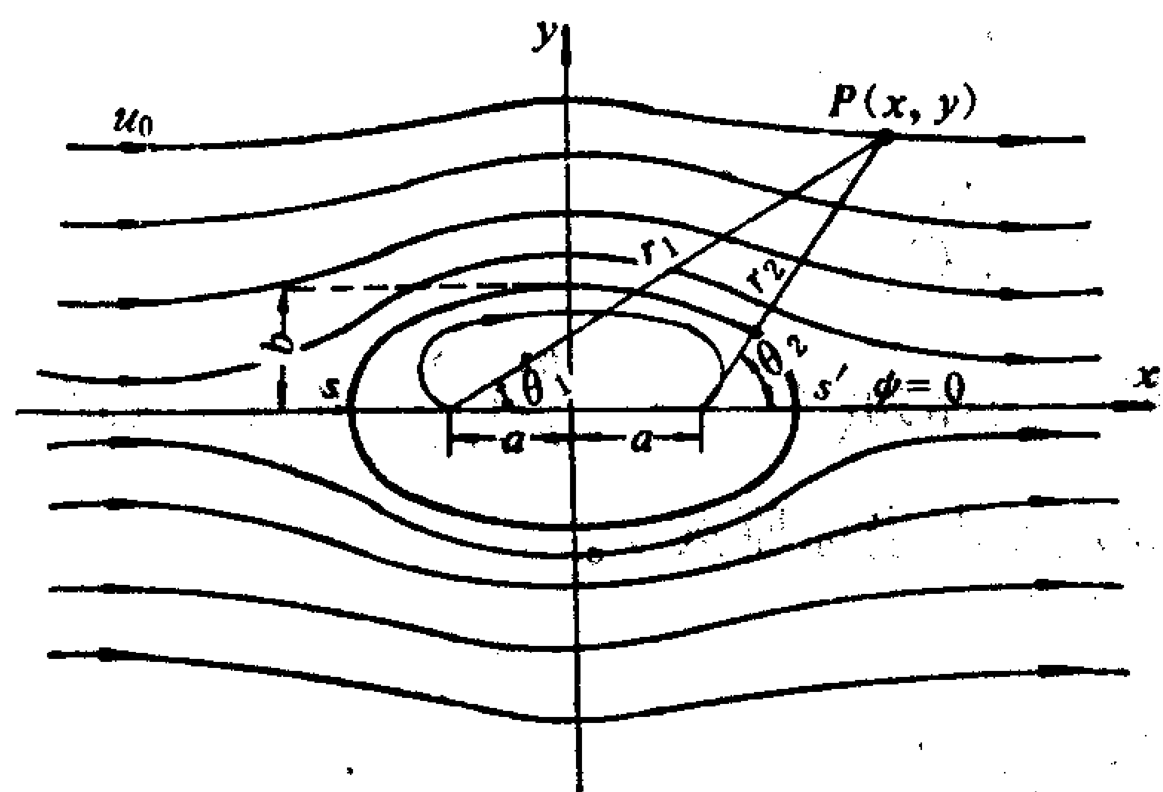


图 9-14 朗琴椭圆绕流

求驻点位置：

驻点处流速为零，因而 $u_{ys} = 0$，即

$$\frac{y_s}{(x_s+a)^2+y_s^2} - \frac{y_s}{(x_s-a^2)+y_s^2} = 0$$

此式化简后为

$$x_s y_s = 0$$

由流动情况可以直接看出，x_s不可能等于零，即驻点不可能在 y 轴上，故有

$$y_s = 0$$

因驻点处$u_{xs} = 0$，故

$$u_0 + \frac{\theta}{2\pi}\left[\frac{x_s+a}{(x_s+a)^2+y_s^2} - \frac{x_s-a}{(x_s-a)^2+y_s^2}\right] = 0$$

将$y_s = 0$代入，即得驻点 s 及s'在x轴的坐标

$$x_s = \pm a\sqrt{1+\frac{Q}{\pi a u_0}}$$

通过驻点的流线方程：将驻点坐标代入流函数中，得通过驻点的流线的流函数值$\psi_s = 0$，故通过驻点的流线方程为

$$u_0 y + \frac{Q}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

在讨论偶极流的流函数时已得到

$$\theta_1 - \theta_2 = \text{aratan}\frac{-2ay}{x^2+y^2-a^2}$$

故该流线方程也可写成

$$\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2} = \tan\frac{2\pi u_0}{Q}y$$

不难看出，$y=0$是这个方程的一个解，故x轴是$\psi=0$的流线。此外，还有通过前后两个驻点s和s'的椭圆也是$\psi=0$的流线。这个椭圆称为朗琴（Rankine）椭圆。它的长半轴为$l=x_s=a\sqrt{1+\frac{Q}{\pi a u_0}}$。它的短轴在$y$轴上，可将$x=0$，$y=b$代入$\psi=0$的流线方程，得

$$\frac{2ab}{b^2-a^2} = \tan\frac{2\pi u_0}{Q}b$$

用试算法即可由此方程中解得椭圆的短半轴b。应该注意，上式中的$\frac{2\pi u_0}{Q}b$为弧度。

若将椭圆流线用固体壁面代替，这里得到的就是等速均匀来流绕椭圆柱体的流函数和速度势函数。

【例 9-1】 将位于（1,O）和（−1, O）的强度皆为$6\pi\text{m}^2/\text{s}$的两个源流叠加，

1）用流速场直接叠加的图解法，求（O, O）、（O, 1）、（O, −2）、（1, 1）四点的流速矢量；

2）求速度势函数和流函数，给出流线族；

3）若将$x=0$的流线用无穷长的平板代替，已知无穷远处压强为p_0，如不计质量力，求流体在此平板上的压强分布；

4）y轴上流速的最大值是多少？它的位置在何处？

【解】 1）求O、a、b、c四点的流速矢量。

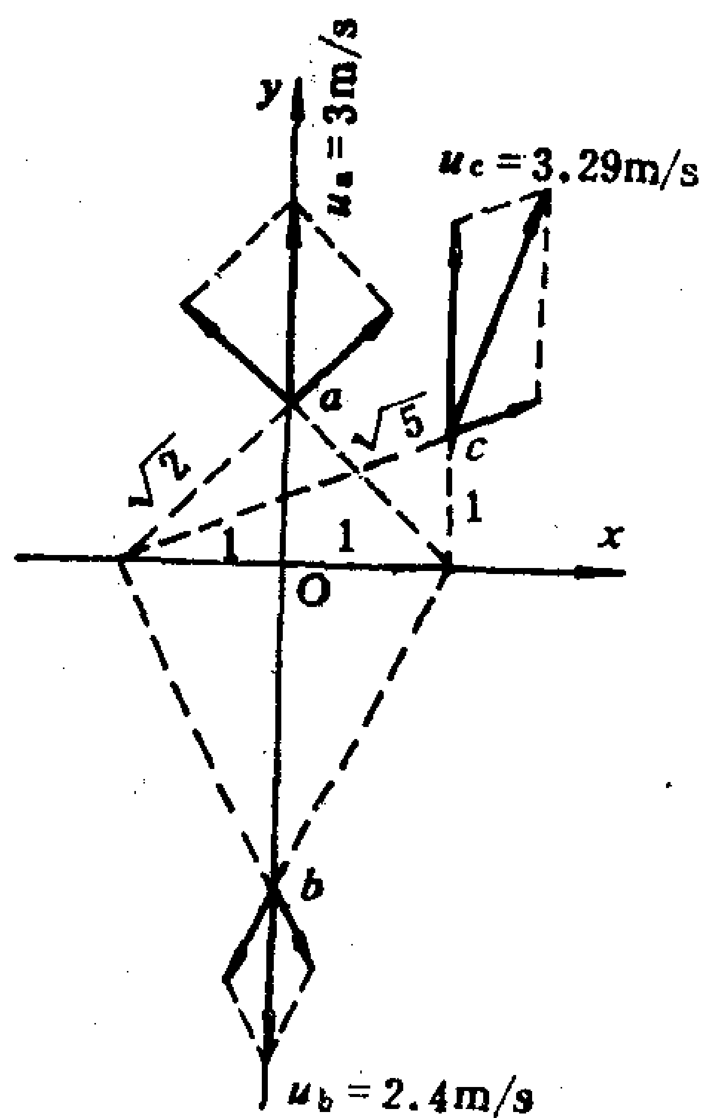
源流速度场的特征是只有径向流速，它与至源点的距离r成反比。$u_r=\frac{\theta}{2\pi r}$，$u_\theta=0$　O、a、b三点都位于y轴上，它们各自至源①和源②的距离相等，因此这两个源流在该三点的流速分量都满足

$$u_{1x}=-u_{2x} \qquad u_{1y}=u_{2y}$$

的关系。速度场叠加后

$$u_x=u_{1x}+u_{2x}=0$$

即x方向的流速分量大小相等，方向相反，相互抵消。由此可知，位于对称轴上各点的流速必然与该轴相切。也就是说，对称轴一定是一条流线。



例 9-1图a

图a中给出了a、b、c三点的流速矢量，O点因两源流在x方向的流速分量抵消，y方向的流速分量又都为零，故其

流速矢量为零。

2 ）求φ和ψ，绘流线族

（9-17）和（9-18）式给出的源流的φ和ψ是在源点位于坐标原点的条件下得到的。如源点现位于x_0、y_0处，φ和ψ的表达式又当如何呢？设想有一坐标系$x'O'y'$，其原点位于x_0、y_0处，对此坐标系源流的φ和ψ应为

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi}\ln r' = \frac{Q}{2\pi}\ln\sqrt{x'^2 + y'^2}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\theta' = \frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{y'}{x'}$$

由图b可见，$x' = x - x_0$，$y' = y_0 - y_0$。将它们代入上式，即得源流在xOy坐标系中的φ和ψ。

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi}\ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2] \tag{9-38}$$

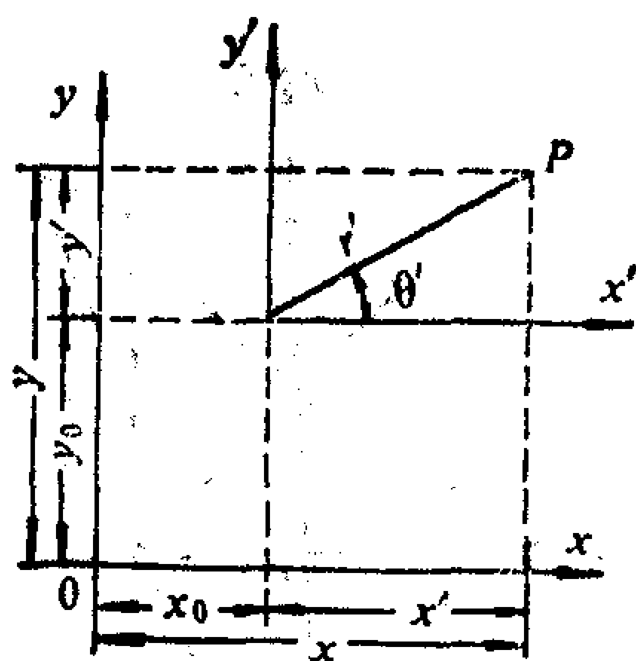
$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{y - y_0}{x - x_0} \tag{9-39}$$

因此，叠加后流场的速度势函数和流函数为

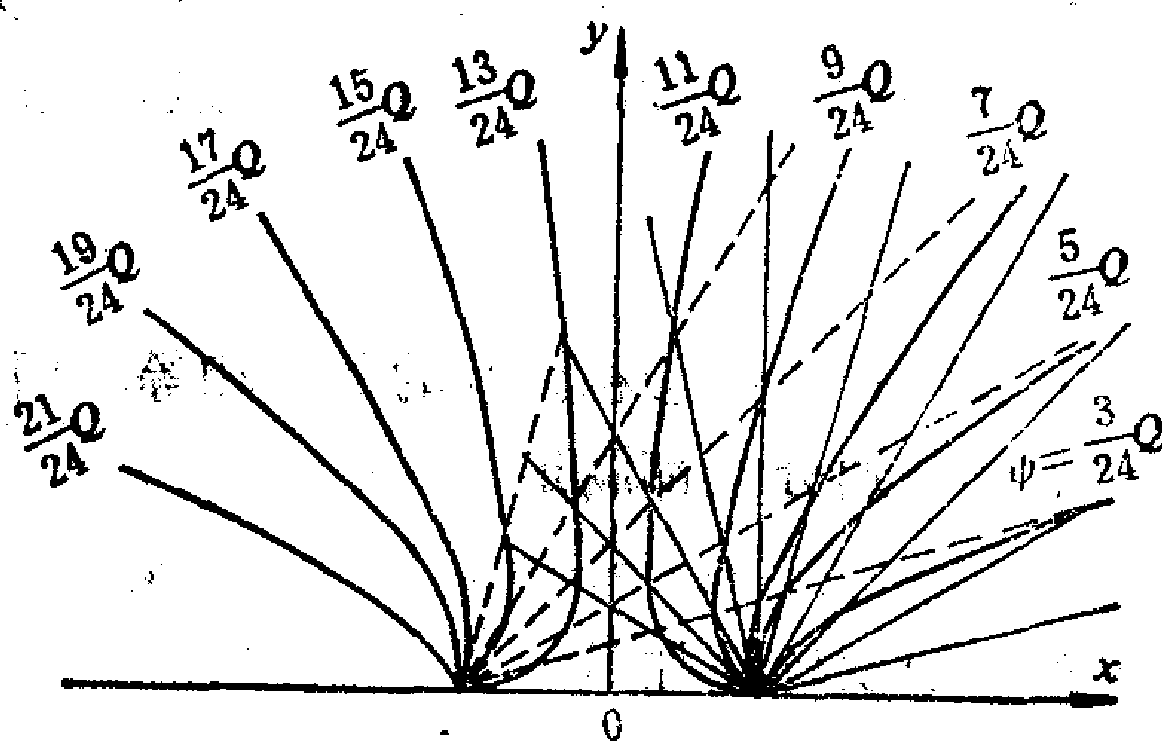
$$\varphi = \frac{Q}{4\pi}\{\ln[(x+1)^2 + y^2] + \ln[(x-1)^2 + y^2]\}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\left(\arctan\frac{y}{x+1} + \arctan\frac{y}{x-1}\right)$$

根据叠加前两个流动的流线族可直接绘出叠加后流动的流线族。各用几条径向流线将每个源流的流量n等分。设与x轴重合的流线的流函数为零，写出各流线的流函数值。在两个流动的流线相交处，叠加后的流函数值为该两流线的流函数值之和。连接流函数值相等的各点，即得叠加后流场的流线族（见图c中第Ⅰ象限，作图时取$n = 24$）。由该图可以看出，本题得到的φ和ψ也是在直角壁面上离顶点单位距离处有一强度为$\frac{Q}{2}$的源点的流动的解。



例 9-1图b



例 9-1图c

3 ）求$x = 0$流线上的压强分布

由叠加后的速度势求得流场的速度分量

$$u_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{2x+2}{(x+1)^2 + y^2} + \frac{2x-2}{(x-1)^2 + y^2}\right]$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi}\left[\frac{2y}{(x+1)^2+y^2} + \frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\right]$$

将$x=0$代入，得$u_x=0$。说明对称轴上各点的流速确无x方向的分量。而

$$(u)_{x=0} = \frac{Q}{\pi}\ \frac{y}{1+y^2}$$

将y轴上的流速分布代入伯诺里积分式中，如不计质量力

$$p_0 + o = p + \frac{\rho u^2}{2} = p + \frac{\rho}{2}\ \frac{Q^2}{\pi^2}\ \frac{y^2}{(1+y^2)^2}$$

$$p = p_0 - \frac{18\rho y^2}{(1+y^2)^2}$$

4）求y轴上速度的最大值及其位置

对y轴流速$(u)_{x=0}$求导数

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{Q}{\pi}\ \frac{y}{1+y^2}\right) = \frac{Q}{\pi}\ \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2}$$

令它等于零，得速度极值的位置为$y=\pm 1$。

将$x=0$，$y=1$代入u_y的表达式中，得

$$\max(u)_{x=0} = \frac{Q}{2\pi}$$

§9-4 圆柱体的绕流

一、无环量绕流

将方向与x轴一致的等速均匀流与位于坐标原点的偶极流叠加，得到的速度势函数和流函数为

$$\varphi = u_0 x + \frac{m}{2\pi}\ \frac{x}{x^2+y^2} \tag{9-40}$$

$$\psi = u_0 y - \frac{m}{2\pi}\ \frac{y}{x^2+y^2} \tag{9-41}$$

求速度：

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u_0 - \frac{m}{2\pi}\ \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{m}{2\pi}\ \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

求驻点位置：将驻点坐标x_s、y_s代入u_y式中，并令它为零，可得

$$x_s y_s = 0$$

从流动情况可知，x_s不可能为零，只能是$y_s=0$。因此将$x=x_s$、$y=y_s=0$代入u_x式中，并令它为零，得

$$u_0 - \frac{m}{2\pi}\ \frac{1}{x_s^2} = 0$$

$$x_s = \pm\sqrt{\frac{m}{2\pi u_0}}$$

驻点即为图9-15中的s和s'两点。

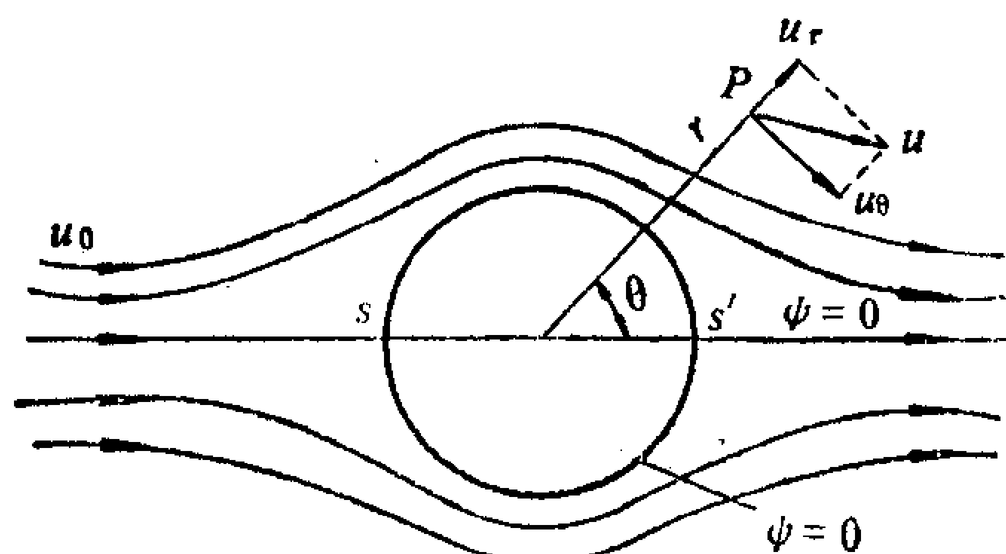


图 9-15 圆柱体无环量绕流

通过驻点的流线方程：将已求出的驻点坐标代入流函数中，得$\psi=0$，故通过驻点的流线方程为

$$y\left(u_0-\frac{m}{2\pi}\ \frac{1}{x^2+y^2}\right)=0$$

即
$$y=0\ 和\ x^2+y^2=\frac{m}{2\pi u_0}$$

由此可知，零流线方程是x轴和圆心位于坐标原点、半径为$r_0=\sqrt{\frac{m}{2\pi u_0}}$的圆。

绕圆柱流动的速度势和流函数：在（9-40）和（9-41）式中，如令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，以及$\frac{m}{2\pi}=u_0r_0^2$，即得用柱坐标表示的绕圆柱流动的φ和ψ。

$$\varphi=u_0\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\cos\theta \qquad (9\text{-}42)$$

$$\psi=u_0\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\sin\theta \qquad (9\text{-}43)$$

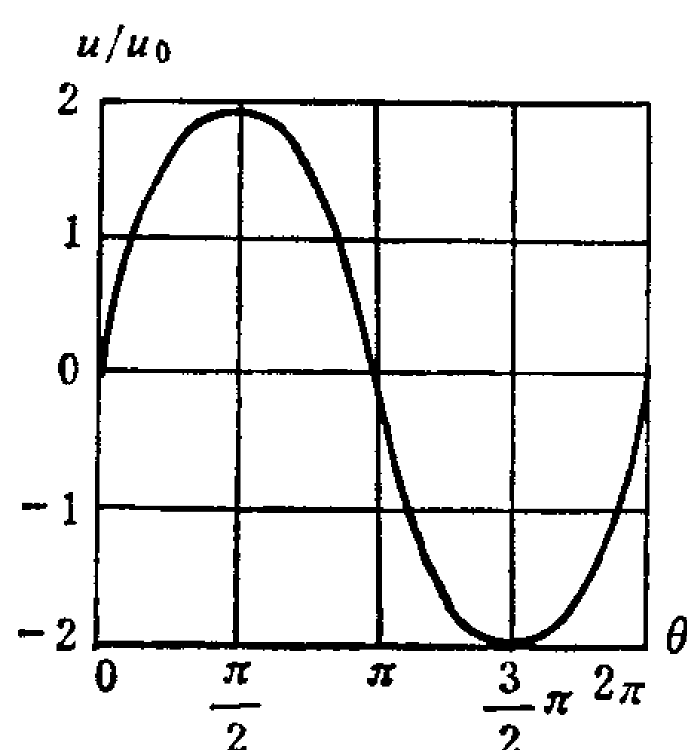


图 9-16 圆柱表面无环量绕流的流速分布

绕圆柱流动的速度场：

$$u_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}=u_0\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta \qquad (9\text{-}44)$$

$$u_\theta=\frac{1}{r}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-u_0\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta \qquad (9\text{-}45)$$

在圆柱表面上$r=r_0$，故圆柱表面上的流速分布为

$$\left.\begin{aligned}u_r&=0\\u_\theta&=-2u_0\sin\theta\end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}46)$$

圆柱表面流体不能穿透，故只有切向速度，径向速度为零。圆柱表面速度的绝对值为

$$u=2u_0\ |\sin\theta|$$

它在圆柱表面的分布如图9-16所示。在前、后驻点处流速为零；在$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$处，流速最大，其值为无穷远处速度的两倍。

若沿把圆柱体包围在内的任意圆周线l求速度环量，

$$\Gamma_l=\oint u_0dl=\int_0^{2\pi}-u_0\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\sin\theta d\theta=0$$

圆柱表面的压强分布：将（9-46）式代入伯诺里积分式中，即得圆柱表面的压强分布，积分常数可由已知无穷远处的流速u_0和压强p_0求得。

$$p=p_0+\frac{\rho u_0^2}{2}(1-4\sin^2\theta) \qquad (9\text{-}47)$$

工程中常用无量纲的压强系数来表示流场中压强的相对变化，它的定义是

$$C_p=(p-p_0)\Big/\frac{\rho u_0^2}{2} \qquad (9\text{-}48)$$

将（9-47）式代入压强系数，得圆柱表面的压强系数分布

$$C_p=1-4\sin^2\theta \qquad (9\text{-}49)$$

可见，压强系数与圆柱体的半径r_0及u_0、p_0无关，仅与θ有关。当$\theta=0$和$\theta=\pi$（即图9-15

中的s和s'点）时，$C_p=1$，压强最大；当$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$时，$C_p=-3$，压强最小。压强分布在x轴两侧是对称的。图9-17给出了C_p沿圆柱表面的分布情况。图中的虚线为$Re=1.85\times10^5$时的实测值，与理论值比较，在圆柱表面前三分之一处，尚能较好符合。往后就出现了显著的差别，这是因为实际流体流过圆柱体时，由于粘性作用，使外部势流在圆柱体表面流过一段距离后，即与柱体分离，在柱体后面形成旋涡区，这部分流动已不能按无旋流动处理，有关情况将在第十章做进一步介绍。

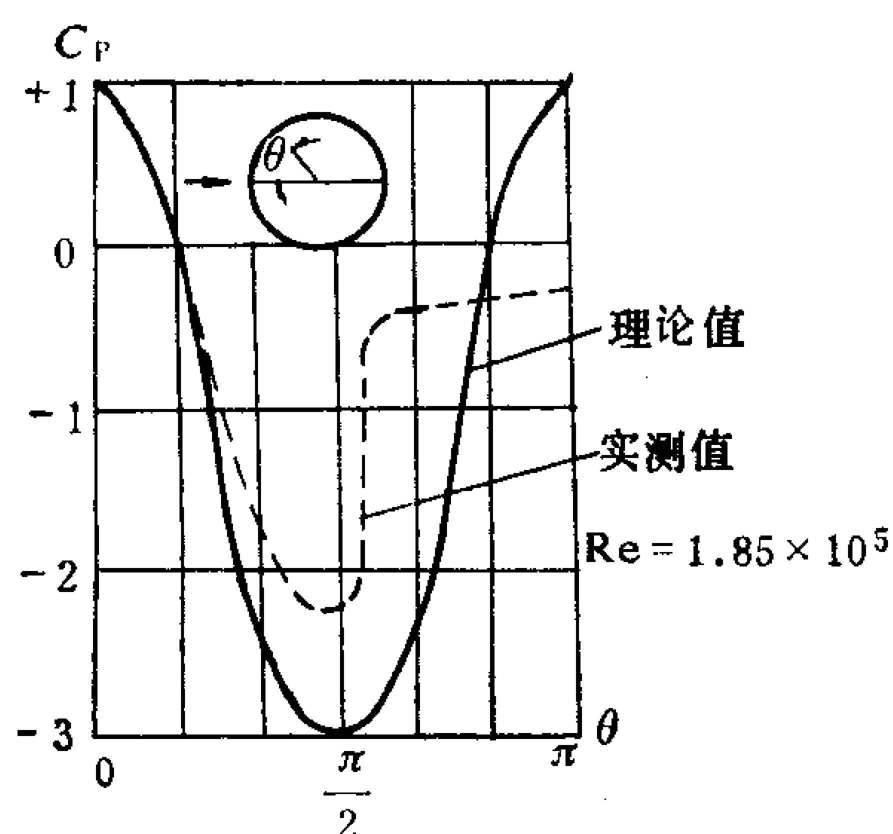


图 9-17 圆柱表面无环量绕流的压强分布

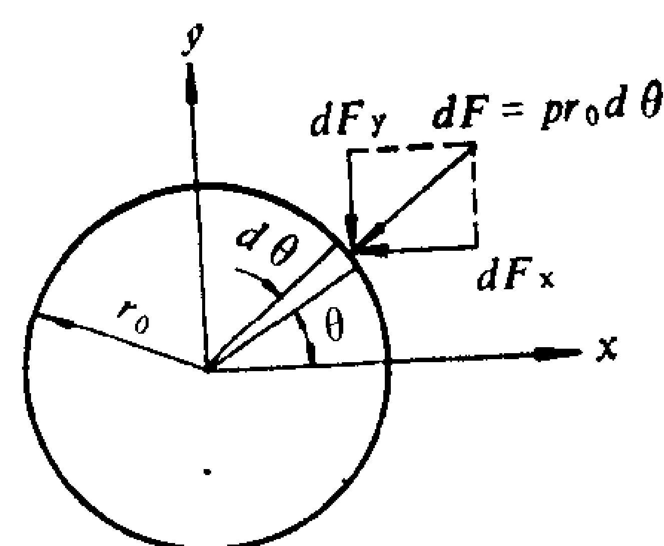


图 9-18 作用于圆柱上的压力

作用在圆柱上的流体总压力：已知柱体表面的压强分布，就可以求出作用在单位长度柱体上的总压力F在x轴和y轴方向的分量F_x、F_y。作用在柱体表面微元面积$r_0d\theta$上的总压力分量为

$$\left.\begin{aligned}dF_x&=-pr_0\cos\theta d\theta\\dF_y&=-pr_0\sin\theta d\theta\end{aligned}\right\}\tag{9-50}$$

式中所以有负号是因为dF_x、dF_y分别与x、y的坐标轴方向相反（见图9-18）。

将（9-47）式代入上式，并沿圆柱表面积分

$$F_x=-\int_0^{2\pi}\left[p_0+\frac{\rho u_0^2}{2}(1-4\sin^2\theta)\right]r_0\cos\theta d\theta=0$$

$$F_y=-\int_0^{2\pi}\left[p_0+\frac{\rho u_0^2}{2}(1-4\sin^2\theta)\right]r_0\sin\theta d\theta=0$$

即流体作用在圆柱表面上的总压力为零。从图9-17可以看出，圆柱表面上的压强分布既上下对称，又前后对称，因此合力为零是理所当然的。

绕流中不仅作用在圆柱体上的总压力为零，对于任意形状的物体，这个结论也是适用的。当然，这仅仅是对理想流体来说的，如为实际流体，就必然有阻力存在了。

二、有环量绕流

在圆柱体无环量绕流的速度势函数和流函数中，如分别再叠加一个势涡流的势函数和流函数，即

$$\varphi=u_0\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\cos\theta+\frac{\Gamma}{2\pi}\theta\tag{9-51}$$

$$\psi = u_0\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)r\sin\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{9-52}$$

这个φ和ψ仍是绕圆柱流动的解。因为它既满足拉普拉斯方程，将要进行的速度场分析中可知，它又满足圆柱体表面和无穷远处的边界条件。

求速度：

$$u_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r} = u_0\left(1-\frac{r_0^2}{r^2}\right)\cos\theta \tag{9-53}$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -u_0\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \tag{9-54}$$

当$r=r_0$时，即在圆柱体表面上

$$u_r = 0\,,\quad u_\theta = -2u_0\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \tag{9-55}$$

这表明半径为r_0的圆周线是一条流线，满足圆柱体表面的边界条件。

当$r\to\infty$时，$(u_r)_{r\to\infty} = u_0\cos\theta$，$(u_\theta)_{r\to\infty} = -u_0\sin\theta$

$$(u)_{r\to\infty} = \left(\sqrt{u_r^2+u_\theta^2}\right)_{r\to\infty} = u_0$$

即无穷远处流动为未受扰动的等速均匀流，满足该处的边界条件。

与圆柱体无环量绕流不同的是沿任意包围圆柱体在内的圆周线l的速度环量Γ_1不为零，等于势涡流的势涡强度Γ。

$$\Gamma_l = \oint u_\theta dl = \int_0^{2\pi}\left[-u_0\left(1+\frac{r_0^2}{r^2}\right)\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r}\right]rd\theta = \Gamma$$

求驻点位置：设驻点位于圆柱体表面上，因而令

$$u_\theta = -2u_0\sin\theta_s + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} = 0$$

可得驻点的相位角为

$$\sin\theta_s = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 u_0} \tag{9-56}$$

现分三种情况考虑：

1）如$0<\Gamma<4\pi r_0 u_0$

$\sin\theta_s<1$，因$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$，故有两个驻点，分别位于第Ⅰ和第Ⅱ象限的柱面上，且对称于y轴（见图9-19a）。

如$\Gamma=0$，$\sin\theta_s=0$，$\theta_s=0$和π，这就是无环量绕流的驻点位置。

2）如$\Gamma=4\pi r_0 u_0$

$\sin\theta_s=1$，$\theta_s=\dfrac{\pi}{2}$，圆柱面上只有一个驻点，位于正y轴上（图9-19，b）。

3）如$\Gamma>4\pi \gamma_0 u_0$

$\sin\theta_s>1$，θ_s无解，这是因为驻点在这种情况下已离开圆柱体表面的缘故，若令（9-53）和（9-54）两式中的$u_r=0$，和$u_\theta=0$，则可以得到位于y正轴上的两个驻点。一个在圆外，一个在圆内。圆内的驻点对所讨论的绕圆柱体流动无意义。通过圆外驻点s的流线把绕圆柱流动分为两部分。在该闭合流线内的流体，沿环绕圆柱体的闭合流线流动。在该闭合流线外的流体，则绕过圆柱体向远方流去（图9-19，c）。

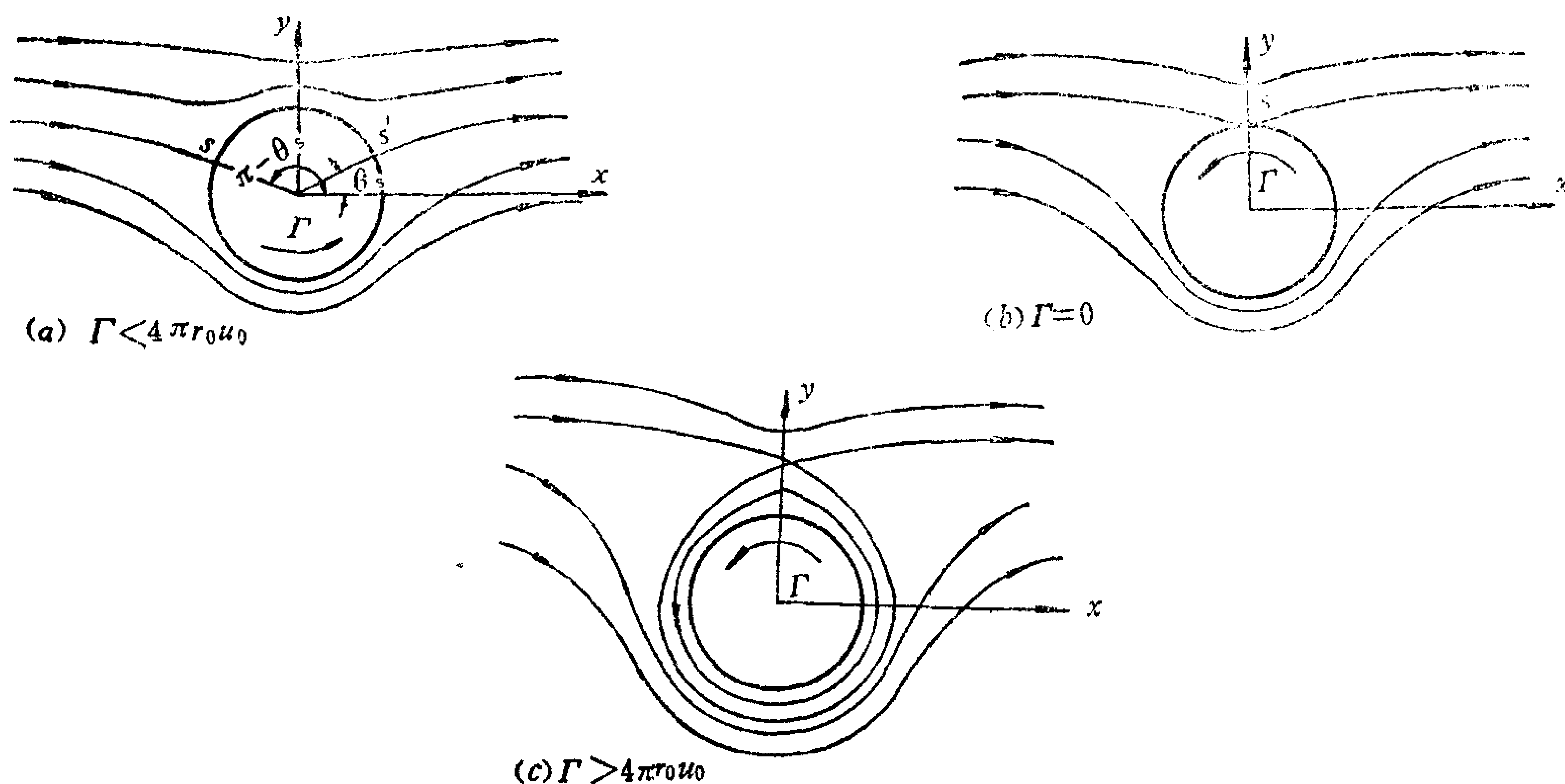


图 9-19 圆柱体有环量绕流

由此可见，绕圆柱流动的驻点位置在圆柱体半径r_0一定的条件下，决定于和Γu_0的比值。Γ/u_0越大，驻点偏离x轴越远。

作用在圆柱体上的压强分布和总压力：

将（9-55）式代入伯诺里积分式中，如不计质量力，得圆柱体表面压强分布

$$p=p_0+\frac{\rho u_0^2}{2}-\frac{\rho u^2}{2}=p_0+\frac{\rho u_0^2}{2}\left[1-\left(2\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi r_0u_0}\right)^2\right] \tag{9-57}$$

压强系数为

$$C_p=\frac{p-p_0}{\rho u_0^2/2}=1-\left(2\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi r_0u_0}\right)^2 \tag{9-58}$$

将（9-57）式代入（9-50）式中，并沿圆柱表面积分，即得作用在单位长度柱体上的总压力F在x轴和y轴方向的分量。

$$F_x=-\int_0^{2\pi}\left\{p_0+\frac{\rho u_0^2}{2}\left[1-\left(2\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi r_0u_0}\right)^2\right]\right\}r_0\cos\theta d\theta=0$$

$$F_y=-\int_0^{2\pi}\left\{p_0+\frac{\rho u_0^2}{2}\left[1-\left(2\sin\theta-\frac{\Gamma}{2\pi r_0u_0}\right)^2\right]\right\}r_0\sin\theta d\theta$$

$$=-r_0\left(p_0+\frac{\rho u_0^2}{2}-\frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2r_0}\right)\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta-2\rho u_0^2r_0\int_0^{2\pi}\sin^3\theta d\theta$$

$$-\frac{\rho u_0\Gamma}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=-\rho u_0\Gamma \text{❶} \tag{9-59}$$

---

❶ $\int_0^{2\pi}\sin\theta d\theta=\left|-\cos\theta\right|_0^{2\pi}=0$

$\int_0^{2\pi}\sin^3\theta d\theta=-\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\theta)d\cos\theta=\left|-\cos\theta+\frac{\cos^3\theta}{3}\right|_0^{2\pi}=0$

$\int_0^{2\pi}\sin^2\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)d\theta=\left|\frac{\theta}{2}-\frac{\sin2\theta}{4}\right|_0^{2\pi}=\pi$

以上所得结果表明，当等速均匀流u_0绕圆柱体作有环量流动时，虽然平行于u_0方向的阻力仍等于零，但在垂直于u_0方向却有力作用，这个力称为升力。它等于流体的密度、无穷远处的流速和围绕圆柱体的速度环量三者的乘积。这就是著名的库塔—儒柯夫斯基（Kutta—Жукоъский）升力定理。虽然这个定理我们是从圆柱体绕流的讨论中得到的。但是对于任意形状的物体用动量方程也可以导出它，所以库塔—儒柯夫斯基定理适用于任意形状物体的绕流。

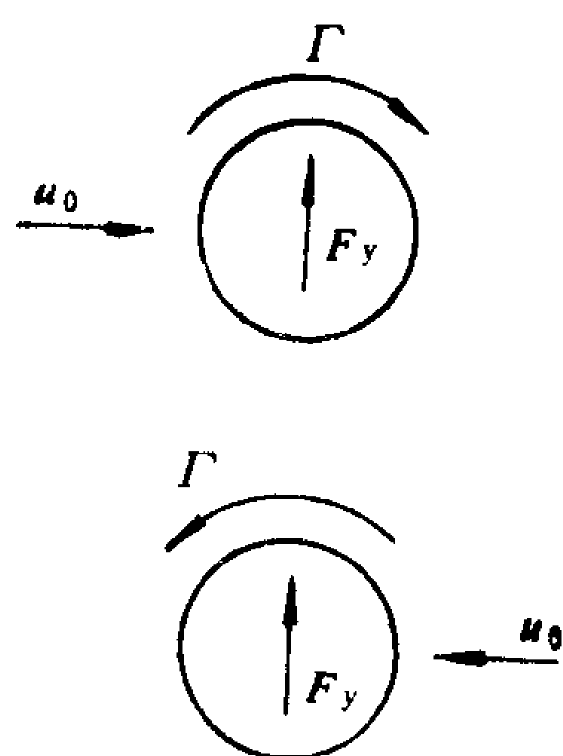
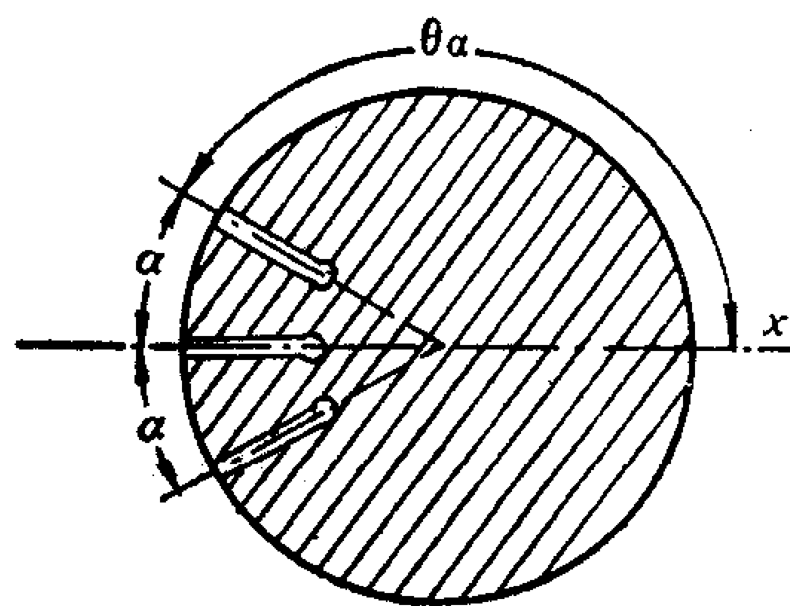


图 9-20 升力方向的确定

（9-59）式中的"－"号表示在我们讨论的情况（坐标系如图9-19所示，u_0平行于x轴，Γ为逆时针方向），升力F_y与y轴方向相反。如为其它情况，升力方向可以这样确定：将u_0方向沿环量Γ的反方向转90°，所指的就是升力F_y的方向（图9-20）。

为什么出现环量就会有升力作用呢？以我们所讨论的圆柱体绕流为例。当无环量绕流与势涡流的速度场叠加后，在圆柱体上部因两者流速方向相反，故流速减小，压强增大；在圆柱体下部流速方向一致，流速加大，压强减小。因而就有一个向下的总压力作用于圆柱体上。

库塔—儒柯夫斯基定理对推动航空事业的发展起过重要作用。它使人们认清了机翼产生升力的原因和提高升力的途径。其它方面，如在球类运动中这个定理也得到广泛应用。足球射门时经常出现的香蕉球就是因为足球在旋转前进时，围绕球体诱发了近似于势涡流的流动，使足球在横向力的作用下，沿着弯曲的轨道前进。



例 9-2图

【例 9-2】 有一可用来测定流速方向的圆柱形测速管。它有三个径向钻孔，当两边孔的压强相等时，中间孔的方向就是流速方向。设绕圆柱体为不可压缩流体无旋流动，试求：

1）欲使两边孔测得的是测速管放入前该点的压强，边孔应放置的α；

2）在水流中测得中间孔与边孔的压差为5cmH_2O时的流速；

3）此测速管的灵敏度$\frac{\partial p}{\partial \theta}$。

【解】 1）求边孔的置放角α

（9-47）式给出了圆柱体无环量绕流的柱体表面压强分布

$$p = p_0 + \frac{\rho u_0^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta)$$

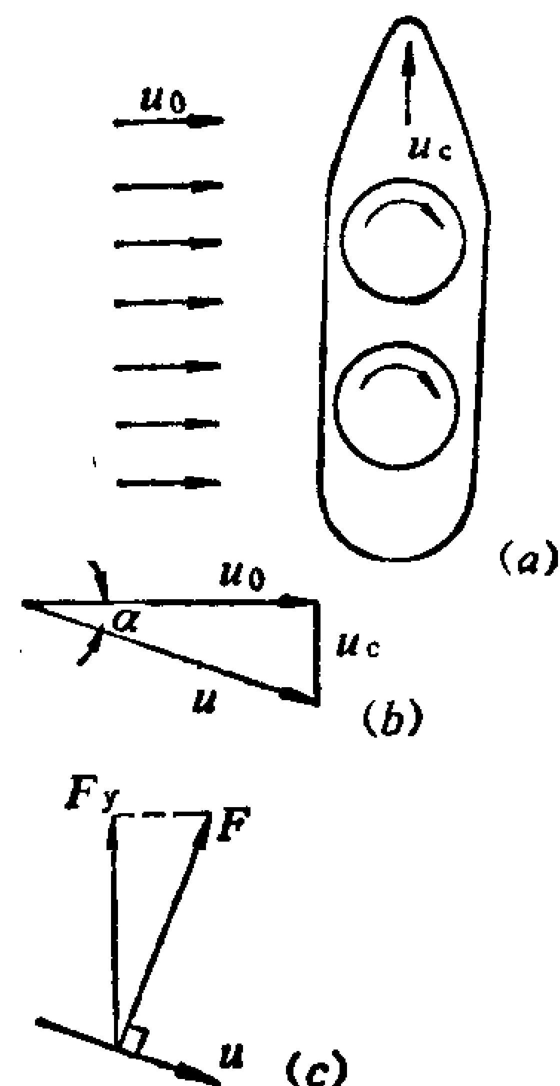
式中p_0、u_0原为无界等速均匀流在无穷远处的压强和流速，实际上也是流动未受圆柱体干扰处的压强和流速。本题中可取测速管放入前测点的压强和流速为p_0、u_0，今欲使边孔开在直接测得的是p_0的位置，那就是说当上式中的$\theta = \theta_a = \pi - \alpha$时，$p = p_0$。将这个关系代入

$$\frac{\rho u_0^2}{2}(1 - 4\sin^2\theta_a) = 0$$

$$\sin\theta_a=\frac{1}{2},\quad \theta_a=30°\text{或}150°$$

$\theta_a=30°$位于圆柱体的后半部，该处压强的理论值与实际情况相差甚远，故取$\theta_a=150°$，即$\alpha=30°$。因粘性影响，实际的这种测速管α值要比30°稍大。

2）求$\frac{\Delta p}{\gamma}=5\text{cm}H_2O$时的流速



例 9-3图

中间孔测得的是驻点压强$p_s=p_0+\frac{\rho u_0^2}{2}$，边孔测得的就是$p_0$，因此

$$\frac{\Delta p}{\gamma}=\frac{\rho u_0^2}{2\gamma}=\frac{u_0^2}{2g}=0.05\text{m}$$

$$u_0=\sqrt{2\times9.81\times0.05}=0.99\text{m/s}$$

3）求灵敏度

对（9-47）式求偏导数

$$\frac{\partial p}{\partial\theta}=-4\sin\theta\cos\theta\rho u_0^2$$

将$\theta=150°$代入，得

$$\frac{\partial p}{\partial\theta}=\sqrt{3}\,\rho u_0^2$$

【例 9-3】 有一船舶向北航行，船速9m/s。风自西刮来，风速90km/h。船上装有两个直径为3 m、高为8 m的圆柱，它以45r/min的转速顺时针方向转动，求旋转圆柱给船舶的推进力。空气密度$\rho=1.2\text{kg/m}^3$。

【解】 圆柱以转速n顺时针方向转动，圆柱表面空气的切线速度u_θ为

$$u_\theta=r_0\omega=r_0\,\frac{\pi n}{30}=\frac{\pi\times1.5\times45}{30}=7.07\text{m/s}$$

绕圆柱的速度环量为

$$|\Gamma|=2\pi r_0u_0=2\times\pi\times1.5\times7.07=66.63\text{m}^2/\text{s}$$

如船舶在静止空气中以u_c速度航行，圆柱上受到来自南面的速度为u_c的气流作用。现又有西风u_0刮来，故作用在圆柱上的来流应是$\vec{u}_0$和$\vec{u}_c$的矢量和，即图a中的u。

$$u_0=90\frac{1000}{3600}=25\text{m/s}$$

$$u=\sqrt{u_0^2+u_c^2}=\sqrt{25^2+9^2}=26.57\text{m/s}$$

作用在圆柱上的升力为

$$F=\rho u|\Delta|l=1.2\times26.57\times66.63\times8=17000\text{N}=17\text{kN}$$

将$\vec{u}$逆时针转90°即为F的方向（见图b）。

将F投影到船舶前进的方向即为推进力。因有两个圆柱，故

$$F_y=2F\cos\alpha=2\times17\times25/26.57=32\text{kN}$$

§ 9-5 求解平面势流的虚像法

以上介绍的势流叠加法是先将基本流动的势函数（或流函数）叠加后，再来分析它们

所满足的边界条件。这实际上是先有解，再来看它是什么流动的解，这是求解平面势流的反问题。我们的基本流动只有几个，叠加后能解决的问题是很有限的。所以用反问题求解有很大的局限性。如果根据给定的边界条件，我们就能适当地选择和布置奇点（源点、汇点、势涡点等），使叠加后的φ和ψ正好满足边界条件，这就是求解平面势流的正问题。原则上说，用这种方法可以求得满足任意边界条件的解。但是对于复杂的边界，实际应用起来并非易事。在这一节主要讨论要满足两类简单的边界（平面壁和圆柱壁）如何布置奇点的方法，这种方法称为虚像法。虚像法的意义还在于它可作为求解复杂边界流动的基本解。

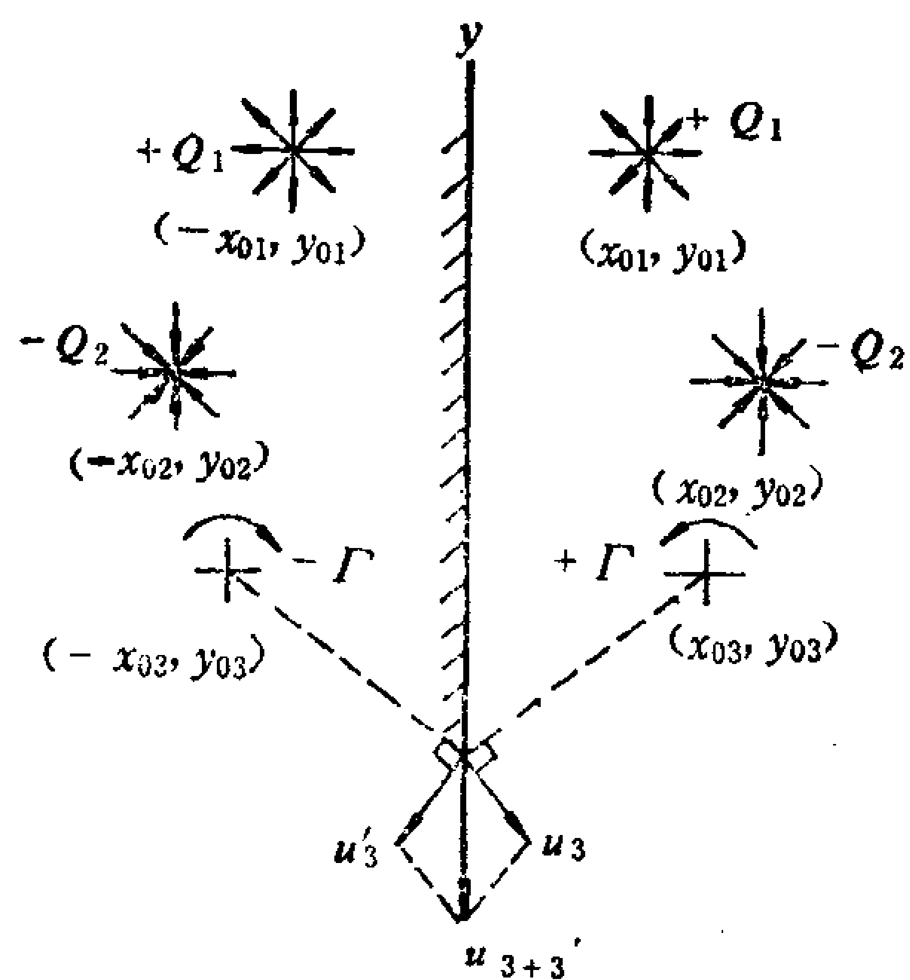


图 9-21　单面壁虚像

一、平面壁虚像

如在有源、汇、势涡等奇点的无限空间流场中放入一无限长、宽的平面壁，求这时流场的速度势函数和流函数。对于源流，在§9-3的[例9-1]中已经分析过，只要在平面壁另一侧的对称位置上虚放一个等强度的源，两者叠加后的流动必然满足此平面壁的边界条件。不难理解，这样布置对汇流也完全适用。如为势涡流，同样在平面壁另一侧的对称位置上放置一等强度的势涡，不过这个作为虚像的势涡的方向应与实际的相反，其理由在图9-21所示的速度图中不难看出。因此，对于图9-21中的几个奇点，在放入$x=0$的平面壁后，流场的速度势函数和流函数为

$$\begin{aligned}\varphi=&\frac{Q_1}{2\pi}\left[\ln\sqrt{(x-x_{01})^2+(y-y_{01})^2}+\ln\sqrt{(x+x_{01})^2+(y-y_{01})^2}\right.\\&-\frac{Q_2}{2\pi}\left[\ln\sqrt{(x-x_{02})^2+(y-y_{02})^2}+\ln\sqrt{(x+x_{02})^2+(y-y_{02})^2}\right.\\&+\frac{\Gamma_1}{2\pi}\left[\arctan\frac{y-y_{03}}{x-x_{03}}-\arctan\frac{y-y_{03}}{x+x_{03}}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi=&\frac{Q_1}{2\pi}\left[\arctan\frac{y-y_{01}}{x-x_{01}}+\arctan\frac{y-y_{01}}{x+x_{01}}\right]-\frac{Q_2}{2\pi}\left[\arctan\frac{y-y_{02}}{x-x_{02}}\right.\\&\left.+\arctan\frac{y-y_{02}}{x+x_{02}}\right]-\frac{\Gamma_1}{2\pi}\left[\ln\sqrt{(x-x_{03})^2+(y-y_{03})^2}\right.\\&-\ln\sqrt{(x+x_{03})^2+(y-y_{03})^2}\end{aligned}$$

在平面壁上$x=0$，将它代入流函数中，得平面壁上$\psi=0$，这就证明$x=0$是一条流线，满足平面壁的边界条件。

二、圆柱壁虚像

如在有奇点的无限空间流场中放入一圆柱壁面，如何求得这个流场的速度势函数和流函数呢？为此，先要给圆周的对称点下个定义：如有A、B两点位于半径为r_0的同一条径向直线上，它们到圆心O点的距离分别为r和r'，且有

$$rr'=r_0^2$$

则A、B两点就是这个圆周的一对对称点。这个对称点的定义实际上包括了平面壁的对称点定义在内（见图9-23）。平面壁可以看成是$r_0=\infty$的圆柱壁。根据分比定律，上式可写成

图 9-22 圆柱壁虚像

图 9-23 平面壁的对称点

$$\frac{r-r_0}{r}=\frac{r_0-r'}{r_0}$$

或
$$\frac{r-r_0}{r_0-r'}=\frac{r}{r_0}=\frac{r_0+a}{r_0}=1+\frac{a}{r_0}$$

当$r_0=\infty$时，$\frac{a}{r_0}\approx 0$，因此

$$r_0-r'=r-r_0=a$$

圆柱壁的虚像法与平面壁类似，如为源流，可在其对称点虚放一个等强度的源点，另在圆心处虚放一个强度的绝对值相等的汇，将三者的速度势函数或流函数叠加，即得绕圆柱流动的解。圆心处必须放一个汇的原因是为了保持圆内的流量平衡。否则，圆周不可能成为一条流线。实际上要使圆外的流动满足不可压缩流体的连续性条件，无穷远处必然有一个等强度的汇存在，虚放在圆心的汇与无穷远处的那个汇也正好是一对对称的奇心。如要讨论圆内的流动，虚放的源点就在圆外的对称点上。对于汇流，奇点的布置与源流相似。

现在来证明在这样三个奇点叠加的流场中，半径为r_0的圆周一定是一条流线。图9-22中的A_1、B_1两点是对称点，其上各有一强度为$+Q$的源点，圆心处有一强度为$-Q$的汇。三者叠加后的流函数为

$$\psi=\frac{Q}{2\pi}(\theta_1+\theta_2-\theta_3)$$

如在圆周上任取一点P_1，证明它的ψ值为常数，也就证明了圆周是一条流线。下面用比较简单的几何方法证明P_1点的$\theta_1+\theta_2-\theta_3=$常数。

由于$\frac{OA_1}{OP_1}=\frac{OP_1}{OB_1}\left(即\frac{r'}{r_0}=\frac{r_0}{r}\right)$，而$\angle A_1OP_1$为公共角，故$\Delta A_1OP_1$与$\Delta P_1OB_1$相似，因而对应角$\angle OP_1B_1=\angle OA_1P_1$。此外，$\theta_1=\theta_3+\angle OP_1B_1$，所以

$$\theta_1+\theta_2-\theta_3=\theta_2+\angle OP_1B_1=\theta_2+\angle OA_1P_1=\pi+\alpha=常数$$

因而圆周上的流函数值为

$$\psi=\frac{Q}{2\pi}(\pi+\alpha)=常数$$

如圆外为一势涡流，则在圆内对称点上虚放一强度相等方向相反的势涡流，这两个势涡流叠加后，圆周就是一条流线。至于圆心处可以虚放一个与圆外势涡流强度相等方向相同的势涡点，也可以不放或放一任何强度的势涡点。前者得到的是圆柱体无环量绕流的

解，后者是不同强度的有环量绕流的解。圆心处势涡点的流线是与圆柱壁同心的一组圆，所以再将它叠加后，半径为r_0的圆周仍是一条流线。

现在来证明图9-22中对称点A_2、B_2上的一对强度相等方向相反的势涡点，将它们的流场叠加后，半径为r_0的圆周是一条流线。在圆周上任取一点P_2，连接P_2O、P_2A_2、P_2B_2。由于A_2、B_2是对称点

$$\frac{OA_2}{OP_2}=\frac{OP_2}{OB_2}$$

$\angle A_2OP_2$为公共角，$\triangle A_2OP_2$与$\triangle P_2OB_2$相似，对应边成比例，即$\frac{P_2B_2}{P_2A_2}=\frac{P_2O}{A_2O}=\frac{r_0}{A_2O}=$常数。而流场的流函数为

$$\psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}(\ln r_1-\ln r_2)=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

对于P_2点来说，r_1即为P_2B_2，r_2即为P_2A_2，故

$$\psi=-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\frac{r_0}{A_2O}=\text{常数}$$

所以半径为r_0的圆周必是一条流线，满足圆柱壁绕流的边界条件。

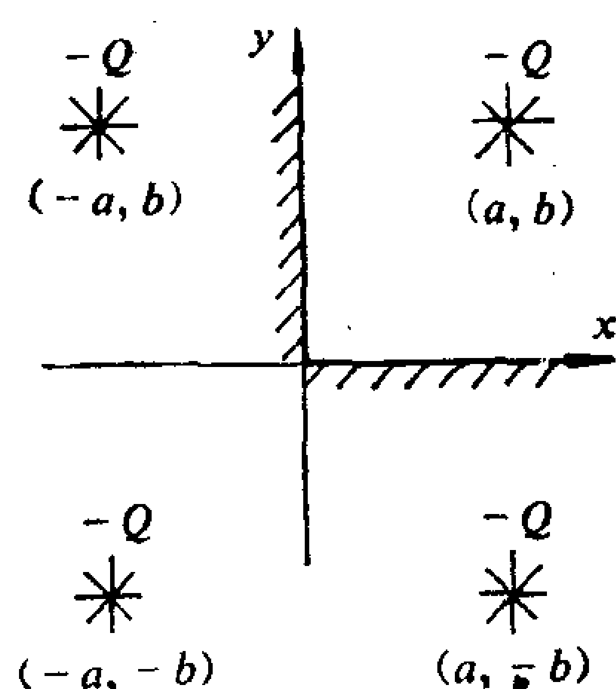
【例 9-4】 直角壁面内位于(a, b)处有一强度为$-Q$的汇，试求该流动的速度势函数和流函数。

【解】 根据平面壁的虚像法，要使y轴为流线，应在x轴的对称点$(a, -b)$处和y轴的对称点$(-a, b)$处各虚放一等强度汇。但是这样置放后，对x轴和y轴都不对称。为此需在第Ⅲ象限再虚放一等强度的汇，以保证x轴和y轴均为流线。所以

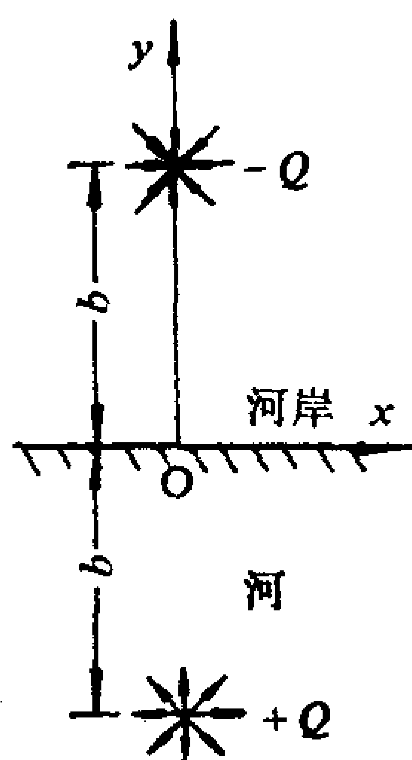
$$\varphi=-\frac{Q}{2\pi}\Big[\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+\ln\sqrt{(x+a)^2+(y-b)^2}$$
$$+\ln\sqrt{(x+a)^2+(y+b)^2}+\ln\sqrt{(x-a)^2+(y+b)^2}\Big]$$

$$\psi=-\frac{Q}{2\pi}\Big(\arctan\frac{y-b}{x-a}+\arctan\frac{y-b}{x+a}+\arctan\frac{y+b}{x+a}$$
$$+\arctan\frac{y+b}{x-a}\Big)$$

如将$x=0$或$y=0$代入流函数中，皆得$\psi=0$。可见这样放置虚像后，x轴和y轴确为流线，满足直角壁面的边界条件。



例 9-4图



例 9-5图

【例 9-5】 河边有一单井，河水通过厚度为T的含水层渗向单井，流量为Q，试求：

1）含水层中地下水流的φ和ψ；

2）河水进入含水层的最大渗流速度。

【解】 初看起来本题似乎可以用平面壁虚像法求解，但实际上两者是不同的。虚像法中的平面壁是不透水的固体壁面，

它的边界条件是ψ=常数。本题中的河岸却是个透水的平面壁，河水以垂直于壁面的流速方向进入含水层，河岸的边界条件是φ=常数。虽然如此，平面壁虚像法仍有借鉴的价值。在§9-3对等强度源流和汇流所作的分析中，我们看到位于对称轴（图9-12中的y轴）各点的速度皆与该轴正交，对称轴是一条等势线。这使我们得到启发。

1）求φ和ψ

设xoy坐标系如图所示。在$x=0$、$y=-b$处虚置一等强度的源点，并可看成是汇点。这两个流动叠加，得

$$\varphi=-\frac{Q}{2\pi T}\left[\ln\sqrt{x^2+(y-b)^2}-\ln\sqrt{x^2+(y+b)^2}\right]$$

$$\psi=-\frac{Q}{2\pi T}\left(\arctan\frac{y-b}{x}-\arctan\frac{y+b}{x}\right)$$

在河岸线上$y=0$，将它代入速度势函数中，得$\varphi=0$，河岸线确为一等势线。

2）求进入含水层的最大渗流速度

$$u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{Q}{4\pi T}\left[\frac{2x}{x^2+(y-b)^2}-\frac{2x}{x^2+(y+b)^2}\right]$$

$$u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{Q}{4\pi T}\left[\frac{2(y-b)}{x^2+(y-b)^2}-\frac{2(y+b)}{x^2+(y+b)^2}\right]$$

对于河岸上各点，$y=0$。将它代入u_z和u_x中，得$u_x=0$

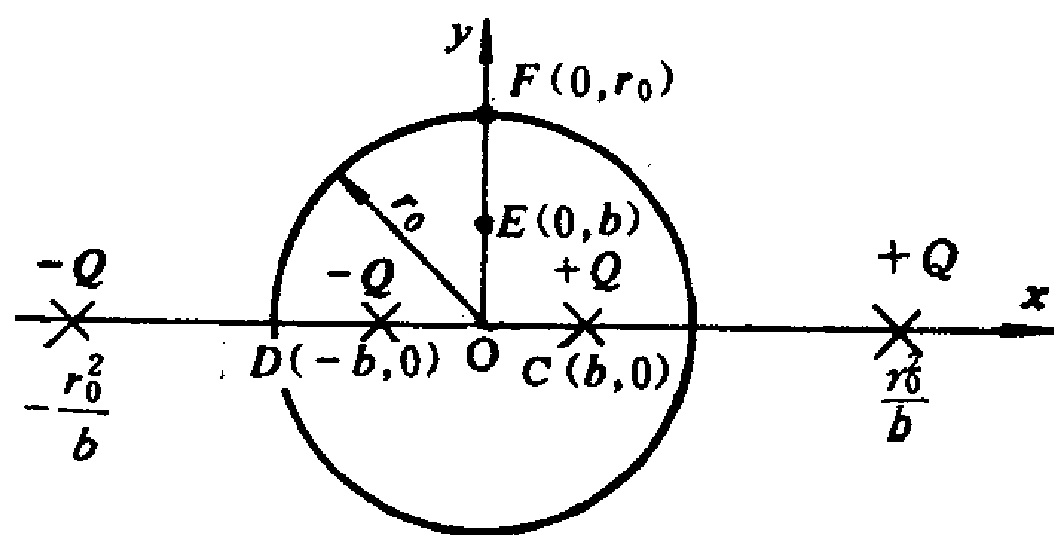
$$u_x=\frac{Q}{\pi T}\left(\frac{b}{x^2+b^2}\right)$$

河岸线上各点速度确与它垂直

为求u_y在x轴上的最大值，可令$\frac{du_x}{dx}=0$，得$x=0$，即在坐标原点处河水进入含水层的渗流速度最大。将$x=0$代入上式，得

$$\max u_y=\frac{Q}{\pi bT}$$

【例 9-6】 有一直径$2r_0=10$m、水深$h=1$m的圆形水池，池内$C(b, O)$点有一进水口，$D(-b, O)$点有一出水口，进、出的流量皆为$Q=10$m³/s，C、D至水池中心O点的距离皆为$b=2.5$m，试求池内A，O、E、F四点的水流速度。



例 9-6图

【解】 本题虽求圆内流场，而不是求圆外绕流的流场，但水池侧壁同样是一条流线，故仍可用圆柱壁虚像法求解。圆内C、D两点分别是源点和汇点，圆外与C、D对称处分别虚置一等强度的源点和汇点。因圆内流量平衡，圆心处不需要再置放源点或汇点。这四个奇点的速度势叠加，即得所求流场的φ。

$$\varphi=\frac{Q}{2\pi}\left[\ln\sqrt{(x-b)^2+y^2}-\ln\sqrt{(x+b)^2+y^2}\right.$$
$$\left.+\ln\sqrt{\left(x-\frac{r_0^2}{b}\right)^2+y^2}-\ln\sqrt{\left(x+\frac{r_0^2}{b}\right)^2+y^2}\right]$$

分别求φ对x和y的偏导数，得流速分量

$$u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{2(x-b)}{(x-b)^2+y^2}-\frac{2(x+b)}{(x+b)^2+y^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2\left(x-\frac{r_0^2}{b}\right)}{\left(x-\frac{r_0^2}{b}\right)^2+y^2}-\frac{2\left(x+\frac{r_0^2}{b}\right)}{\left(x+\frac{r_0^2}{b}\right)^2+y^2}\right]$$

$$u_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{Q}{4\pi}\left[\frac{2y}{(x-b)^2+y^2}-\frac{2y}{(x+b)^2+y^2}\right.$$

$$\left.+\frac{2y}{\left(x-\frac{r_0^2}{b}\right)^2+y^2}-\frac{2y}{\left(x+\frac{r_0^2}{b}\right)^2+y^2}\right]$$

如令式中的$x=0$或$y=0$，都得$u_y=0$。这是说在x轴和y轴上的各点$u=|u_x|$。将Q、b、r_0的数值代入u_x式中，并代入各点的坐标，得四点的速度如下：

点号		A	0	E	F
坐标	x	5	0	0	0
	y	0	0	2.5	5
速度m/s		0	1.59	0.936	0.51

习　题

9-1　绘出下列流场的三条流线（$\psi=1, 2, 3$），求流速分量u_x和u_y，并判断流动是否无旋。

1）$\psi=10y$；

2）$\psi=5y-10x$；

3）$\psi=y-x^2$

9-2　已知平面势流的流函数$\psi=xy+2x-3y+10$，求速度势函数和流速分量。

9-3　已知平面势流的速度势函数$\varphi=\frac{2x}{x^2-y^2}$，求流函数，并分析流线的图形。

9-4　已知平面流动的流速分量

$$u_r=\frac{1}{2\pi r},\quad u_\theta=-\frac{1}{2\pi r}$$

证明此流动是无旋的，并求流函数。

提示：柱坐标系中$\omega_z=\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\theta}{r}$。

9-5　已知平面势流的速度势函数$\psi=r^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$，求流函数和流速分量。

9-6　空气在90°矩形断面弯管中流过（可近似认为是无旋流动），弯管内外侧壁的曲率半径分别为0.4m和1.4m，直段中等速均匀来流的流速为10m/s，空气密度为1.2kg/m³，求弯管内外侧壁的流速及压强差。

9-7　绕夹角为α的两平面壁的角隅流动，设转角点的速度和压强皆为零，流动的速度势函数为$\varphi=$

$ar^{\frac{\pi}{\alpha}}\cos\frac{\pi\theta}{\alpha}$，式中$\alpha$为常数，求两边壁的压强分布。

9-8 流速$u_0=4\text{m/s}$的等速均匀流与位于坐标原点的汇流叠加，汇流的强度$Q=4\text{m}^3/\text{m}\cdot\text{s}$，试绘出叠加后流动的流线族。求出流函数、驻点位置，以及流体流入和流过汇的分界线方程。

9-9 在（a，0）和（$-a$，0）两点各放置等强度的源点，证明在圆周$x^2+y^2=a^2$上任意一点的速度都平行于y轴，并证明此速度的大小与y成反比。证明y轴是一条流线。

9-10 两强度皆为$Q=4\pi$的源流，分别位于（1，0）和（-1，0）处，如将它们与一流函数为$\psi=2y$的流动叠加，试分析流动情况，并求驻点位置。

9-11 在位于原点的偶极流中，（0，2）点的流速为4m/s，求此偶极流的强度m。

9-12 等速均匀流$\psi_1=7y$与汇流$\psi_2=-3\theta$叠加后是等速均匀流绕钝头半无限长柱体的后部流动，

1）求驻点坐标；

2）证明该柱体的最大宽度为$\frac{6}{7}\pi$。

9-13 已知流速场为

$$u_r=\frac{M}{2\pi}\frac{\cos\theta}{r^2}, \quad u_\theta=\frac{M}{2\pi}\frac{\sin\theta}{r^2} \quad (M\text{为常数})$$

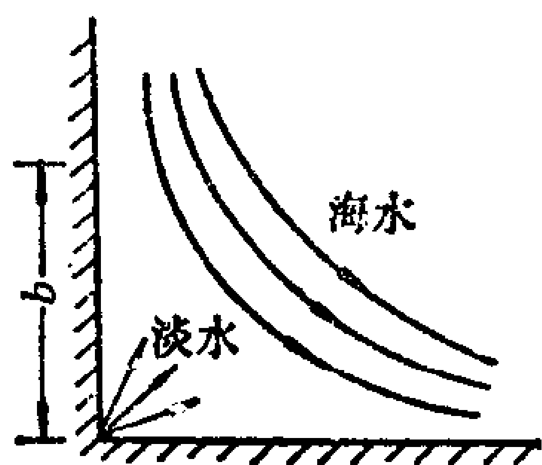
1）求流函数ψ；

2）证明流线为一组圆心位于y轴上、圆周通过坐标原点的圆。

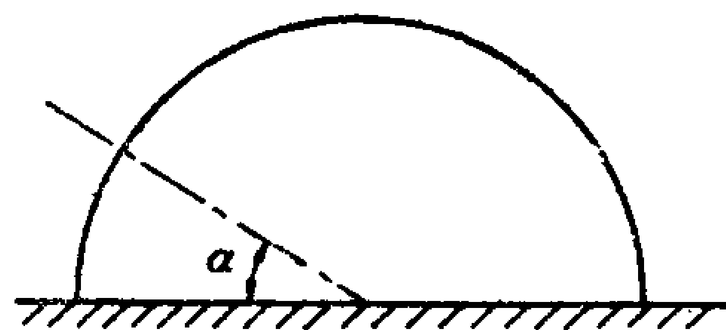
9-14 在圆柱体无环量绕流中有一条曲线，其上各点的速度和压强分别等于无穷远处未受干扰的速度u_0和压强p_0，求这条曲线的方程。

9-15 某地有一直角海岸线形成的海湾，湾中海水流动可近似看成是直角内的平面势流，其速度势函数$\varphi=ar^2\cos2\theta$（a为给定常数）。靠近直角湾有一淡水层，为了避免海水渗入淡水，在直角湾顶角处排放一部分淡水，使b距离内海水不接触海岸，求顶角应排放的单位厚度流量Q，绘出在此流量下海水与淡水的分界线。

9-16 半圆柱形的蒙古包，门开在地面处，当受到迎门吹来的大风袭击时，蒙古包有被吹起的危险。有一牧民想出一个办法，他在由地面算起的α角处开一通气孔，大风来时把门关严，于是作用在蒙古包上的升力消除了，如不计蒙古包的重量，气流认为是不可压缩流体无旋流动，α应为多少？

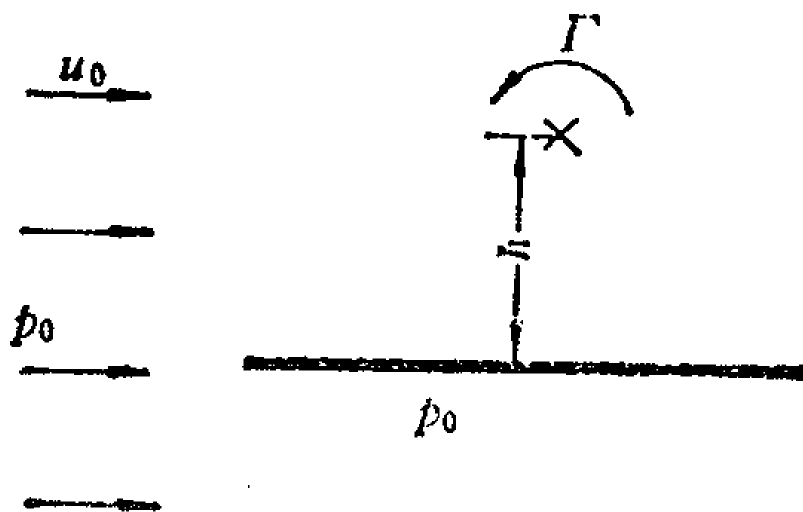


题 9-15图



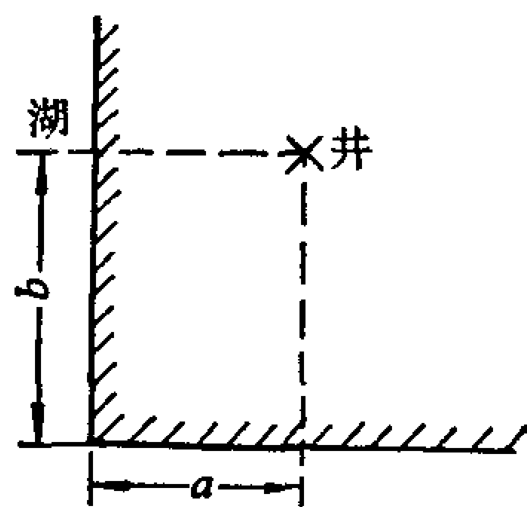
题 9-16图

9-17 强度为Γ的势涡点，位于无限长、宽平板上方h处，沿平板又有一等速均匀流，它在无穷远处的速度为u_0，压强为p_0，若平板背面的压强也是p_0，求单位宽度平板上受到的作用力。当$h\to\infty$时，该力的表达式简化成什么形式。



题 9-17图

9-18　靠近直角岸边有一单井，湖水通过厚度为T的含水层渗向单井，流量为Q，试求含水层中地下水流的速度势函数和流函数。证明所得速度势函数满足湖岸的边界条件。



题 9-18图

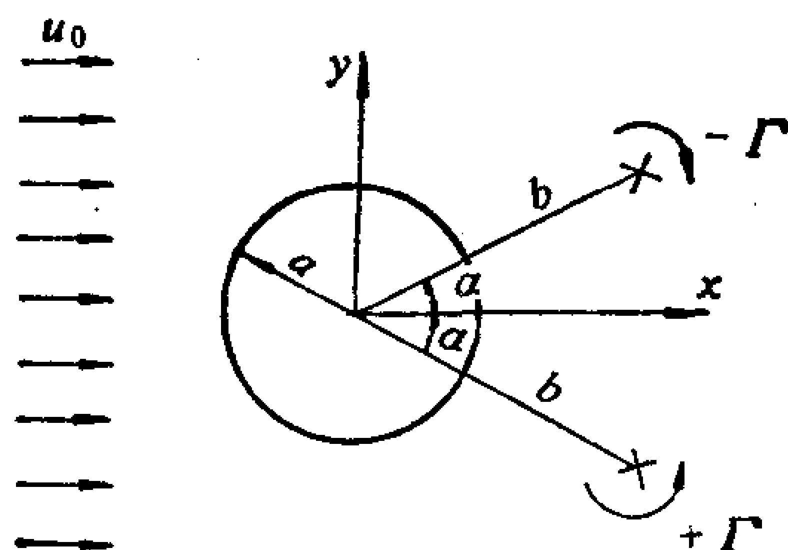
9-19　有一直径1.22m、长7.6m的圆柱体，以90r/min的转速绕自身轴线旋转，轴线垂直于速度为$u_0=36.6$m/s的气流。空气的重度为12N/m³，求：

1）围绕圆柱体的环量大小；

2）作用于圆柱体上、垂直于来流的力；

3）驻点位置。

9-20　等速均匀流u_0绕半径为a的圆柱体流动，圆柱后面有两个固定的势涡，其位置如图所示。求此圆柱绕流的速度势函数和流函数。证明所得流函数满足圆柱表面的边界条件。



题 9-20图

第十章 边界层理论基础与绕流运动

这一章要研究的是流体绕物体的运动，也就是外流问题。实际工程中，如河水流过桥墩、风绕建筑物流动、船舶在水中航行、飞机在大气中飞行，以至粉尘或泥砂在空气或水中沉降等等，都是绕流运动。上述各种绕流运动虽然有些是流体绕过静止物体的运动，另一些是物体在静止流体中作等速运动，但是在后一种情况中，我们如把坐标系固结在物体上，讨论流体相对于动坐标系的运动，它就成为流体绕过相对静止物体的运动。由于坐标系作等速直线运动，仍为惯性坐标系，这两种情况的流体与物体之间的相互作用是等价的。因此以后我们所讨论的绕流问题，都把绕流看成是等速均匀流绕过静止物体的流动。

流体作用于绕流物体上的力可分解为两个分量：一个是平行于来流方向的分量，称为阻力；另一个是垂直于来流方向的分量，称为升力。本章主要讨论绕流阻力。绕流阻力与边界层有密切关系，为此先介绍边界层的概念及其理论基础。

§ 12-1 边 界 层 概 念

边界层，也称**附面层**，是高雷诺数时出现在紧靠固体壁面附近速度梯度很大的薄流层。我们都已知道，雷诺数表征了惯性力与粘滞力的对比关系。当雷诺数很大时，意味着惯性力远大于粘滞力，因而在分析这种流动时，似乎可以忽略粘滞力的作用，即把流体视为理想流体。如流体是不可压缩的，质量力中只有重力，则当束流为等速均匀流时，它对任何物体的绕流都是无旋的，可按势流理论求得流场的速度分布和压强分布。但是，如以圆柱绕流为例，我们发现这样得到的速度场在物体壁面附近与实际情况相差甚远，得到的物体表面压强分布在物体尾部也与实际情况有很大差别（见图9-17）。如按理想流体得到的结果计算，流体作用在物体上的总压力为零，显然与实际情况不符。这就是所谓达朗贝尔疑问。在边界层理论提出之前，这个疑问是无法解释的。实际上当流体流经固体壁面时，紧贴壁面的一层流体与固体壁面之间并无滑移运动，其速度为零。在壁面附近沿法线方向速度由零迅速增大到按理想流体求得的速度（见图10-1）。这就是说，在壁面附近有一很薄的流层，存在着很大的速度梯度，在这个流层内粘性是不能忽略的，这个流层就是边界层。边界层以外的流区，粘性可以忽略，可按理想流体处理。边界层很薄，在求解边界层以外的流场时，可把它的内边界看成与物体表面重合，即忽略边界层的存在，根据势流理论求出边界层外边界的速度和压强，从而得到了边界层的外边界条件，然后再根据纳维一斯托克斯方程求解边界层内的流动。由于粘性作用仅限于这一薄层中，纳维一斯托克斯方程在这个条件下可大大简化，这样就找到了求解粘性流体绕流的途径。边界层概念是

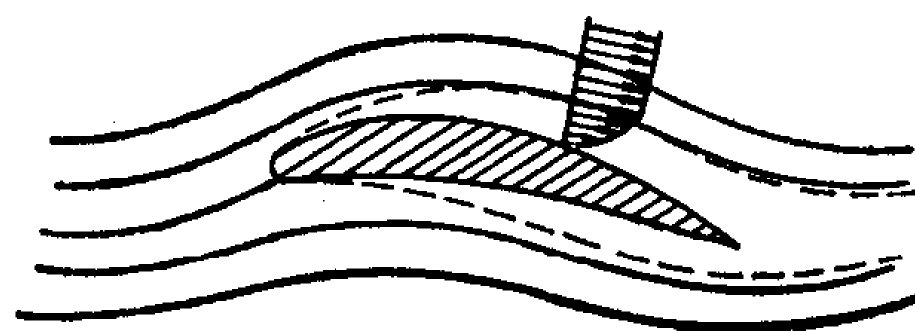


图 10-1 边界层

1904年由普朗特首先提出的。它大大拓宽了理想流体的适用性，为解决实际流体绕流问题开辟了途径，并使绕流中的一些复杂现象得到解释，是流体力学和传热学发展史上的一项重大成就。

下面以顺流置放的平板在等速均匀来流U_0中的绕流为例进一步说明边界层的特征。如平板的厚度接近于零，则理想流体流过平板时平板表面上的速度仍为U_0，它就是边界层外边界上的速度。边界层内沿平板法线方向速度由零迅速增大到外边界处的U_0（见图10-2）。在边界层外边层处速度是逐渐接近于U_0的，边界层与主流之间没有明显的分界。严格说来，边界层的外边层应在无穷远处，实际上在离平板不远处速度即已非常接近U_0，通常以速度达到主流区速度的0.99处作为边界层的外边界。沿物面法线方向由物面到边界层外边界的距离为边界层的厚度，以δ表示。边界层厚度在平板前缘处为零，随着平板的阻滞作用向流体内部扩展，δ沿流动方向逐渐增厚，因此边界层厚度是由平板前缘算起的距离x的函数。

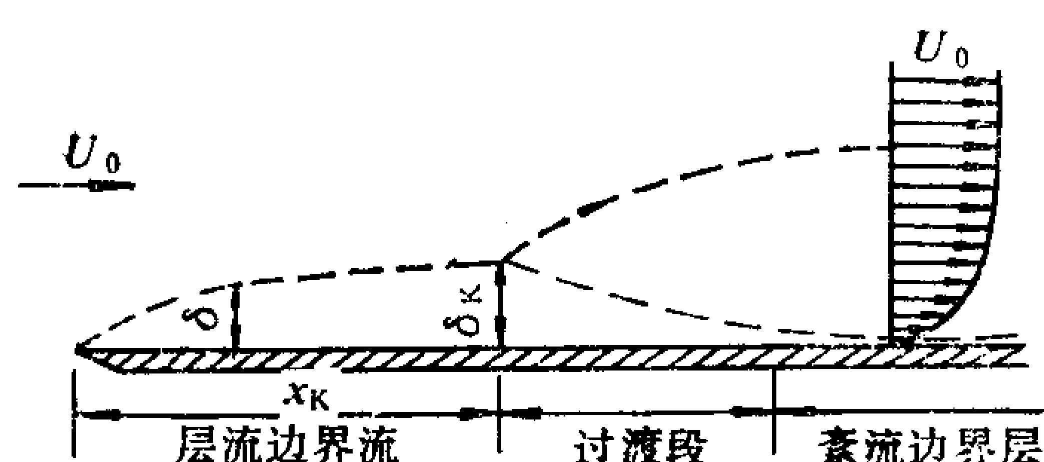


图 10-2 平板边界层的流态

边界层内既然是粘性流动，当然也会有层流和紊流。在边界层的前部，由于δ很薄，流速梯度很大，流动受粘滞力控制，边界层内为层流。顺流而下，随着边界层的厚度不断增大，速度梯度逐渐减小，边界层雷诺数$Re_\delta=\dfrac{\rho U_0\delta}{\mu}$逐渐加大。当到达距离$x_k$后，层流边界层开始转变为紊流边界层。层流边界层与紊流边界层之间有一段不长的过渡段。和管道内的紊流一样，紊流边界层内紧靠壁面处也有一层极薄的粘性底层。层流边界层开始转变为紊流边界层的断面称为**转捩断面**。试验表明，平板的转捩断面大致发生在边界层雷诺数$Re_{\delta k}=\dfrac{\rho U_0\delta_k}{\mu}=2700\sim8500$，它和来流的紊动强度及壁面的粗糙情况有关。来流的紊动强度越大，壁面越粗糙，转捩断面的临界雷诺数越小。

因δ是距离x的函数，边界层雷诺数中的特征长度也可用x表示，即

$$Re_x=\frac{\rho U_0 x}{\mu}$$

转捩断面处的这个临界雷诺数约为$Re_{xk}=\dfrac{\rho U_0 x_k}{\mu}=3\times10^5\sim3\times10^6$。如平板的长度为$L$，则当$Re_L=\dfrac{\rho U_0 L}{\mu}<Re_{xk}$时，边界层为层流；当$Re_L>Re_{xk}$时，在$x_k$段上为层流，$x_k$以后的边界层为紊流。

不仅绕流中存在边界层，内流中也同样有边界层。例如在管道进口断面上流速是以接近于均匀分布流入的。进入管道后，由于壁面的阻滞作用，靠壁面的流体逐层出现减速，形成了边界层。但通过各过流断面的流量是不变的，因而中间部分的流体必然产生加速，于是从进口断面开始，沿流动方向过流断面上的流速分布是不断变化的，边界层逐渐加厚（见图10-3）。当边

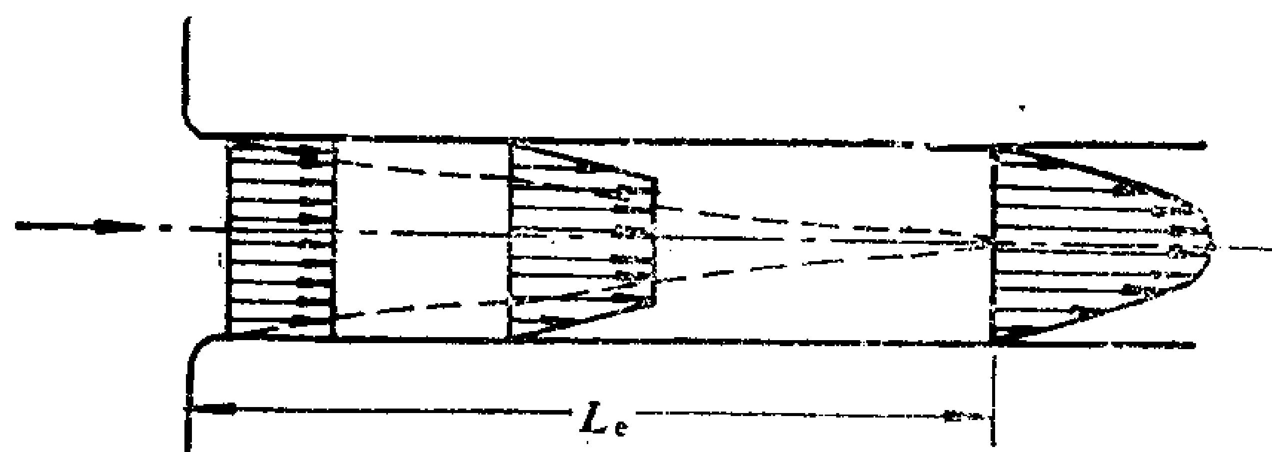


图 10-3 管道的入口段

界层扩展到占有整个管道断面后，成为完全发展的管流。此后过流断面上的流速分布不再变化，这才形成均匀流。从进口断面到开始形成均匀流的断面称为入口段，其长度以L_e表示。希勒（Schiller）取管轴处流速达到$0.89U_{max}$的断面作为入口段的最终断面，得到层流入口段的长度为

$$L_e = 0.02875d\mathrm{Re} \tag{10-1}$$

紊流入口段的长度可按下式估算

$$L_e = (25\sim40)d \tag{10-2}$$

上两式中 d 皆为管道直径。

入口段中流速分布的不断改组会引起附加损失。但在大多数的工程计算中，这部分损失可考虑在进口的局部损失中，因而把整个管道都看成是均匀流，忽略入口段的影响。

§ 10-2 边界层微分方程

普朗特用量级比较法对纳维-斯托克斯方程进行了简化，从而为边界层的求解找到了途径。

对于平面恒定流动，忽略质量力（在绕流的计算中质量力通常可以忽略）的纳维-斯托克斯方程为

$$\left.\begin{aligned} u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)\\ u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right)\end{aligned}\right\} \tag{10-3}$$

为了便于进行量级比较，令上式中惯性项和粘性项中的各变数分别等于某一特征常数与无量纲变数的乘积，即

$$x = Lx^*,\ \ y=\delta_L y^*,\ \ u_x = U_x u_x^*,\ \ u_y = U_y u_y^* \tag{10-4}$$

式中L为物体沿x方向的长度；δ_L为边界层的最大厚度；U_x和U_y分别为边界层内流体在x和y方向的最大速度分量；x^*、y^*、u_x^*、u_y^*为各对应的无量纲变数。

在边界层内x的变化范围为$0\leqslant x\leqslant L$，因而x^*的变化范围为$0\leqslant x^*\leqslant 1$，即$x^*$的最大值为1，故以1作为$x^*$的量级。同理，其它无量纲变数$y^*$、$u_x^*$、$u_y^*$的量级也都是1。

将（10-4）式代入（10-3）式的惯性项和粘性项中

$$\underset{①}{\frac{U_x^2}{L}u_x^*\frac{\partial u_x^*}{\partial x^*}}+\underset{②}{\frac{U_xU_y}{\delta_L}u_y^*\frac{\partial u_x^*}{\partial y^*}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\underset{⑤}{\frac{U_x}{L^2}\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial x^{*2}}}+\underset{⑥}{\frac{U_x}{\delta_L^2}\frac{\partial^2 u_x^*}{\partial y^{*2}}}\right)$$

$$\underset{③}{\frac{U_xU_y}{L}u_x^*\frac{\partial u_y^*}{\partial x^*}}+\underset{④}{\frac{U_y^2}{\delta_L}u_y^*\frac{\partial u_y^*}{\partial y^*}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\underset{⑦}{\frac{U_y}{L^2}\frac{\partial^2 u_y^*}{\partial x^{*2}}}+\underset{⑧}{\frac{U_y}{\delta_L^2}\frac{\partial^2 u_y^*}{\partial y^{*2}}}\right)$$

式中无量纲变数的量级皆为1，因而惯性项和粘性项的量级就取决于它们前面各自的常系数的量级。

根据边界层的特征，可以认为：

1）边界层的厚度远小于特征长度，即$\frac{\delta_L}{L}=\varepsilon$（$\varepsilon$为微量）；

2）边界层内y方向的速度分量远小于x方向的速度分量，因而$\frac{U_y}{U_x}\approx\varepsilon$；

3）边界层内粘项与惯性项同一量级。

下面比较各常系数的量级。

惯性项和粘性项中各项的量级比较 表 10-1

惯性项	粘性项
① $\frac{U_x^2}{L}$	⑤ $\frac{U_x}{L^2}=\frac{U_x}{\delta_L^2}\frac{\delta_L^2}{L^2}=\frac{U_x}{\delta_L^2}\varepsilon^2$
② $\frac{U_xU_y}{\delta_L}=\frac{U_x^2}{L}\frac{U_y}{U_x}\frac{L}{\delta_L}=\frac{U_x}{L}\varepsilon\frac{1}{\varepsilon}=\frac{U_x^2}{L}$	⑥ $\frac{U_x}{\delta_L^2}$
③ $\frac{U_xU_y}{L}=\frac{U_x^2}{L}\frac{U_y}{U_x}=\frac{U_x^2}{L}\varepsilon$	⑦ $\frac{U_y}{L^2}=\frac{U_x}{\delta_L^2}\frac{U_y}{U_x}\frac{\delta_L^2}{L^2}=\frac{U_x}{\delta_L^2}\varepsilon^3$
④ $\frac{U_y^2}{\delta_L}=\frac{U_x^2}{L}\frac{U_y^2}{U_x^2}\frac{L}{\delta_L}=\frac{U_x^2}{L}\varepsilon^2\frac{1}{\varepsilon}=\frac{U_x^2}{L}\varepsilon$	⑧ $\frac{U_y}{\delta_L^2}=\frac{U_x}{\delta_L^2}\frac{U_y}{U_x}=\frac{U_x}{\delta_L^2}\varepsilon$

可见，惯性项中①、②为同一量级，③、④两项小一个量级，因而③、④项可以忽略。粘性项中⑤、⑦、⑧三项比⑥项小一至三个量级，⑤、⑦、⑧三项可以忽略。再考虑到边界层的第三个特征，惯性项和粘性项为同一量级，二者中都不能全部忽略，因而（10-3）式可简化为

$$\left.\begin{aligned}&u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}\\&0=\frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\right\}\quad(10\text{-}5)$$

再加上连续性方程

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0$$

这就是求解恒定层流边界层的微分方程组，称为**边界层微分方程**，又称**普朗特边界层方程**。对于不可压缩流体，式中u_x、u_y、p为未知数，有三个方程，因而方程组是封闭的。

（10-5）式中的$\frac{\partial p}{\partial y}=0$表明，边界层内沿物面外法线方向压强为常数。因此在恒定流条件下，边界层内的压强p仅是坐标x的函数，它就等于边界层外边界上的压强$p_e(x)$。而$p_e(x)$可根据势流理论求得，可看成是已知函数，故（10-5）式中的$\frac{\partial p}{\partial x}$可写成$\frac{dp_e}{dx}$。再由恒定势流的伯诺里积分可知，$p_e(x)$与边界层外边界上的流速$U_e(x)$有下列关系

$$p_e+\frac{\rho U_e^2}{2}=\text{常数}$$

亦即

$$\frac{dp_e}{dx}=-\rho U_e\frac{dU_e}{dx}\quad(10\text{-}6)$$

所以边界层微分方程还可以进一步简化成

$$\left.\begin{aligned}&u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=U_e\frac{dU_e}{dx}+\nu\frac{\partial^2u_x}{\partial y^2}\\&\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\}\quad(10\text{-}7)$$

（10-7）式不仅可以用来解平面壁上的边界层问题，它也可以用来研究曲率很小且没有突然变化的二维曲壁上的边界层。此时可取沿曲面边界的曲线为x轴。曲面的外法线为y轴（如图10-4所示），这样的曲线正交坐标系称为边界层坐标系。

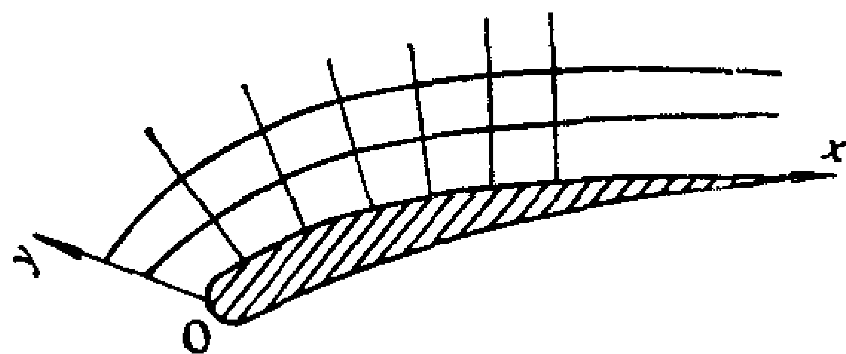


图 10-4　边界层坐标系

边界层微分方程与纳维-斯托克斯方程相比虽已大为简化，但它仍然是一个非线性方程，求解仍有很大困难。即使是绕顺流平板的最简单情况，也只能把（10-7）式变换成三阶常微分方程，然后用数值计算求得解答。布拉修斯首先给出平板绕流的数值解，结果如下：

边界层厚度
$$\delta = 4.92\sqrt{\frac{\nu x}{U_0}} = \frac{4.92x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \tag{10-8}$$

壁面的切应力
$$\tau_w = 0.332\sqrt{\frac{\rho\mu U_0^3}{x}} = \frac{0.332}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\rho U_0^2 \tag{10-9}$$

单侧的摩擦阻力
$$D_f = \int_0^L \tau_w b dx = 0.664b\sqrt{\rho\mu U_0^3 L} = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}\frac{\rho U_0^2}{2}bL \tag{10-10}$$

式中U_0为平板边界层外边界处的流速，也就是无穷远处等速均匀来流的速度；b为平板的宽度。

绕流的摩擦阻力工程上常用下式计算

$$D_f = C_f\frac{\rho U_0^2}{2}A_f \tag{10-11}$$

式中，C_f——摩阻系数；A_f——切应力作用的面积，在平板的情况下$A_f = bL$。因此平板绕流的摩阻系数为

$$C_f = \frac{2D_f}{\rho U_0^2 bL} = \frac{1.328}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \tag{10-12}$$

§ 10-3　边界层的动量积分关系式

用边界层微分方程求解边界层问题遇到的困难，促使人们去寻求各种近似的解法，其中利用冯·卡门（Karman, Th.von）于1921年提出的动量积分关系式，是应用最普遍的一种方法。

设恒定等速均匀流绕经一二维物体。取边界层坐标系，在纵坐标x处取单宽微元体积$ABCD$为控制体，它的前后两个面AB、DC为物面的外法向平面，相距dx，上下两个面AD、BC分别为边界层的外边界面和物体的表面（如图10-5所示）。现将恒定流动量方程（4-57）式用于此控制体，列x方向的动量方程

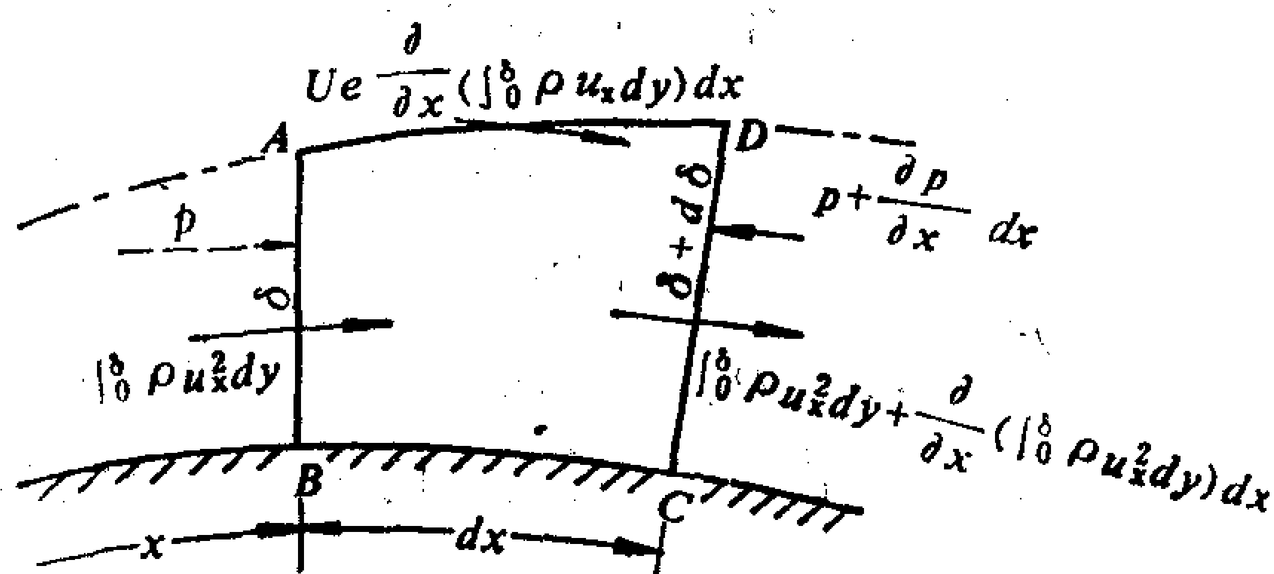


图 10-5　推导动量积分关系式的控制体

经AB面流入控制体的动量 $K_{AB}=\int_0^\delta \rho u_x^2 dy$

经DC面流出控制体的动量 $K_{DC}=K_{AB}+\frac{\partial K_{AB}}{\partial x}dx=\int_0^\delta \rho u_x^2 dy+\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u_x^2 dy\right)dx$

经AD面流入控制体的动量 $K_{AD}=U_e\rho Q_{AD}$

U_e为流经AD的流速，由于dx为微小量，可认为在AD面上U_e为常数。又因物面附近的流线与物面近似平行，U_e可认为与x轴平行。ρQ_{AD}为流经AD面的质量流量，根据连续性方程$\rho Q_{AD}=\rho Q_{DC}-\rho Q_{AB}$，而

$$\rho Q_{AB}=\int_0^\delta \rho u_x dy$$

$$\rho Q_{DC}=\rho Q_{AB}+\frac{\partial(\rho Q_{AB})}{\partial x}dx=\int_0^\delta \rho u_x dy+\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u_x dy\right)dx$$

$$\therefore\quad \rho Q_{AD}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u_x dy\right)dx$$

$$K_{AD}=U_e\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u_x dy\right)dx$$

单位时间净流出控制体的动量为

$$\Delta K_x=K_{DC}-K_{AB}-K_{AD}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u_x^2 dy\right)dx-U_e\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^\delta \rho u_x dy\right)dx$$

再讨论作用于控制体内流体上的外力。边界层很薄，质量力可以忽略，只需考虑表面力。先分析法向力。由于$\frac{\partial p}{\partial y}=0$，这表明在$AB$和$DC$面上压强是均匀分布的，因此作用在这两个面上的总压力分别为$p\delta$和$\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)(\delta+d\delta)$。$AD$面外侧的流体可认为是理想的，其压强具有流体静压强的性质，所以作用在AD面上的总压力在x方向的分量可按静止流体中求曲面总压力的水平投影的方法计算，即等于AD面上的平均压强$p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}$与曲面在垂直于$x$轴的投影面积$d\delta$的乘积。壁面$BC$作用于流体上的总压力因垂直于$x$轴，在$x$方向无分量。

再分析切向力。AD面上因速度梯度趋近于零，切应力可忽略。这样，沿流向就只有流体与物面接触的BC面上有切应力，令它为τ_w。因此沿x方向作用于控制体上所有外力之和为

$$\Sigma F_x=p\delta+\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)d\delta-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)(\delta+d\delta)-\tau_w dx$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{dx}{2}d\delta-\frac{\partial p}{\partial x}dx\delta-\tau_w dx$$

忽略高阶微量

$$\Sigma F_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dx\delta - \tau_w dx$$

令作用力与净流出的动量相等，得

$$\tau_w + \frac{\partial p}{\partial x}\delta = U_e \frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta \rho u_x dy\right] - \frac{d}{dx}\left[\int_0^\delta \rho u_x^2 dy\right]$$

对于不可压缩流体恒定流动，式中ρ为常数，p与积分上限δ都只是x的函数，因此可把式中的$\frac{\partial}{\partial x}$改写成$\frac{d}{dx}$，$\rho$也可从积分或微分号中提出

$$\frac{\tau_w}{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}\delta = U_e \frac{d}{dx}\int_0^\delta u_x dy - \frac{d}{dx}\int_0^\delta u_x^2 dy$$

再将（10-6）式代入，即得

$$\frac{\tau_w}{\rho} = U_e \frac{d}{dx}\int_0^\delta u_x dy + U_e\delta\frac{dU_e}{dx} - \frac{d}{dx}\int_0^\delta u_x^2 dy \qquad (10\text{-}13)$$

这就是用于边界层近似计算的动量积分关系式。为了计算方便，常把它改写成下面的形式。

U_e只是x的函数，对y积分时可把它看成常数，因此（10-13）式等号右侧的第一项可写成

$$U_e \frac{d}{dx}\int_0^\delta u_x dy = \frac{d}{dx}\int_0^\delta U_e u_x dy - \frac{dU_e}{dx}\int_0^\delta u_x dy$$

等号右侧的第二项可写成

$$U_e\delta\frac{dU_e}{dx} = \frac{dU_e}{dx}\int_0^\delta U_e dy$$

把它们代入（10-13）式中，就得到动量积分关系式的另一种表达形式

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx}\left[U_e^2\delta\int_0^1 \frac{u_x}{U_e}\left(1 - \frac{u_x}{U_e}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)\right] + \frac{dU_e}{dx}\left[U_e\delta\int_0^1\left(1 - \frac{u_x}{U_e}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)\right] \qquad (10\text{-}14)$$

如物体为平板，则$U_e = U_0$ = 常数，$\frac{dU_e}{dx} = 0$，U_0为无穷远处的来流速度。故上式简化为

$$\frac{\tau_w}{\rho} = U_0^2 \frac{d}{dx}\left[\delta\int_0^1 \frac{u_x}{U_0}\left(1 - \frac{u_x}{U_0}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)\right] \qquad (10\text{-}15)$$

在推导动量积分关系式的过程中未涉及流动的型态，因此它既可用于层流边界层，也适用于紊流边界层。

（10-13）式或（10-14）式中有三个未知数u_x、δ、τ_w，要解出它还需要补充两个关系式。首先要给出断面上的速度分布$\frac{u_x}{U_e} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$，以便求出式中的两个积分，它们都是$\delta$的函数。然后再根据流动所属的阻力区，确定$\tau_w$的表达式，从而得到$\tau_w$与$\delta$的关系式

$\tau_w=f(\delta)$。这样就可以从这个常微分方程中解得边界层厚度沿程的变化$\delta(x)$。将它代入$\tau_w=f(\delta)$中又可得到τ_w沿程的变化。下面就以平板上的层流和紊流边界层为例，说明动量积分关系式的应用。

§10-4 平板边界层的近似解

平行于来流速度的平板绕流是最简单的一种绕流运动。平板作用于流体只有摩擦阻力。它的大小及其在平板上的分布，以及边界层厚度沿程的变化，都可以利用动量积分关系式求得。

一、层流边界层

利用动量积分关系式解边界层问题先要给出断面上的速度分布$\frac{u_x}{U_e}=f\left(\frac{y}{\delta}\right)$。假设的速度分布越接近实际，得到的结果越精确。就因为速度分布是假设的，由动量积分关系式求得的解只能是近似解。层流时给出的速度分布有各次多项式、三角函数式等多种形式。现以三次多项式为例来解平板层流边界层。

设速度分布关系式为

$$\frac{u_x}{U_0}=a\left(\frac{y}{\delta}\right)^3+b\left(\frac{y}{\delta}\right)^2+c\left(\frac{y}{\delta}\right)+d \qquad (10\text{-}16)$$

式中a、b、c、d为待定常数，需根据边界条件确定。

为了求得这四个系数，需用四个边界条件。

1）$y=0$处，$u_x=0$，代入上式，得$d=0$。

2）因$y=0$处，$u_x=0$，$u_y=0$，代入边界层微分方程

$$u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=U_e\frac{dU_e}{dx}+\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

得$\nu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}=-U_e\frac{dU_e}{dx}$。而平板绕流中$U_e=U_0=$常数，$\frac{dU_e}{dx}=0$，故

$$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=0$$

代入（10-16）式

$$\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)_{y=0}=U_0\left(\frac{6ay}{\delta^3}+\frac{2b}{\delta^2}\right)_{y=0}=0$$

$$\therefore b=0$$

3）$y=\delta$处，$u_x=U_0$，由此得

$$a+b+c+d=1$$

4）$y=\delta$处，$\frac{\partial u_x}{\partial y}=0$，即$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=\delta}=U_0\left(\frac{3ay^2}{\delta^3}+\frac{2by}{\delta}+\frac{c}{\delta}\right)_{y=\delta}=0$

或

$$3a+2b+c=0$$

联立解由这四个边界条件得到的四个方程

$$a=-\frac{1}{2},\ b=0,\ c=\frac{3}{2},\ d=0$$

因此速度分布的三次多项式的具体形式是

$$\frac{u_x}{U_0}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \qquad (10\text{-}17)$$

由此可算出（10-15）式中的积分

$$\int_0^1\frac{u_x}{U_0}\left(1-\frac{u_x}{U_0}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)=\frac{117}{840}$$

层流的切应力遵循牛顿内摩擦定律，即

$$\tau_w=\mu\left(\frac{du_x}{dy}\right)_{y=0}=\frac{3}{2}\mu\frac{U_0}{\delta}$$

将它们代入（10-15）式中

$$\frac{3\mu U_0}{2\rho\delta}=\frac{117}{840}U_0^2\frac{d\delta}{dx}$$

整理后

$$\delta d\delta=\frac{420}{39}\frac{\mu}{\rho U_0}dx$$

积分上式

$$\delta^2=\frac{840}{39}\frac{\mu}{\rho U_0}x+c$$

在$x=0$处，$\delta=0$，代入上式，得$c=0$，故

$$\delta=4.64\sqrt{\frac{\mu x}{\rho U_0}}=\frac{4.64x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}} \qquad (10\text{-}18)$$

$$\tau_w=0.323\sqrt{\frac{\rho\mu U_0^3}{x}}=\frac{0.323}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}\rho U_0^2 \qquad (10\text{-}19)$$

$$D_f=\int_0^L\tau_w b\,dx=0.646b\sqrt{\rho\mu U_0^3L}=\frac{1.292}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}}\frac{\rho U_0^2}{2}bL \qquad (10\text{-}20)$$

$$C_f=\frac{1.292}{\sqrt{\mathrm{Re}_L}} \qquad (10\text{-}21)$$

比较（10-18）～（10-20）式与（10-8）～（10-10）式，可见近似解与勃拉修斯精确解的结构形式完全相同，所得结果也很接近（近似解的阻力误差不超过3％），这表明使用积分关系式是可以得到令人满意的结果的。

现将速度分布函数$\frac{U_x}{U_0}=f\left(\frac{y}{\delta}\right)$分别为二次到四次多项式及三角函数时所得结果列表10-2，以便比较。

二、紊流边界层

如边界层内流动为紊流，根据第七章中所分析的圆管紊流的性质，可以假设平板紊流边界层中速度分布为对数函数。但采用对数分布解动量积分关系式比较复杂。由表（10-2）中可以看出，所假设的速度分布对积分关系式所得结果并不敏感，为此我们采用计算比较简便的速度分布七分之一次方律进行近似计算，在圆管中它的形式是

$$\frac{u}{u_m}=\left(\frac{y}{r_0}\right)^{1/7}$$

在边界层中则应以边界层外边界上的速度U_0代替管轴上的速度u_m，以边界层厚度δ代替圆管半径r_0

$$\frac{u_x}{U_0}=\left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/7}$$

不同速度分布计算平板边界层的比较　　表 10-2

函数名称	$f\left(\frac{y}{\delta}\right)$	$\delta\sqrt{\frac{\rho U_0}{\mu x}}$	$\tau_w\sqrt{\frac{x}{\rho\mu U_0^3}}$	$C_f\sqrt{Re_l}$
二次多项式	$2\left(\frac{y}{\delta}\right)-\left(\frac{y}{\delta}\right)^2$	5.48	0.365	1.46
三次多项式	$\frac{3}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)^3$	4.64	0.323	1.292
四次多项式	$2\left(\frac{y}{\delta}\right)-2\left(\frac{y}{\delta}\right)^3+\left(\frac{y}{\delta}\right)^4$	5.83	0.343	1.372
三角函数式	$\sin\frac{\pi}{2}\frac{y}{\delta}$	4.79	0.327	1.310
精确解		5	0.332	1.328

由此可得（10-15）式中的积分为

$$\int_0^1\frac{u_x}{U_0}\left(1-\frac{u_x}{U_0}\right)d\left(\frac{y}{\delta}\right)=\frac{7}{72} \tag{10-22}$$

紊流的壁面切应力关系式不能像层流那样根据牛顿内摩擦定律对速度剖面直接求导数得到，需要借助于经验或半经验的阻力公式。在第七章中我们得到管流切应力的表达式 $\tau_w=\frac{\lambda}{8}\rho v^2$，与速度分布七分之一次方定律相适应的“$\lambda$”计算式是勃拉休斯公式

$$\lambda=\frac{0.3164}{Re^{0.25}}$$

因此

$$\tau_w=\frac{0.3164}{8Re^{0.25}}\rho v^2=0.0332\rho^{3/4}v^{7/4}\left(\frac{\mu}{r_0}\right)^{1/4} \tag{10-23}$$

为了把式中的断面平均速度 v 改换成管轴处的最大速度 u_m，以便适用于平板边界层，现寻求 v 与 u_m 的关系。在圆管中

$$v=\frac{\int_0^{r_0}u2\pi rdr}{\pi r_0^2}=\frac{2\pi u_m\int_0^{r_0}\left(\frac{y}{r}\right)^{1/7}rdr}{\pi r_0}$$

式中 $r=r_0-y$，$dr=-dy$，代入上式后，积分得

$$v=0.817u_m \tag{10-24}$$

将（10-24）式代入（10-23）式中，并以 U_0、δ 分别代替式中的 u_m 和 r_0

$$\tau_w=0.0233\rho^{3/4}U_0^{7/4}\left(\frac{\mu}{\delta}\right)^{1/4} \tag{10-25}$$

于是紊流边界层的动量积分关系式为

$$0.0233\rho^{-1/4}U_0^{7/4}\left(\frac{\mu}{\delta}\right)^{1/4}=\frac{7}{72}U_0^2\frac{d\delta}{dx}$$

整理后

$$\delta^{1/4}d\delta=0.24\left(\frac{\mu}{\rho U_0}\right)^{1/4}dx$$

对上式积分

$$\frac{4}{5}\delta^{5/4}=0.24\left(\frac{\mu}{\rho U_0}\right)^{1/4}x+C$$

积分常数C须根据边界条件确定。但这个边界条件很难准确给出，因为平板的前段是层流边界层，紊流边界层开始的位置，以及在此位置上的边界层厚度都难以确定。通常的办法是近似地认为紊流边界层是从平板的前缘开始，即$x=0$处，$\delta=0$。这样处理在高雷诺数条件下还比较合理，因为此时层流边界层只占整个平板的很小一段。

将近似边界条件代入，可得$C=0$，于是

$$\delta=0.381\left(\frac{\mu}{\rho U_0}\right)^{0.2}x^{0.8}=0.381\frac{x}{\mathrm{Re}_x^{0.2}} \tag{10-26}$$

（10-25）式中的δ用（10-26）式代入，得

$$\tau_w=0.0297\rho^{0.8}U_0^{1.8}\left(\frac{\mu}{x}\right)^{0.2}=\frac{0.0297}{\mathrm{Re}_x^{0.2}}\rho U_0^2 \tag{10-27}$$

$$D_f=\int_0^L\tau_w b\,dx=0.037\rho^{0.8}U_0^{1.8}\mu^{0.2}bL^{0.8}=\frac{0.074}{\mathrm{Re}_L^{0.2}}\frac{\rho U_0^2}{2}bL \tag{10-28}$$

$$C_f=\frac{0.074}{\mathrm{Re}_L^{0.2}} \tag{10-29}$$

比较层流边界层与紊流边界层所得结果，层流边界层厚度与$x^{0.5}$成正比，壁面切应力与$x^{0.5}$成反比，摩阻系数与$\mathrm{Re}_L^{0.5}$成反比。而紊流边界层则分别为$\delta\propto x^{0.8}$，$\tau_w\propto x^{-0.2}$，$C_f\propto \mathrm{Re}_L^{-0.2}$。这表明紊流边界层厚度沿板长的增加比层流快；壁面切应力沿板长的减小比层流边界层慢；当Re_L增大时，摩阻系数的减小比层流慢。此外，紊流边界层的阻力与速度的1.8次方成正比，而层则与速度的1.5次方成正比，当条件相同时，紊流边界层的摩阻比层流的大。

如将（10-12）式和（10-29）式绘在图上，并与实验结果进行比较（见图10-6）。可见，层流边界层的摩阻系数公式在$10^5<\mathrm{Re}_L<5\times10^5$范围内与实验结果基本符合。紊流边界层摩阻系数公式（10-29）在$5\times10^5<\mathrm{Re}_L<10^7$范围内与实验结果接近。$\mathrm{Re}_L>10^7$时，可采用史里希丁（H.Schlichting）用对数速度剖面与积分关系式联合求解得到的摩阻系数公式

$$C_f=0.455(\log\mathrm{Re}_L)^{-2.58} \tag{10-30}$$

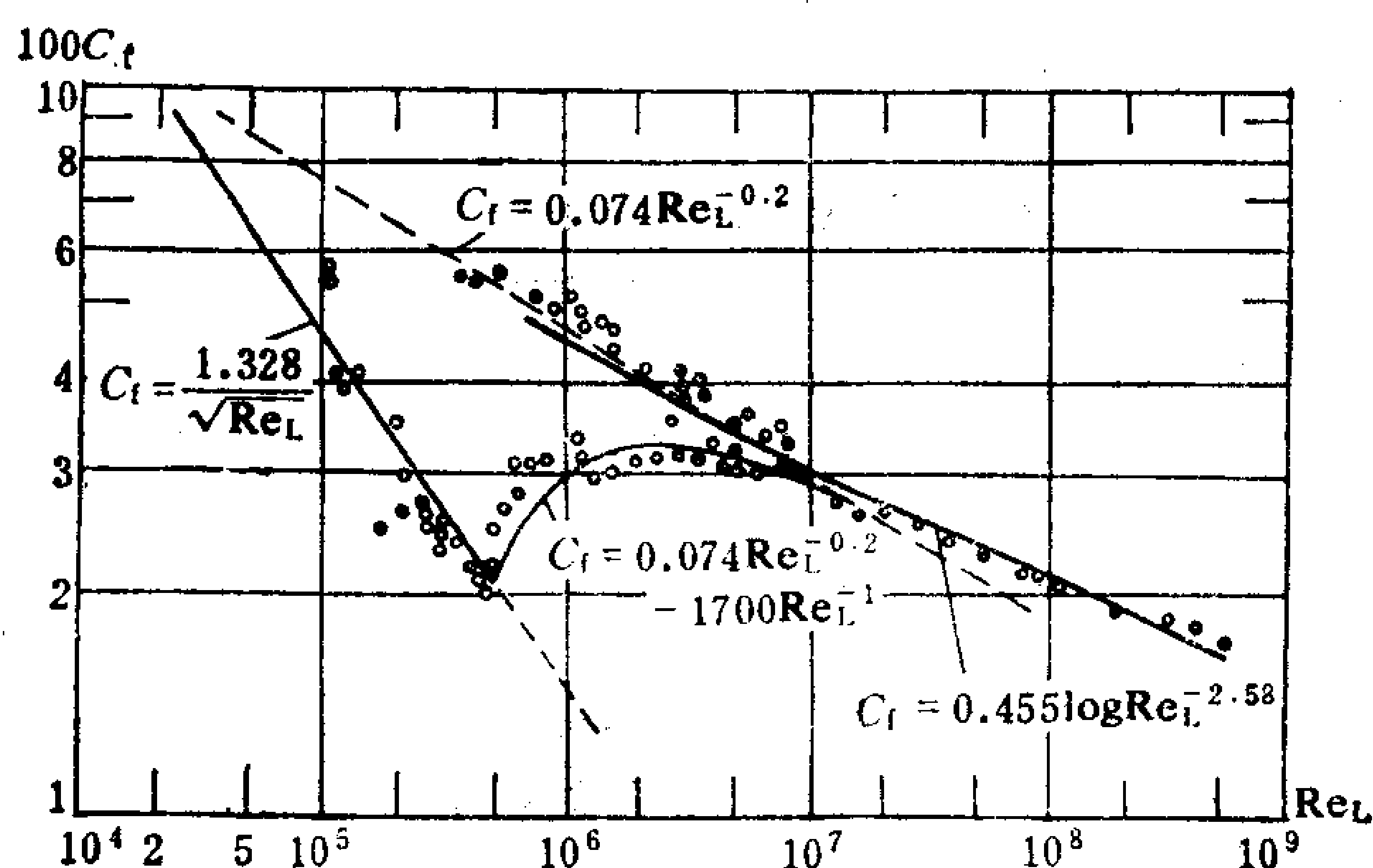


图 10-6　光滑平板的摩阻系数

它的适用范围可达$Re_L = 10^9$。

三、混合边界层

前面讨论了层流边界层和紊流边界层的计算，但实际的边界层往往前段是层流，后段是紊流。在这种混合边界层的情况下，转捩点后则按紊流边界层计算。只有当层流边界层的长度x_k远小于平板长度L时，才能将整个边界层按紊流边界层计算。

转捩点的位置x_k可由临界雷诺数Re_{xk}确定

$$x_k = Re_{xk}\frac{\mu}{\rho U_0}$$

Re_{xk}的范围约为$3\times10^5 \sim 3\times10^6$，通常计算中常采用$Re_{xk} = 5\times10^5$。$x$由零到$x_k$的流段为层流边界层，由$x_k$到$L$的流段为紊流边界层。

$0<x<x_k$段上层流边界层的单宽摩擦阻力按（10-10）式计算

$$D_{fL} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_{xk}}}\frac{\rho U_0^2}{2}x_k$$

$x_k<x<L$段上紊流边界层的单宽摩擦阻力则应这样计算：按（10-28）式计算整个板长上的摩擦阻力减去x_k段上的紊流边界层摩擦阻力，即

$$D_{ft} = \left(\frac{0.074L}{Re_L^{0.2}} - \frac{0.074x_k}{Re_{xk}^{0.2}}\right)\frac{\rho U_0^2}{2}$$

因此整个平板上的摩擦阻力为

$$D_f = D_{fL} + D_{ft} = \left(\frac{1.328}{Re_{xk}^{0.5}}\frac{x_k}{L} + \frac{0.074}{Re_L^{0.2}} - \frac{0.074}{Re_{xk}^{0.2}}\frac{x_k}{L}\right)\frac{\rho U_0^2}{2}L$$

混合边界层的摩阻系数为

$$C_f = \frac{0.074}{Re_L^{0.2}} - \left(\frac{0.074}{Re_{xk}^{0.2}} - \frac{1.328}{Re_{xk}^{0.5}}\right)\frac{x_k}{L}$$

由于

$$\frac{x_k}{L} = \frac{\rho U_0 x_k/\mu}{\rho U_0 L/\mu} = \frac{Re_{xk}}{Re_L}$$

$$C_f = \frac{0.074}{Re_L^{0.2}} - \left(\frac{0.074}{Re_{xk}^{0.2}} - \frac{1.328}{Re_{xk}^{0.5}}\right)\frac{Re_{xk}}{Re_L}$$

如令

$$A = \left(\frac{0.074}{Re_{xk}^{0.2}} - \frac{1.328}{Re_{xk}^{0.5}}\right)Re_{xk}$$

则混合边界层的摩阻系数可写成

$$C_f = \frac{0.074}{Re_L^{0.2}} - \frac{A}{Re_L}$$

A仅是临界雷诺数Re_{xk}的函数，可由表10-3查得。

计算混合边界层摩阻系数的A值　　　　表 10-3

Re_{xk}	3×10^5	5×10^5	10^6	3×10^6
A	1050	1700	3300	8900

【例 10-1】 油液流过一顺流置放的2.5m长的薄板，流速为4m/s，油液的运动粘度$\nu = 10^{-5}m^2/s$，密度$\rho = 850kg/m^3$，试确定离板前缘分别为0.5m、1m、1.5m和2m处边界层的厚度和壁面切应力。

【解】 先求转捩点的位置，以便确定边界层的流态。取临界雷诺数$Re_{xk} = 5\times10^5$

$$x_k = Re_{xk}\frac{\nu}{U_0} = 5\times10^5\frac{10^{-5}}{4} = 1.25\text{m}$$

可见，在x为0.5m和1m处是层流边界层，x为1.5和2m处是紊流边界层。

1）$x = 0.5\text{m}$

层流边界层如按勃拉修斯精确解公式计算

$$Re_x = \frac{U_0 x}{\nu} = \frac{4\times0.5}{10^{-5}} = 2\times10^5$$

$$\delta = \frac{4.92x}{\sqrt{Re_x}} = \frac{4.92\times0.5}{\sqrt{2\times10^5}} = 0.0055\text{m} = 5.5\text{mm}$$

$$\tau_w = \frac{0.332}{\sqrt{Re_x}}\rho U_0^2 = \frac{0.332}{\sqrt{2\times10^5}}\times850\times4^2 = 10.1\text{N/m}^2$$

2）$x = 1.0\text{m}$

$$Re_x = \frac{4\times1}{10^{-5}} = 4\times10^5$$

$$\delta = \frac{4.92\times1}{\sqrt{4\times10^5}} = 0.00778\text{m} = 7.78\text{mm}$$

$$\tau_w = \frac{0.332}{\sqrt{4\times10^5}}\times850\times4^2 = 7.14\text{N/m}^2$$

3）$x = 1.5\text{m}$

因$Re_L = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{4\times2.5}{10^{-5}} = 1\times10^6 < 10^7$，紊流边界层的厚度和壁面切应力按（10-26）、（10-27）式计算

$$Re_x = \frac{4\times1.5}{10^{-5}} = 6\times10^5$$

$$\delta = \frac{0.381x}{Re_x^{0.2}} = \frac{0.381\times1.5}{(6\times10^5)^{0.2}} = 0.04\text{m} = 40\text{mm}$$

$$\tau_w = \frac{0.0297}{Re_x^{0.2}}\rho U_0^2 = \frac{0.0297\times850\times4^2}{(6\times10^5)^{0.2}} = 28.23\text{N/m}^2$$

4）$x = 2\text{m}$

$$Re_x = \frac{4\times2}{10^{-5}} = 8\times10^5$$

$$\delta = \frac{0.381\times2}{(8\times10^5)^{0.2}} = 0.05\text{m} = 50\text{mm}$$

$$\tau_w = \frac{0.0297\times850\times4^2}{(8\times10^5)^{0.2}} = 26.65\text{N/m}^2$$

比较所得结果可以看出：1）边界层厚度沿流动方向逐渐加大，当层流转变为紊流时，边界层会急剧增厚；2）其它条件不变时，紊流边界层的壁面切应力比层流边界层大；3）无论是在层流段还是在紊流段，壁面切应力沿流动方向都各自逐渐减小。

【例 10-2】 一块长10m、宽3m的光滑薄板，以6m/s的速度在水池中拖行，已知水的运动粘度$\nu = 1\times10^{-6}\text{m}^2/\text{s}$，试确定作用在此薄板上的总摩擦阻力及作用于薄板前部2m长板面上的摩擦阻力。

【解】 1）求全板的总摩擦阻力

先确定边界层的流态

$$x_k = Re_{xk}\frac{\nu}{U_0} = 5\times10^5\frac{10^{-6}}{8} = 0.0625m$$

因x_k在整个板长中占有的长度很小，可认为整个板长上都是紊流边界层。又因

$$Re_L = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{8\times10}{10^{-6}} = 8\times10^7 > 10^7$$

摩擦系数C_f按史里希丁公式计算

$$C_{fL} = 0.455(\log Re_L)^{-2.58} = 0.455[\log(8\times10^7)]^{-2.58} = 0.0020$$

$$D_{fL} = 2C_{fL}\frac{\rho U_0^2}{2}bL = 2\times0.002\times\frac{1000\times8^2}{2}\times3\times10 = 3840N$$

2）求前2m板长的摩擦阻力

$$Re_L = \frac{U_0 L}{\nu} = \frac{8\times2}{10^{-6}} = 1.6\times10^7 > 10^7$$

$$C_{fL} = 0.455(\lg 1.6\times10^7)^{-2.58} = 0.00279$$

$$D_{fL} = 2\times0.00279\times\frac{1000\times8^2}{2}\times3\times2 = 1071.4N$$

前2m板长的面积只占整板面积的20%，而阻力占全板的$\frac{1071.4}{3840}\times100 = 27.9\%$，这也表明壁面切应力沿流动方向是逐渐减小的。

【例 10-3】 有一块$1.5\times4.5m^2$的矩形薄板，在空气中以3m/s的速度沿板面方向拖动，已知空气的运动粘度$\nu = 1.5\times10^{-5}m^2/s$，密度$\rho = 1.2kg/m^3$，求薄板沿短边方向和沿长边方向运动时各自的摩擦阻力。

【解】 1）求沿短边方向运动的D_{f_1}

取临界雷诺数$Re_{xk} = 5\times10^5$，得转捩点位置

$$x_k = Re_{xk}\frac{\nu}{U_0} = 5\times10^5\times\frac{1.5\times10^{-5}}{3} = 2.5m$$

因$l_1 = 1.5m < 2.5m$，整个板上均为层流边界层

$$C_{f_1} = \frac{1.328}{\sqrt{Re_{L_1}}} = \frac{1.328}{\sqrt{\frac{3\times1.5}{1.5\times10^{-5}}}} = 0.00242$$

$$D_{f_1} = 2C_{f_1}\frac{\rho U_0^2}{2}bL_1 = 2\times0.00242\times\frac{1.2\times3^2}{2}\times4.5\times1.5 = 0.176N$$

2）求沿长边方向运动的D_{f_2}

$l_2 = 4.5m > 2.5m$，板上为混合边界层，其摩擦系数按（10-31）式计算。取$A = 1700$

$$Re_{L_2} = \frac{3\times4.5}{1.5\times10^{-5}} = 9\times10^5$$

$$C_{f_2} = \frac{0.074}{Re_{L_2}^{0.2}} - \frac{A}{Re_{L_2}} = \frac{0.074}{(9\times10^5)^{0.2}} - \frac{1700}{9\times10^5} = 0.00288$$

$$D_{f_2} = 2\times0.00288\times\frac{1.2\times3^2}{2}\times1.5\times4.5 = 0.21N$$

可见，同一块板在静止流体中以同一速度运动时，产生混合边界层的阻力比产生层流边界层的阻力大。

§ 10-5 曲面边界层及其分离现象

一、曲面边界层的分离

上一节讨论的平板边界层是最简单的一种边界层，在它的外边界上速度为常数，等于无穷远处来流速度U_0，因而压强也是常数。再考虑到边界层内y方向压强不变的特性，平板边界层内各点的压强相同。曲面边界层的外边界上速度U_e沿流动方向是变数，因而边界层内沿流动方向压强是变化的，即$\frac{\partial p}{\partial x}\neq 0$。所以说，曲面边界层的特征是沿流动方向有压强梯度。

对于曲率很小的曲面，如采用边界层坐标系，边界层微分方程和动量积分关系式仍然适用，只是求解过程比较复杂，已超出本课程所要求的范围，本节不拟讨论。这里要讨论的是曲面壁上出现的一种重要现象——边界层分离（或称边界层脱体）。这种现象的出现会大大增加绕流的阻力。

现在来分析流体绕过曲面壁AMSB的流动情况（见图10-7），当流体沿AM壁流动时，由于流动受壁面挤压，边界层外边界上的流速沿程增加$\left(\frac{\partial U_e}{\partial x}>0\right)$，因而边界层内压强沿程减小$\left(\frac{\partial p}{\partial x}<0\right)$，流动处于增速减压状态。此时边界层内紧靠壁面的流体除受层外主流的带动外，在前进过程中还将一部分压能转变为动能，因此在克服近壁处摩擦阻力造成的能量损失后，终能保留一部分动能，维持其前进的运动。当流体流过M点后，情况就不同了。由于柱面的弯曲使流动变为扩散，边界层外边界上流速沿程减小$\left(\frac{\partial U_e}{\partial x}<0\right)$，边界层内压强沿程增大$\left(\frac{\partial p}{\partial x}>0\right)$，流动为减速增压。紧靠壁面的流体由层外主流带动而补充到的动能，不但要消耗于克服阻力而产生的能量损失，还要将其一部分转化为压强，因而流速沿程急剧下降。至S点，其动能消耗殆尽，流速下降为零。S点的下游靠近壁面的流体在逆向压强梯度的作用下出现回流，而离壁面稍远的流体因摩擦阻力较小，仍能继续向下游流动，于是由S点开始形成一条流速为零的间断面，它两侧的流速方向相反，因

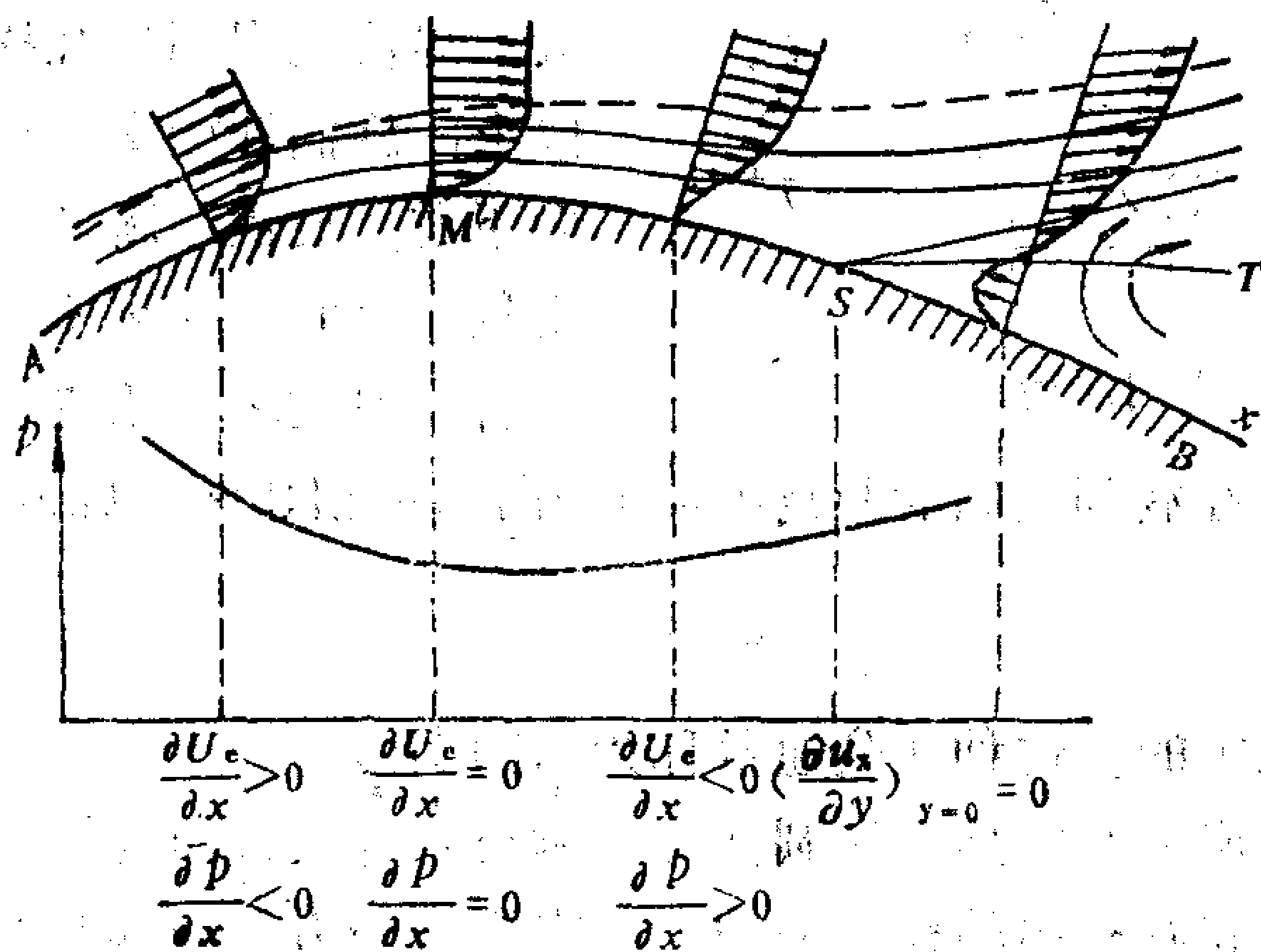


图 10-7 曲面边界层的分离

而间断面会进一步发展成为旋涡。上游来的主流和速度梯度很大的边界层就被旋涡挤离壁面。上游来流开始离开物体表面的那一S点称为边界层的分离点。显然分离点左侧$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}>0$，在其右侧$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}<0$，在分离点上$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}=0$。因此可把$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)_{y=0}=0$看成是分离点的特征。

分离点的位置不是固定的，与物体的形状、壁面粗糙及流动的型态有关。但如物体具有明显的尖角，则分离点往往固定在尖角上（见图10-8）。

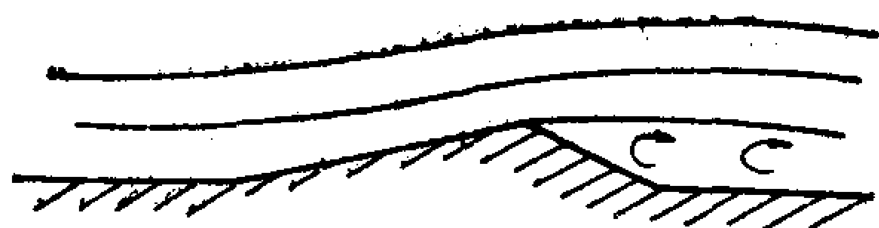


图 10-8　尖角处的分离点

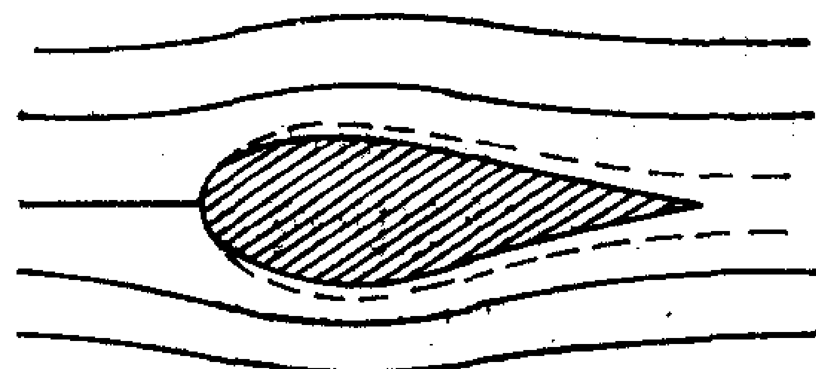


图 10-9　流线型物体的尾流区

边界层分离点下游的旋涡不断产生，又不断被带走，在物体后面形成尾流区。旋涡流过一段距离后，逐渐衰减，以至消失。旋涡在产生和衰减过程中损失的能量称为旋涡损失，它使物体后面的压强不能恢复到理想流体绕流时的大小，由此产生的阻力称为旋涡阻力。旋涡阻力的大小与分离点的位置有密切关系。分离点愈靠近物体的尾部，旋涡区愈小，旋涡阻力也愈小，因此工程上常把被绕流的物体做成所谓的流线型（如图10-9所示），使分离点尽量后移，以减小旋涡阻力。

二、尾流中的流动情况

尾流中的流动情况主要取决于雷诺数的大小，现以无限长的圆柱体绕流为例来说明。雷诺数 $Re=\frac{U_0 d}{\nu}$（d为圆柱直径）小于0.5时，流体平顺地绕过圆柱体两侧，并在下游重新汇合。当Re增大到2～30，边界层出现分离，圆柱后面形成两个位置固定、旋转方向相反的旋涡。在其下游，主流于不远处重新汇合，尾流区不长。如Re继续增大，尾流呈现周期性摆动。当Re达到90以上，旋涡开始交替从两侧脱落，并被带向下游。旋涡不断产生和脱落，尾流中就出现了两层涡列（见图10-10）。冯·卡门首先对这种现象进行了研究。他从理想流体出发，推导出只有在涡列之间的距离h与同一涡列中相邻两个旋涡之间的距离l之比为

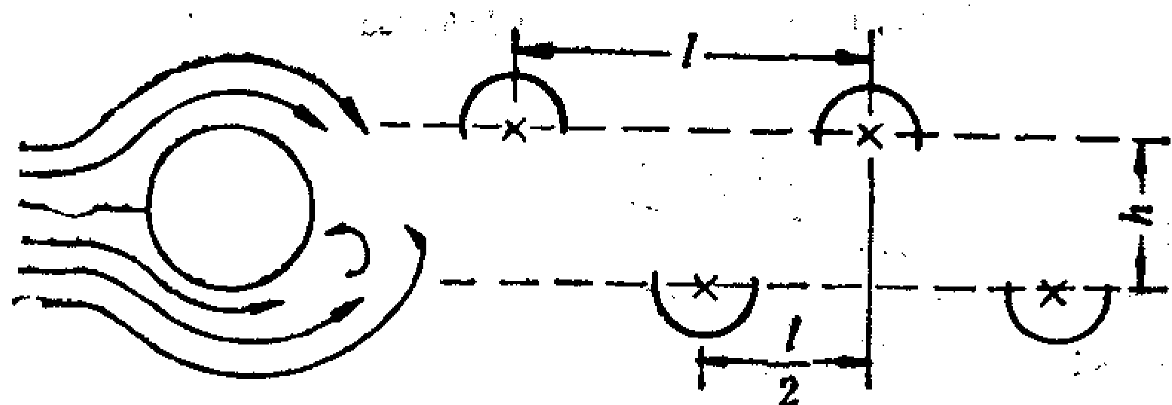


图 10-10　卡门涡街

$$\frac{h}{l}=0.281 \tag{10-31}$$

时，这两排涡列才是稳定的。这种涡列通常称为卡门涡街。

旋涡周期性地交替形成并脱落，使圆柱体受到交替变换方向的横向力，其频率等于旋涡脱落的频率，这会引起圆柱体的横向振动。如交变横向力的频率与圆柱体的固有频率相同，就会产生共振现象，工程上往往造成危害。如桥梁史上的重大事故，美国华盛顿州的

塔柯马吊桥在大风中遭到破坏，就是这个原因造成的。旋涡交替脱落还会产生声响效应，这是野外的输电线在大风中啸叫、锅炉烟气流过管束时产生噪声的原因。

圆柱体的振动频率 f 可按斯特罗哈提出的经验公式计算

$$\frac{fd}{U_0} = 0.198\left(1 - \frac{19.7}{\text{Re}}\right) \tag{10-32}$$

式中 $\frac{fd}{U_0} = \text{st}$，称为斯特罗哈数，它是一个相似准数。此式的适用范围为 $250 < \text{Re} < 2 \times 10^5$。

在高雷诺数（$\text{Re} > 2000 \sim 5000$）时，大尺度旋涡将分解为随机的紊动流动，圆柱后部已见不到有规则的涡街了。

一切非流线形物体的绕流都会出现上述现象，不只是圆柱体绕流才有。

§10-6 绕流运动

绕流中流体作用于物体上的力通常把它分解成两个分量：与来流方向平行的阻力 D 和与来流方向垂直的升力 L。

工程中计算阻力和升力的公式类似

$$D = C_D \frac{\rho U_0^2}{2} A \tag{10-33}$$

$$L = C_L \frac{\rho U_0^2}{2} A \tag{10-34}$$

式中 U_0——无穷远处的来流速度；

C_D——阻力系数；

C_L——升力系数；

A——物体的特征面积，不同的具体情况，可采用不同的特征面积，但采用的系数 C_D 或 C_L 必须与它对应。

本节着重讨论阻力问题。

一、绕流阻力

流体作用在物体上的阻力又可分成两部分：摩擦阻力 D_f 和压差阻力 D_p。摩擦阻力是流体作用在物面上的切应力 τ_w 的合力在来流方向的分量；压差阻力则是作用在物面上的压强 p_w 的合力在来流方向的分量。设在图10-11所示的绕流物体上取微元面积 dA，流体作用在物面 dA 上的切应力为 τ_w，压强为 p_w，物面外法线与来流之间的夹角为 α，则物体对流动的摩擦阻力与压差阻力分别为

$$D_f = -\int_A \tau_w \sin\alpha dA \tag{10-35}$$

$$D_p = -\int_A p_w \cos\alpha dA \tag{10-36}$$

式中负号为使阻力方向与 U_0 方向相反。

顺流置放的薄板是只有摩擦阻力没有压差阻力的典型绕流，而垂直于来流的薄板则是只有压差阻力没有摩擦阻力的典型绕流（见图10-12）。物体前后出现压差主要是边界层

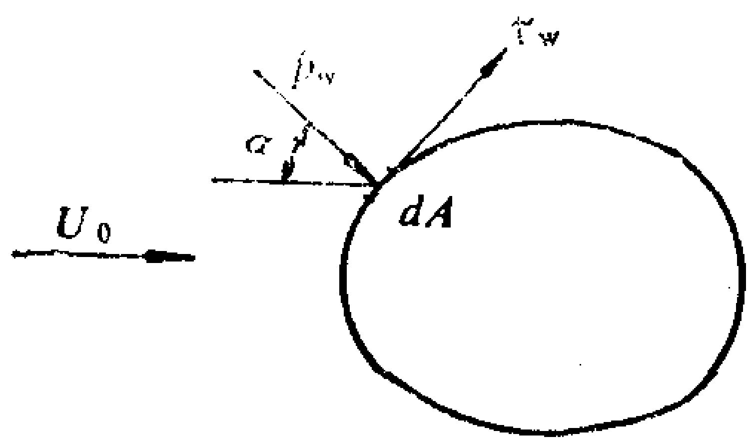


图 10-11　作用于物面上的法向和切向应力

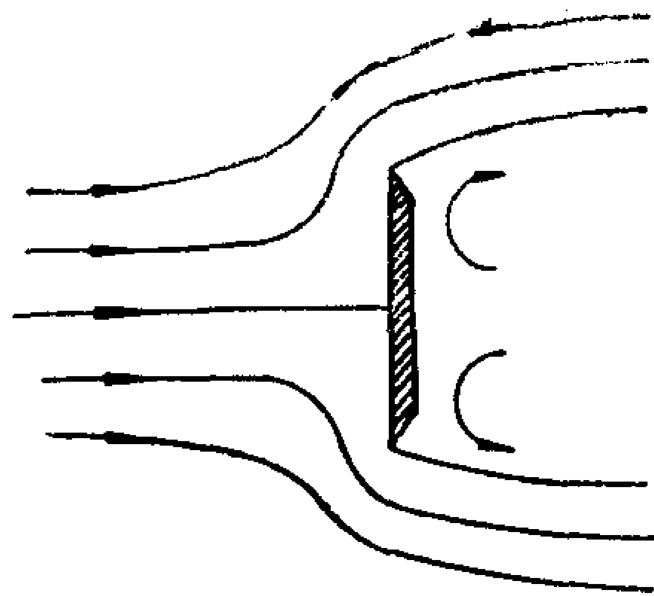


图 10-12　垂直来流平板的绕流

分离、尾部出现旋涡造成的，因此压差阻力实际上就是前面提到的旋涡阻力。边界层的分离及旋涡区的情况与物体的形状关系很大，故压差阻力又称形状阻力。形状不十分复杂的物体，其摩擦阻力尚可根据边界层理论进行计算，但要计算它的压差阻力目前还没有完善的理论，一般物体的绕流阻力现在只能依靠实验来确定。

影响绕流阻力系数的主要因素是物体的形状（包括它的置放角度）和雷诺数。现以圆球绕流为例分析不同雷诺数时阻力系数的变化及其原因。图10-13是实验得到的不同雷诺数的圆球绕流阻力系数。图中的虚线为Re很小时C_D随Re变化的理论曲线。Re很小时，惯性力远小于粘滞力，流体平顺地绕过圆球，尾部不出现旋涡（如图10-14a所示）。沿球壁法线方向虽有速度梯度，但并不集中在壁面附近，因而不存在明显的边界层。绕流阻力完全是由于流体微团变形而引起的内摩擦造成的，这时的阻力称为变形阻力。这种流动又称蠕动。斯托克斯在略去纳维—斯托克斯方程中的惯性项和质量力的前提下，解得圆球蠕动的绕流阻力

$$D=3\pi\mu U_0 d \tag{10-37}$$

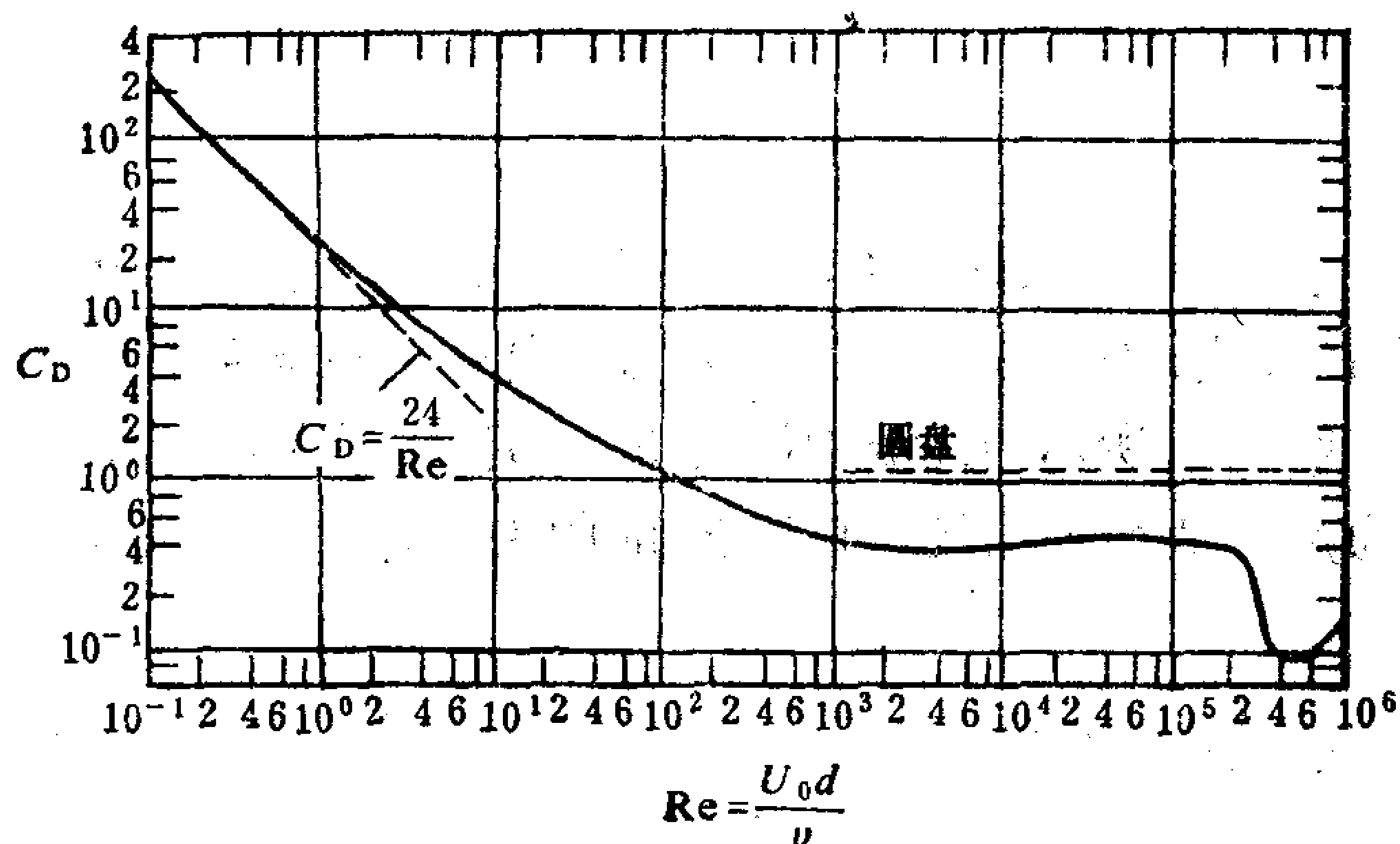


图 10-13　圆球绕流的摩阻系数

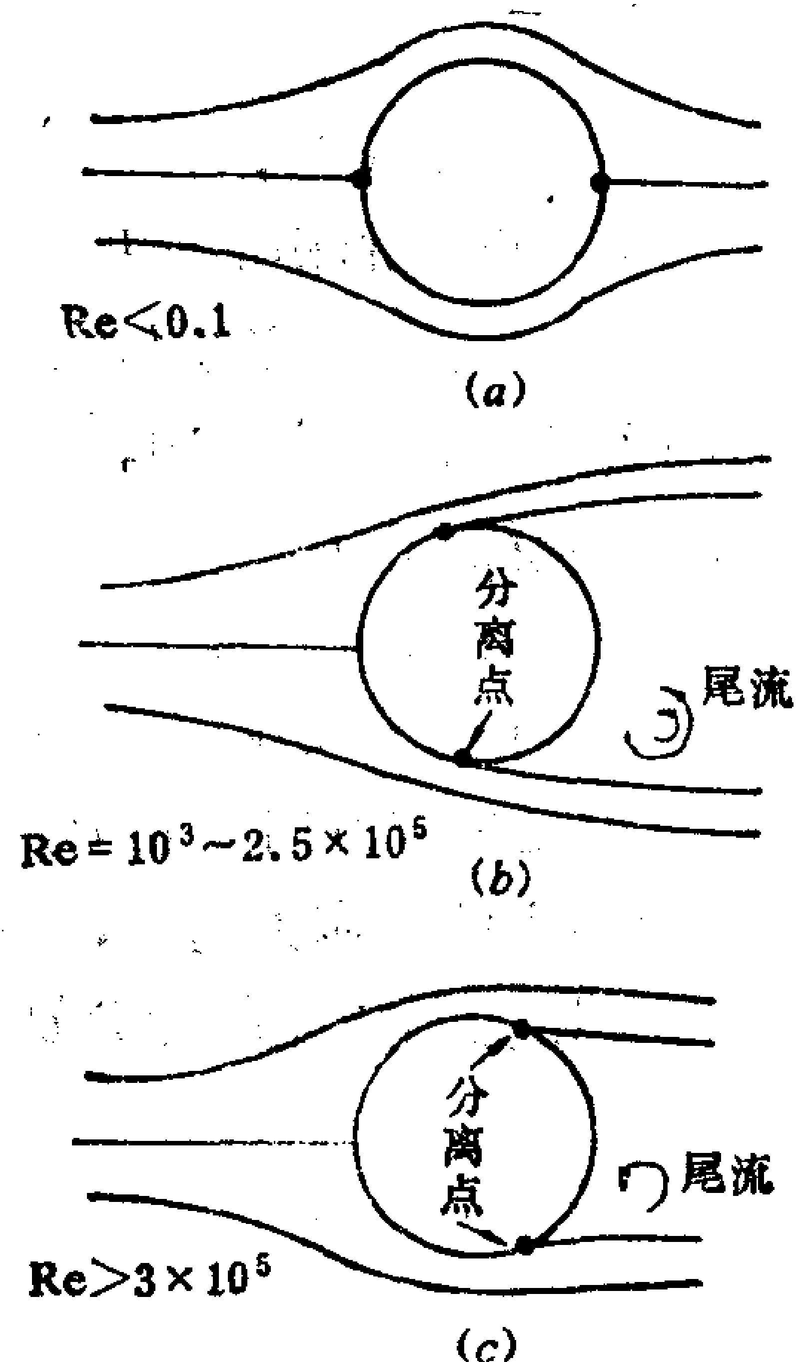


图 10-14　不同Re时圆球绕流的情况

式中 d 为圆球直径。此式通常称为斯托克斯公式。

如阻力计算公式中的特征面积采用物体垂直于来流的投影面积，即$A=\frac{1}{4}\pi d^2$，则此

时的圆球阻力系数为

$$C_D = \frac{3\pi\mu U_0 d}{\left(\frac{1}{2}\rho U_0^2\right)\left(\frac{1}{4}\pi d^2\right)} = \frac{24}{\mathrm{Re}} \quad (10\text{-}38)$$

由图可见，（10-38）式只是在Re<1时才与实验结果吻合，这样小的雷诺数只能出现在流体的粘性很大或球体很小的情况下。故斯托克斯公式只能用来计算空气中微小尘埃或雾滴运动的阻力（对于细雨中的小水滴已不适用），以及直径小于0.05mm的泥砂颗粒在水中沉降等情况。

当Re>1时，因惯性力已不能忽略，斯托克斯公式就偏离了实验曲线。随着Re的增大，在圆球表面出现了层流边界层。它的分离点随Re增大而前移，因而摩擦阻力占的比重逐渐减少。压差阻力愈来愈大，$C_D=f(\mathrm{Re})$曲线下降的坡度逐渐减缓。当$\mathrm{Re}\approx10^3$时，分离点稳定在自上游驻点开始算起的80°的地方（见图10-14*b*），这时摩擦阻力约为总阻力的5%。当$10^3<\mathrm{Re}<2.5\times10^5$时，$C_D$值介乎0.4至0.5之间，几乎不随Re而变。雷诺数再增大至$\mathrm{Re}\approx3\times10^5$时，圆球的绕流阻力出现“跌落”现象，$C_D$值突然减小至0.2左右。这是因为分离点上游的边界层由层流变为紊流，紊流的掺混作用，使边界层内紧靠壁面的流体质点得到较多的动能补充，分离点的位置后移（图10-4*c*），旋涡区显著减小，从而大大降低了压差阻力。出现阻力“跌落”的雷诺数随来流的紊动强度和物面粗糙程度的不同而异。来流紊动强度愈大，壁面愈粗糙，出现阻力“跌落”的雷诺数愈小。

垂直来流的圆盘绕流，其阻力系数在$\mathrm{Re}>10^3$以后为一常数（见图10-13），这是因为它的分离点固定在圆盘边缘上，旋涡区不随Re而变的缘故。

图10-15中给出了无限长圆柱体绕流的实验曲线，其变化情况与圆球绕流相似。如圆柱体的长度为有限值，由于绕过端部的流体会使圆柱体前半部的压强降低，后半部的压强升高，因而减小了绕流阻力。长径比愈小，C_D值也愈小。

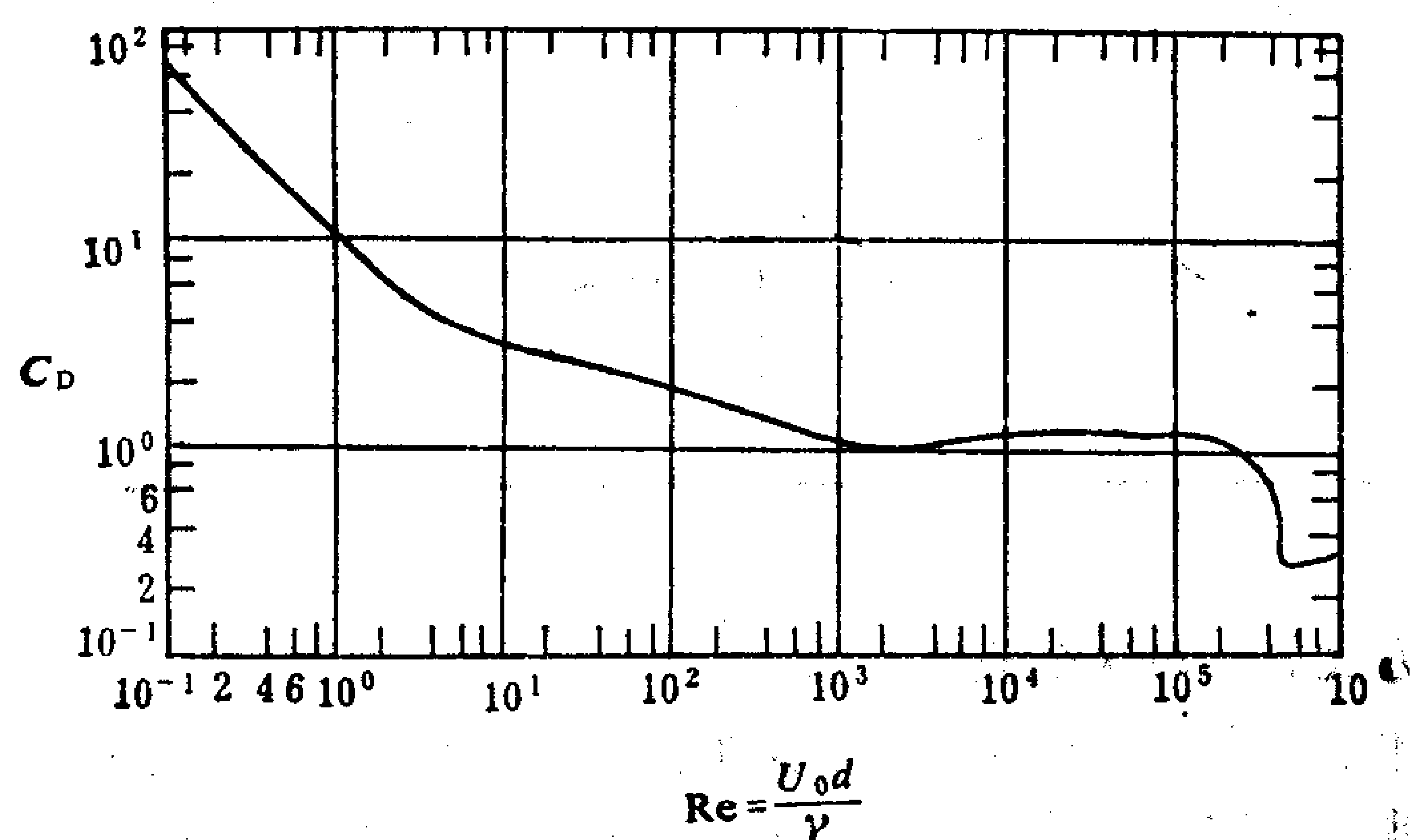


图 10-15 圆柱体绕流的摩阻系数

表10-4列出了几种典型物体的阻力系数，供比较和计算采用。

二、悬浮速度

现在讨论一个小圆球在静止流体中的自由沉降速度。这个问题在工程中有较大的实际意义。例如在沉淀池中计算泥砂颗粒的沉降距离，在除尘室中分析尘粒的沉降条件，在锅

几种典型物体的阻力系数 表 10-4

物体形状	特征长度	雷诺数范围	C_D	特征面积 A
平板	d	$>10^3$	$\frac{L}{d}=5$ 1.2 10 1.3 20 1.5 30 1.6 ∞ 1.95	$d\times L$
圆盘	d	$>10^3$	1.17	$\frac{1}{4}\pi d^2$
圆球	d	<1 $10^3\sim3\times10^5$ $>3\times10^5$	$24/Re$ 0.47 0.2	$\frac{1}{4}\pi d^2$
翼型	c	$>10^6$	0.007	$C\times L$
实心半圆	d	$10^4\sim10^6$ $10^4\sim10^6$	0.42 1.17	$\frac{1}{4}\pi d^2$
空心半球	d	$10^4\sim10^6$ $10^4\sim10^6$	0.38 1.42	$\frac{1}{4}\pi d^2$
半圆管	d	$10^4\sim10^6$ $10^4\sim10^6$	2 2.3	$d\times L$
圆柱	d	$10^3\sim10^5$	$\frac{L}{d}=5$ 0.8 10 0.83 20 0.93 30 1.0 ∞ 1.2	$d\times L$

炉中确定燃烧的方式等都与这个速度有关。

设在静止流体中放入一个直径为d的小圆球，让它从静止开始自由下落。起初，在重力作用下它以加速度下沉。但随着速度的增大，阻力也在加大。经过一段时间后，向下的重力G与向上的浮力B和阻力G达到平衡，圆球将等速下沉。这个速度称为**自由沉降速度**，以U_t表示。由于

重力 $$G=\frac{1}{6}\pi d^3\rho_s g$$

浮力 $$B=\frac{1}{6}\pi d^3\rho g$$

阻力 $$D=C_D\frac{\rho U_f^2}{2}A=\frac{1}{8}C_D\rho U_f^2\pi d^2$$

当圆球受力平衡时

$$\frac{1}{6}\pi d^3\rho_s g=\frac{1}{6}\pi d^3\rho g+\frac{1}{8}C_D\rho U_f^2\pi d^2$$

即得圆球自由沉降速度U_f为

$$U_f=\sqrt{\frac{4}{3C_D}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)gd} \quad (10\text{-}39)$$

式中ρ_s为圆球的密度；ρ为流体的密度；C_D为圆球的阻力系数。由前已知，圆球的阻力系数C_D与Re有关。当Re<1时，$C_D=\frac{24}{Re}$，代入上式

$$U_f=\frac{1}{18\mu}d^2(\rho_s-\rho)g \quad (10\text{-}40)$$

当$Re=10\sim10^3$ $$C_D\approx\frac{13}{\sqrt{Re}} \quad (10\text{-}41)$$

$Re=10^3\sim3\times10^5$ $C_D=0.47$

$Re>3\times10^5$ $C_D=0.2$

如圆球处于速度为u的上升气流中，当$u<u_f$时，圆球将下沉；如$u>u_f$，圆球会被气流带走；如$u=u_f$，则圆球处于悬浮状态。此时的流体上升速度称为**悬浮速度**，它在数值上等于颗粒的自由沉降速度。

【例 10-4】 如跳伞者着陆的垂直下降速度不得大于6m/s，降落伞与跳伞者的总质量为120kg，降落伞为空心半球形，试求降落伞的最小直径。按空气为20℃计算。

【解】 忽略空气对人体的阻力。当跳伞者以6m/s速度下落时，如降落伞受到的阻力与伞和人的重量相等，伞和人就不再有下降的加速度，着陆速度就不会超过6m/s。

先计算下降速度达到6m/s时降落伞受到的阻力D。由表10-4查得，凹面迎风的空心半球的阻力系数$C_D=1.42$，故

$$D=C_D\frac{\rho U_0^2}{2}\frac{\pi d^2}{4}=1.42\times\frac{1.2\times6^2}{2}\times\frac{\pi d^2}{4}=24.1d^2$$

令阻力与伞和人的总重量相等，即$D=Mg$

$$24.1d^2=120\times9.81$$

$$\therefore\ d=7\text{m}$$

【例 10-5】 6mm直径的小球在油中以60mm/s的速度等速下沉，已知油的密度$\rho_0=950\text{kg/m}^3$，小球的比重3.7，试求：

1）油的动力粘滞系数μ_0；

2）小球在油中等速下沉的阻力系数；

3）将此小球放入45℃甘油中的自由沉降速度。甘油的$\nu_g=0.883\times10^{-4}\text{m}^2/\text{s}$，$\rho_g=1150\text{kg/m}^3$。

【解】 1）求μ_0

因μ_0未知，算不出雷诺数，无法确定计算公式，故先假设Re<1，按（10-40）式计算

$$\mu_0=\frac{d^2}{18u_f}(\rho_s-\rho_0)g=\frac{0.006^2}{18\times 0.06}(3700-950)\times 9.81=0.899\frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{m^2}}$$

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho_0 U_0 d}{\mu_0}=\frac{950\times 0.06\times 0.006}{0.899}=0.38<1$$

验算表明，Re确小于一，算出的μ_0即为结果。

2）求C_D

当Re<1时

$$C_D=\frac{24}{\mathrm{Re}}=\frac{24}{0.38}=63.2$$

3）求小球在甘油中的自由沉降速度

因不能直接求得Re，也须试算。可先假设Re在10～10^3范围内，C_D应按（10-41）式计算。将该式代入（10-39）式中，得

$$u_f=\sqrt{\frac{4g}{39}\frac{u_f^{0.5}d^{1.5}}{\nu^{0.5}}\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)}$$

因$\sqrt{\frac{4g}{39}}\approx 1$，上式简化为

$$u_f=d\left(\frac{\rho_s-\rho}{\rho}\right)^{\frac{1}{1.5}}\nu^{-\frac{1}{3}}$$

代入已知数值

$$u_f=0.006\left(\frac{3700-1150}{1150}\right)^{\frac{1}{1.5}}\times(0.883\times 10^{-4})^{-\frac{1}{3}}=0.229\mathrm{m/s}$$

核算Re

$$\mathrm{Re}=\frac{0.229\times 0.006}{0.883\times 10^{-4}}=15.56$$

Re与假设的范围相符，故小球在甘油中的自由沉降速度为0.229m/s。

习　题

10-1　设平板层流边界层的速度剖面为

$$\frac{u}{U_0}=\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

y为至平板表面的距离，U_0为边界层外的流速，试用动量积分关系式推导边界层厚度δ、壁面切应力τ_w和摩阻系数C_f的表达式。

10-2　空气以15m/s的速度流过一块顺流置放的光滑平板，如当地气温为20°C，求离平板前缘$x=$1m处边界层的厚度δ和壁面切应力τ_w，如边界层分别为层流和紊流。

10-3　空气以15m/s的速度流过一块宽10m、长20m的光滑平板，空气温度为20°C，如转捩点的临界雷诺数采用$\mathrm{Re}_{xk}=5\times 10^5$，求混合边层界的下列各值：

1）层流边界层的长度；

2）层流边界层末端的厚度和壁面切应力；

3）平板尾端的边界层厚度和壁面切应力。

10-4　在静水中拖曳一块宽2.5m、长30m的薄板，拖曳速度为5m/s，求所需的拖曳力（水温为20°C）。

10-5　有一长2.5m、宽10m的平底驳船，吃水深度为1.5m，在水中以8km/h的速度行驶，水温为15°C，试估算克服其摩擦阻力所需的功率。

10-6　有一流线型赛车，驱动功率为350kW，迎风面积为1.5m²，如绕流阻力系数为0.3，试估算下列情况下赛车理论上（即不计车轮与地面的摩擦力）所能达到的最大速度（当地空气密度为1.2kg/m³）：

1）空气静止；

2）迎面风速为10km/h。

10-7　有一0.6m直径的氢气球，它在空气中受到的浮力为1.3N，如在3m/s的风速中观察到系气球的绳子与水平面成60°角，不计绳子的重量，求氢气球的绕流阻力系数。空气密度为1.2kg/m³。

10-8　有一水塔，下部为30m高、2.5m直径的圆柱体，上部为12m直径的球体，如当地最大风速为100km/h（气温按0°C计算），求水塔底部受到的最大弯矩。忽略圆柱体与球体之间的相互影响。

10-9　试求风作用于高压电缆线上的作用力，电缆线直径1cm，两支撑点距离为70m，风速为20m/s，气温为0°C。

10-10　0.5mm的砂粒（比重为2.65）置于15°C的清水中，试求其自由沉降速度。

10-11　2mm直径的气泡在20°C清水中上浮的最大速度是多少？

10-12　球形尘粒在20°C的空气中等速下沉，试求能按斯托克斯公式计算的尘粒最大直径及其自由沉降速度。尘粒的比重为2.5。

10-13　煤粉炉炉膛中烟气的密度为0.2kg/m³，运动粘滞系数为250×10^{-6}m²/s，煤粒的密度为1100kg/m³，若上升气流的速度为0.6m/s，试问粒径为0.2mm的煤粉颗粒能否被气流带走？

10-14　在煤粉炉炉膛的不均匀流场中，烟气最大上升速度为0.65m/s，烟气的平均温度$t=1300$°C，该温度烟气的运动粘滞系数$\nu=234\times10^{-6}$m²/s，烟气的密度$\rho=0.242$kg/m³，煤粒的密度$\rho_m=1099$kg/m³，问炉膛内能被烟气带走的煤粉最大颗粒直径是多少？

10-15　竖井式磨煤机中空气流速为2m/s，空气的运动粘滞系数$\nu=20\times10^{-6}$m²/s，密度$\rho=1$kg/m³，煤粒的密度$\rho_s=1000$kg/m³，试求此上升气流能带出的最大煤粉粒径。

第十一章　紊流射流和紊流扩散

在§4-4中已经提到，流体由孔口、喷嘴高速射出，流入另一部分流体介质中，这种流动称为射流。射流有淹没射流和非淹没射流之分。流体射入与其本身性质相同介质中的流动称为淹没射流。淹没射流的流动情况与流动空间的大小有关。如流动空间很大，射流基本上不受周围固体边壁的影响，称为无限空间射流，或自由射流；反之，称为有限空间射流，或受限射流。根据喷口形状不同，又可分为圆形射流、矩形射流和条缝射流。圆形射流是轴对称流动，故又称轴对称射流。如矩形喷口的长短边之比（$a:b$）不超过3:1时，矩形射流能迅速发展为圆形射流，只要算出喷口面积的当量直径$\left(D_0=\sqrt{\dfrac{4}{\pi}ab}\right)$，就可采用圆形射流公式进行计算。当矩形喷口长短边之比超过10:1时，射流可按平面流动考虑，故条缝射流又称平面射流。

淹没射流的流态一般都是紊流。按喷口直径和出口流速计算的雷诺数大约在30左右就过渡为紊流了，所以层流射流几乎是不存在的。本章仅限于讨论无限空间的紊流淹没射流。

由于分子运动和紊流脉动，流体中含有的其它物质（如固体微粒、污染物、盐分等）能从一部分流体转移到另一部分流体中，这种现象称为**扩散**。广义地说，流体本身属性（如热量、动量、能量等）的转移也是扩散，但本章只讨论异质的扩散问题。

紊流淹没射流与紊流扩散在土建类专业中有着较广泛的应用。例如，供热通风工程中设计空气淋浴和空气帷幕就要用到紊流射流理论。烟囱排出的烟尘或废气对大气的污染、污水在河流或湖泊中的稀释等情况，则都是紊流扩散问题，需要我们研究解决。

§11-1　紊流射流的结构及基本特性

一、紊流射流的结构

淹没射流的最简单情况是流体由喷口射出时流速为均匀分布，射入原先为静止的无限空间同类流体中。设喷口处流速为u_0，当它离开喷口后，与周围流体之间立即出现速度不连续的间断面。这是不稳定的，很快发展成为一个个涡旋，产生强烈的紊动。流体质点的横向脉动把相邻的静止流体卷吸到射流中来，两者一起向前运动。于是射流截面沿程不断扩大，流量不断增加。与此同时，射流边界部分的流体由于静止流体的掺入，在动量交换的过程中速度减缓下来，使速度仍保持为u_0的射流核心区沿程逐渐缩小，以至流经一定距离后即行消失。在外边界与核心区之间，射流截面上的速度由零增大到u_0。核心区以外的射流，横向尺寸远小于纵向尺寸，横向速度u_y远小于纵向速度u_x，截面上速度梯度大，流动具有边界层的性质，故称为射流的边界层混合区（图11-1）。

射流具有核心区的流段称为**起始段**。离开起始段末端某一距离以后，射流变成似乎是

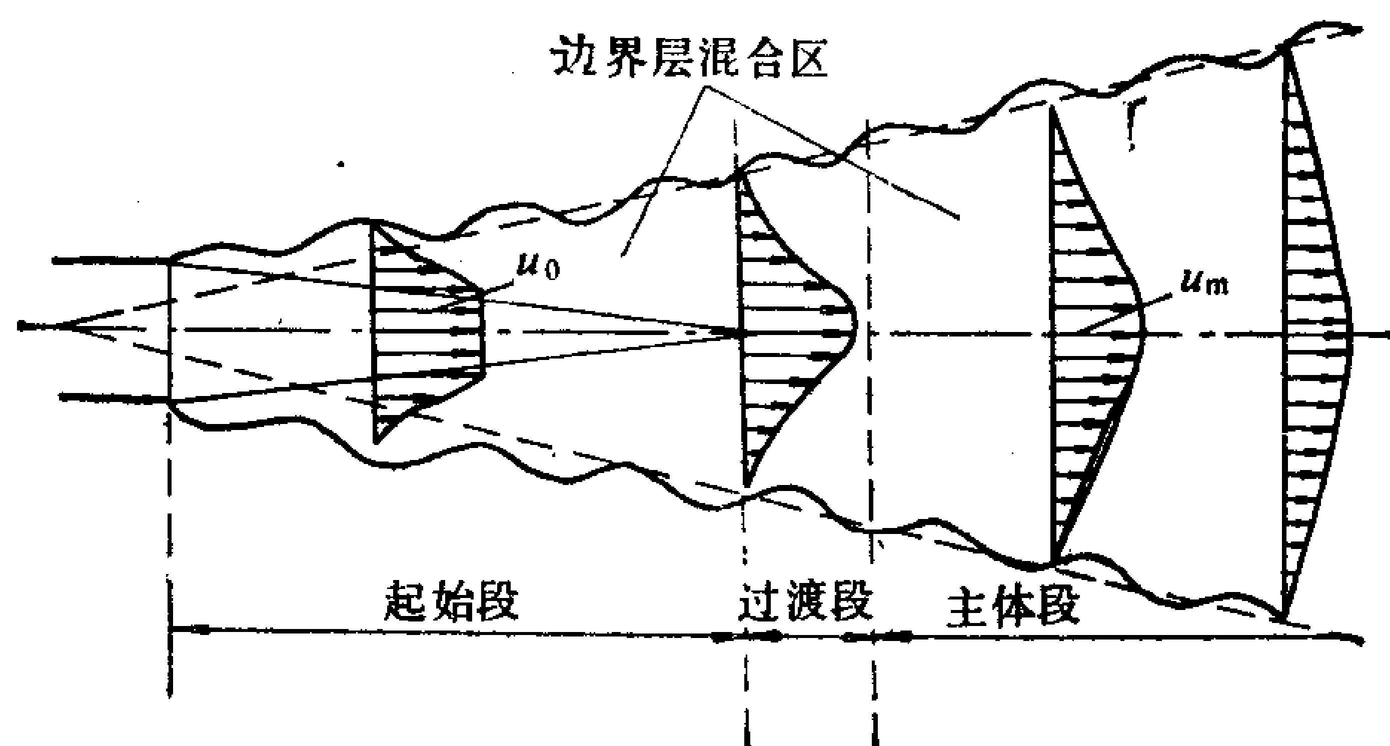


图 11-1 紊流淹没射流的结构

从一点源流出来的那样，这段射流称为主体段（或基本段）。起始段与主体段之间有一个过渡段。由于过渡段很短，为了简化射流图形，可认为过渡段的长度为零，即联接主体段与起始段的只是一个过渡断面。主体段外边界处的流速为零，轴线处流速最大。轴线流速u_m在主体段内是沿程逐渐减小的。

射流与周围流体的分界是一个很难分辨清楚的边界，射流外边界处实际上是由射流内部的紊流涡团与周围流体交错组成的具有间歇性的不规则流动，这里所指的射流边界是从统计平均意义上说的。

二、紊流射流的基本特性

由实验得知，紊流射流具有这样几个特性：射流厚度沿流程的线性增长性；各截面上轴向速度分布的相似性；单位时间通过各截面的动量守恒性。现分别介绍。

（1）射流厚度的线性增长性

实验表明，紊流射流的厚度b（或半径R）沿轴线x是线性增长的，即b（或R）$\propto x$，这是紊流射流的几何特征。它也可以用普朗特的混合长度理论分析得到。紊流射流的截面沿程扩大主要是横向脉动速度u'_y造成的，故而可以认为射流厚度随时间的增长率$\frac{db}{dt}$与u'_y成正比。而普朗特的混合长度理论又认为u'_y与纵向时均速度的梯度成正比，即

$$\frac{db}{dt}\propto u'_y\propto\frac{\partial u_x}{\partial y}l \tag{11-1}$$

普朗特假设，混合长度l在自由射流的截面上是个常数，它与边界层混合区的厚度b成正比

$$l\propto b \tag{11-2}$$

再由射流各截面上纵向速度的相似性可得

$$\frac{\partial u_x}{\partial y}\propto\frac{u_m}{b} \tag{11-3}$$

将（11-2）和（11-3）式代入（11-1）式

$$\frac{db}{dt}\propto u_m \tag{11-4}$$

b是x的函数，故$\frac{db}{dt}$又可写成

$$\frac{db}{dt}=\frac{db}{dx}\frac{dx}{dt}\doteq u_x\frac{db}{dx}\propto u_m\frac{db}{dx} \qquad (11\text{-}5)$$

比较（11-4）和（11-5）两式，即得

$$\frac{db}{dx}=常数 \qquad 或 \qquad b=Kx \qquad (11\text{-}6)$$

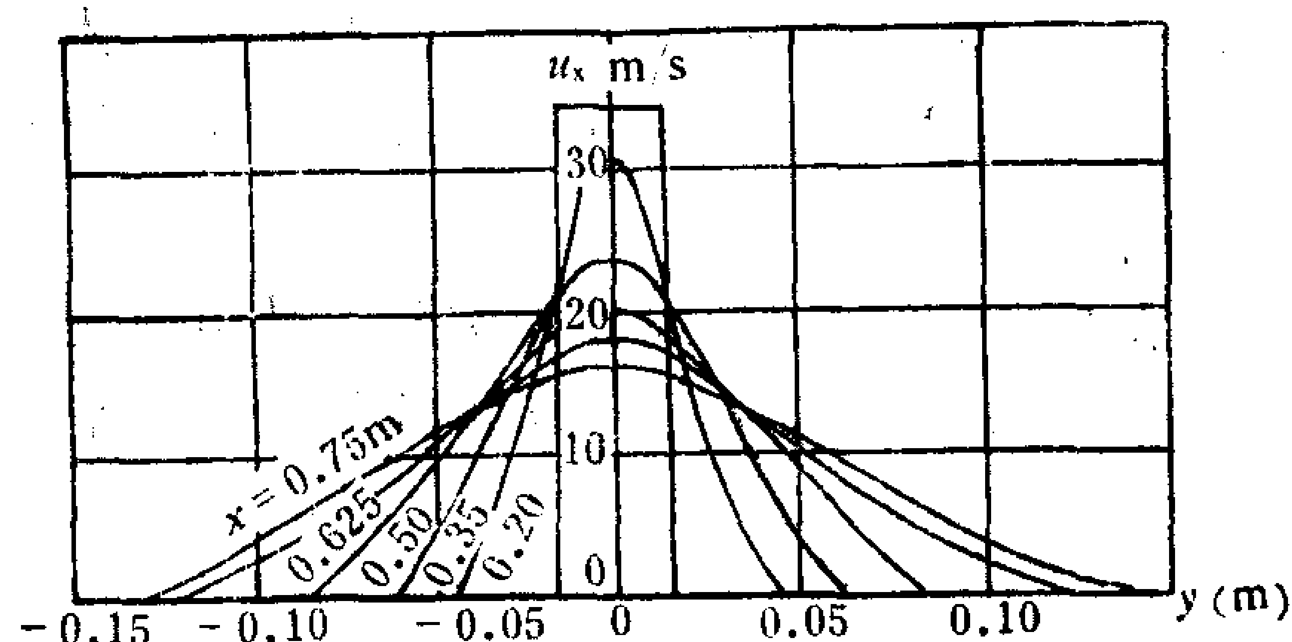
如将（11-6）式代入（11-2）式又得

$$l=K'x \qquad (11\text{-}7)$$

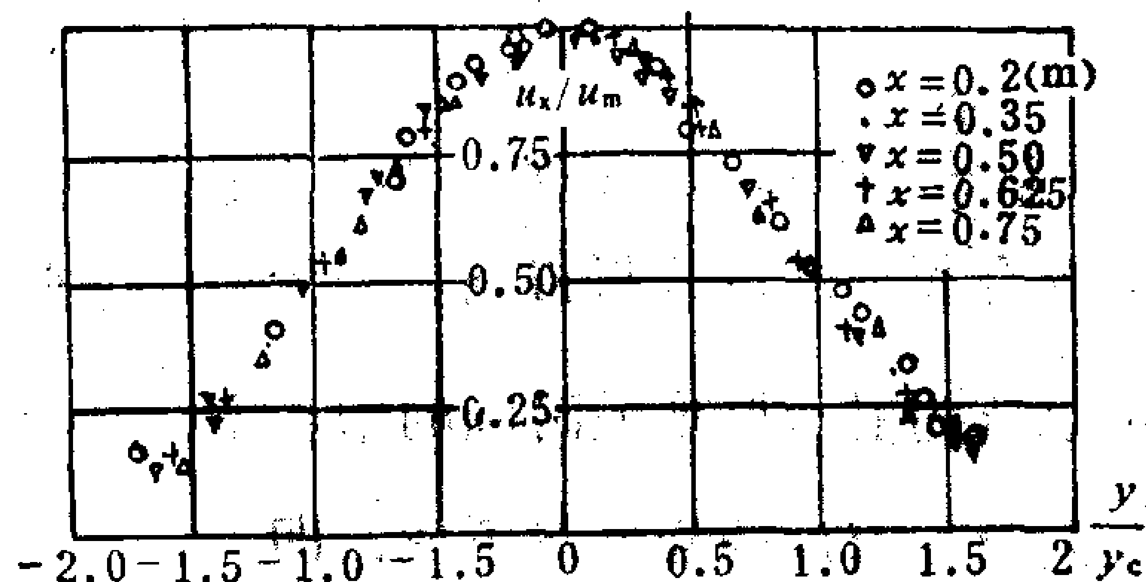
即混合长度沿流程也按线性规律增大。

（2）各截面轴向速度的相似性

关于紊流射流的流速分布规律许多学者曾进行过大量的理论和实验研究，所得结果表明，射流各截面的流速分布具有明显的相似性。图11-2为弗斯曼(E.Förthmann)在平面射流试验中所得的实验资料，(b)图中纵坐标为测速点的轴向流速u_x与同一截面的最大流速u_m之比，横坐标为该测速点到对称轴的距离y与该截面上$u_x=0.5u_m$的点到对称轴的距离$y_{0.5}$(见图11-5)之比。该图表明，用无量纲速度u_x/u_m与无量纲距离$y/y_{0.5}$表示的各截面速度分布曲线基本上是重合的。也就是说，射流主体段各截面上无量纲距离相同的各点无纲量速度是相等的。



(a) 平面射流不同断面的流速分布



(b) 平面射流的无量流速分布曲线

图 11-2 平面射流流速分布

图11-3为福斯特(W.Forstall)等人对轴对称射流所进行的试验资料，所得结果于平面射流类似。由于试验是在喷嘴外界不是静止流体而是有伴流速度u_e的条件下进行的，故图中纵坐标采用$\Delta u=u_x-u_e$与$\Delta u_m=u_m-u_e$之比。

阿勃拉莫维奇(Г.Н.Абрамович)等人对射流起始段各截面的速度分布也进行了量测，所得结果表明，起始段各截面的边界层混合区内流速分布也具有相似性。

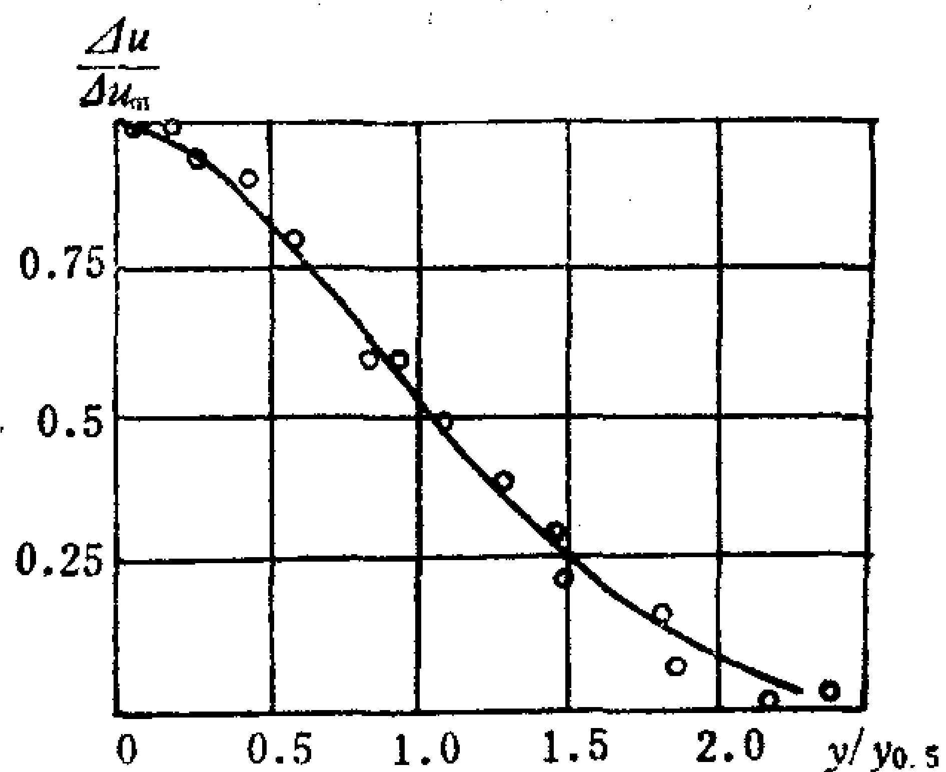


图 11-3 圆形射流截面上的无量纲流速分布

阿勃拉莫维奇采用了史里希丁首先提出的拟合公式来描述紊流射流主体段各截面的流速分布

$$\frac{u_x}{u_m}=f(\eta)=(1-\eta^{1.5})^2 \qquad (11\text{-}8)$$

式中 $\eta=\frac{y}{b}$（平面射流）或$\eta=\frac{y}{R}$（圆形射流），b（或R）为射流截面的半厚度（或半径）。

其后，阿尔伯逊（M.L.Albertson）、谢彼列夫（И.А.Шепелев）等又先后提出，在紊流混合区各截面上流速分布服从正态分布规律，即

$$\frac{u_x}{u_m} = \exp - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{cs}\right)^2 \tag{11-9}$$

式中 s 是从出口断面算起的轴向距离；c 为实验常数，在圆形射流中 $c = 0.081$，在平面射流中 $c = 0.109$。

上两式是分析射流主体段各运动参数时最常用的流速分布公式。射流各截面无量纲流速分布的相似性是紊流射流的运动特征。

（3）通过各截面的动量守恒性

实验指出，紊流射流中各点的压强差别不大，可近似认为皆等于周围流体介质的压强。因此，在射流中任取两截面列动量方程，由于 x 轴方向外力之和为零，单位时间通过紊流射流各截面的流体动量（也称动量通量）是常数

$$\int_A \rho u_x^2 dA = \text{常数}$$

若其中一个截面为射流出口断面，则上式为

$$\alpha_0 \rho v_0^2 A_0 = \int_A \rho u_x^2 dA \tag{11-10}$$

式中 A_0 和 v_0 分别为出口断面的面积与平均流速；α_0 为出口断面的动量修正系数。射流各截面的动量通量守恒是紊流射流的动力特征。

紊流射流的这三个基本特性在以后的分析中将起重要作用。

§11-2　紊流射流主体段的运动分析

本节主要讨论射流主体段截面沿程扩大的范围，以及沿流程的速度变化和流量变化。主要介绍目前在我国通风工程中应用较普遍的阿勃拉莫维奇的理论。

阿勃拉莫维奇将射流结构简化成图11-4所示的图形。射流主体段边界线延长线的交点 M 称为极点。喷口到极点的距离为 x_0，喷口到任一截面的距离为 s，该截面到极点的距离为 x，射流外边界线与轴线之间的夹角 α 称为扩散角。

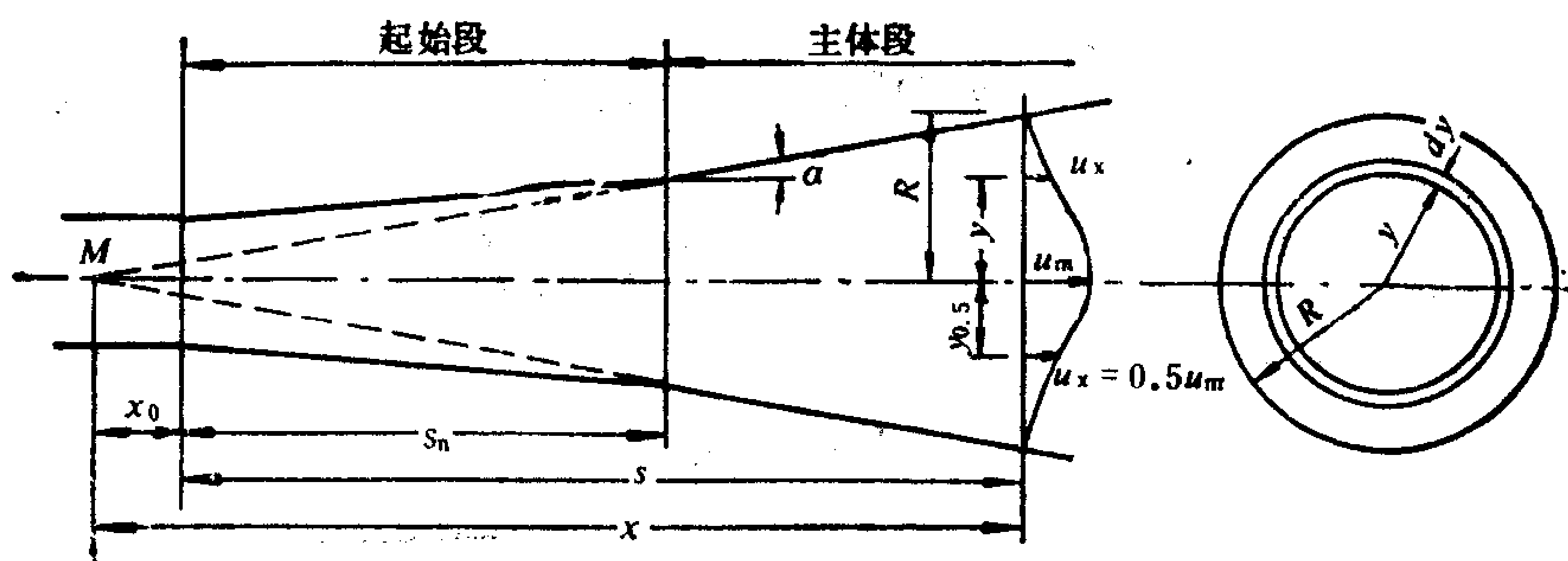


图 11-4　推导射流计算式的简图

主体段与起始段的扩散角是不同的，因而射流的外边界线是一条在过渡断面转折的折线。主体段的扩散角$\alpha=12°25'$是个定值。起始段的扩散角则与喷嘴结构及喷口处流速分布的不均匀程度有关，由极点的位置x_0与起始段长度s_n确定。

为了反映出口断面流速分布的不均匀程度对射流运动的影响，阿勃拉莫维奇引入了出口断面的动量修正系数$\beta_0$❶，它是出口断面按实际流速u计算的动量与按平均流速v_0计算的动量之比，即

$$\beta_0=\frac{\int_{A_0}\rho u^2 dA}{\rho A_0 v_0^2} \tag{11-11}$$

当出口断面流速为均匀分布时，$\beta_0=1$，由实验得到$\bar{x}_0=\frac{x_0}{R_0}=0.6$，可近似认为$\bar{x}_0=0$，$\bar{s}_n=\frac{s_n}{R_0}=12.4$。如出口断面全部为边界层所充满，流速分布很不均匀，$\bar{x}_0=3.45$，此时起始段长度大为缩短，$\bar{s}_n=6.3$。

下面分别讨论圆形射流和平面射流在主体段的各流动参数。

一、圆形射流

1）射流半径沿程的变化

由图11-4可以看出，主体段任一截面的半径$R=(x_0+s)\tan\alpha$，因此无量纲半径

$$\frac{R}{R_0}=\frac{(x_0+s)\tan\alpha}{R_0}=0.22(\bar{x}_0+\bar{s})=0.22\bar{x} \tag{11-12}$$

2）轴线流速u_m沿程的变化

根据射流各截面的动量通量守恒的特性

$$\beta_0\rho\pi R_0^2 v_0^2=\int_0^{R}\rho u_x^2 2\pi y dy$$

用$\rho\pi R^2 u_m^2$除上式等号两侧

$$\beta_0\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left(\frac{v_0}{u_m}\right)^2=2\int_0^1\left(\frac{u}{u_m}\right)^2\left(\frac{y}{R}\right)d\left(\frac{y}{R}\right)$$

将流速分布公式（11-8）代入上式等号右侧

$$2\int_0^1\left(\frac{u}{u_m}\right)^2\left(\frac{y}{R}\right)d\left(\frac{y}{R}\right)=2\int_0^1[(1-\eta^{1.5})^2]^2\eta d\eta$$

而
$$\int_0^1[(1-\eta^{1.5})^2]^2\eta d\eta=0.06675$$

因此
$$\beta_0\left(\frac{v_0}{u_m}\right)^2=0.134\left(\frac{R}{R_0}\right)^2$$

再将（11-12）式代入

$$\frac{u_m}{v_0}=\frac{12.4\sqrt{\beta_0}}{\bar{x}} \tag{11-13}$$

---

❶ β_0实际上就是(11-10)式中的α_0，它是阿勃拉莫维奇采用的动量修正系数符号，目前各流体力学书籍中当涉及到阿勃拉莫维奇的射流理论时，一般都用这个符号。

3 ）起始段长度

（11-13）式中令$u_m = v_0$，$\bar{x} = \bar{s}_n + \bar{x}_0 = \frac{s_n + x_0}{R_0}$，即得起始段长度

$$s_n = 12.4R_0\sqrt{\beta_0} - x_0 \qquad (11\text{-}14)$$

如出口断面流速分布均匀，$\beta_0 = 1$，$x_0 \approx 0$，因而

$$s_n = 12.4R_0$$

4 ）流量沿程的变化

设主体段内任一截面的流量为Q，出口断面流量为Q_0，则无量纲流量为

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{\int_0^R u_x 2\pi y dy}{\pi R_0^2 v_0} = 2\int_0^{R/R_0}\left(\frac{u_x}{v_0}\right)\left(\frac{y}{R_0}\right)d\left(\frac{y}{R_0}\right)$$

将$\frac{u_x}{v_0} = \frac{u_x}{u_m}\frac{u_m}{v_0}$及$\frac{y}{R_0} = \frac{y}{R}\frac{R}{R_0}$代入

$$\frac{Q}{Q_0} = 2\frac{u_m}{v_0}\left(\frac{R}{R_0}\right)^2\int_0^1\left(\frac{u_x}{u_m}\right)\left(\frac{y}{R}\right)d\left(\frac{y}{R}\right)$$

再将（11-12）、（11-13）及（11-8）式代入上式，整理后得

$$\frac{Q}{Q_0} = 2\times 0.6\bar{x}\sqrt{\beta_0}\int_0^1(1-\eta^{1.5})^2\eta d\eta$$

而$\int_0^1(1-\eta^{1.5})^2\eta d\eta = 0.129$，故

$$\frac{Q}{Q_0} = 0.155\sqrt{\beta_0}\,\bar{x} \qquad (11\text{-}15)$$

5 ）断面平均流速沿程的变化

$$\frac{v}{v_0} = \frac{Q/\pi R^2}{Q_0/\pi R_0^2} = \left(\frac{Q}{Q_0}\right)\left(\frac{R_0}{R}\right)^2 = 0.155\sqrt{\beta_0}\,\bar{x}\left(\frac{1}{0.22\bar{x}}\right)^2 = \frac{3.2\sqrt{\beta_0}}{\bar{x}}$$

$$(11\text{-}16)$$

6 ）质量平均流速沿程的变化

比较（11-13）和（11-16）两式，可得$v = 0.258u_m$。在通风工程中，通常需要使用的是轴线附近流速较高的区域，而v不能反映这个区域的流速值，为此引入质量平均流速v'。它的定义是：某截面的v'与通过同一截面的质量流量ρQ的乘积即为单位时间通过该截面的真实动量。根据这个定义，取出口断面与任一截面列动量方程

$$\beta_0\rho Q_0 v_0 = \rho Q v'$$

$$\frac{v'}{v_0} = \frac{\beta_0 Q_0}{Q} = 6.45\frac{\sqrt{\beta_0}}{\bar{x}} \qquad (11\text{-}17)$$

比较（11-13）和（11-17）两式，可得$v' = 0.52u_m$，它比v约增大一倍，能更好地反映使用区的流速值。

二、平面射流

对于平面射流，可用类似的方法导出主体段各无量纲参数的计算公式（推导从略），

现介绍如下（式中b_0为出口断面的半厚度）：

1）射流厚度沿程的变化

$$\frac{b}{b_0}=0.22(\bar{x}_0+\bar{s})=0.22\bar{x} \tag{11-18}$$

2）轴线流速沿程的变化

$$\frac{u_m}{v_0}=3.8\sqrt{\frac{\beta_0}{\bar{x}_0+\bar{s}}}=3.8\sqrt{\frac{\beta_0}{\bar{x}}} \tag{11-19}$$

3）起始段长度

$$s_n=14.4\beta_0 b_0-x_0 \tag{11-20}$$

如喷口流速均匀分布，$\beta_0=1$，$x_0\approx 0$，故$s_n=14.4b_0$

4）流量沿程的变化

$$\frac{Q}{Q_0}=0.375\sqrt{\beta_0(\bar{x}_0+\bar{s})}=0.375\sqrt{\beta_0\bar{x}} \tag{11-21}$$

5）断面平均流速沿程的变化

$$\frac{v}{v_0}=1.71\sqrt{\frac{\beta_0}{\bar{x}_0+\bar{s}}}=1.71\sqrt{\frac{\beta_0}{\bar{x}}} \tag{11-22}$$

6）质量平均流速沿程的变化

$$\frac{v'}{v_0}=2.67\sqrt{\frac{\beta_0}{\bar{x}_0+\bar{s}}}=2.67\sqrt{\frac{\beta_0}{\bar{x}}} \tag{11-23}$$

【例 11-1】 圆形射流的喷口半径为200mm，喷口处流速分布均匀，今要求射程10m处在直径为2m的圆截面范围内流速不小于2m/s，求喷嘴流量及射程10m处截面的质量平均流速。

【解】 1）先求起始段长度，以便确定该截面是否位于主体段内。因喷口流速分布均匀，故

$$s_n=12.4R_0=12.4\times 0.2=2.48\text{m}<10\text{m}$$

2）求射流在射程10m处的半径

$$R=0.22s=0.22\times 10=2.2\text{m}$$

3）求该截面的轴线流速

设$y=1$m处流速$u_x=2$m/s，由（11-8）式得

$$\frac{u_x}{u_m}=\left[1-\left(\frac{y}{R}\right)^{1.5}\right]^2=\left[1-\left(\frac{1}{2.2}\right)^{1.5}\right]^2=0.48$$

$$u_m=\frac{u_x}{0.48}=\frac{2}{0.48}=4.16\text{m/s}$$

4）由（11-13）式可求得喷口流速v_0

$$v_0=\frac{u_m\bar{x}}{12.4\sqrt{\beta_0}}=\frac{4.16\times 10}{12.4\times 0.2}=16.77\text{m/s}$$

5）求喷嘴流量及截面的质量平均流速

$$Q_0=\pi R_0^2 v_0=\pi\times 0.2^2\times 16.77=2.11\text{m}^3/\text{s}$$

$$v'=6.45\frac{\sqrt{\beta_0}}{\bar{x}}v_0=6.45\times 16.77\times\frac{0.2}{10}=2.16\text{m/s}$$

§ 11-3 温差射流和浓差射流

如射出的流体与周围流体有温度差或所含固体颗粒及其它物质的浓度差，这种射流称为**温差射流**或**浓差射流**。夏天向热车间喷送冷空气以降温，冬天向工作区喷送热空气以取暖，这是温差射流的例子。向含尘浓度高的车间喷送清洁空气以改善工作区的环境，则属浓差射流。

紊流混掺过程中不仅有动量交换，还会有温度和浓度的交换，这将使射流内出现温度或浓度的不均匀连续分布。分析射流的温度或浓度分布规律，以及由于温度差或浓度差造成的射流轴线弯曲，是本节所要讨论的问题。

通风工程中出现的温度差或浓度差一般都不大，引起的密度变化很小，在分析中仍可按不可压缩等密度流体处理，也不考虑异质的存在对流动的影响。

根据阿勃拉莫维奇的研究，射流的温度分布和浓度分布也有边界层的性质，沿流动轴线各截面的温度差和浓度差也具有相似性。由于热量（或异质）的扩散比动量扩散要快些，所以温度（或浓度）边界层比速度边界层稍厚一些。图11-5为两者的比较，虚线为温度边界层，实线为速度边界层。不过，在工程应用中为了简便起见，近似认为温度或浓度边界层的外边界与速度边界层的外边界重合，温差或浓差射流的 R、Q、u_m、v和v'等参数仍可采用上节所介绍的公式计算。本节要讨论的仅是轴线温差（或浓差）和平均温差（或浓差）沿程的变化。

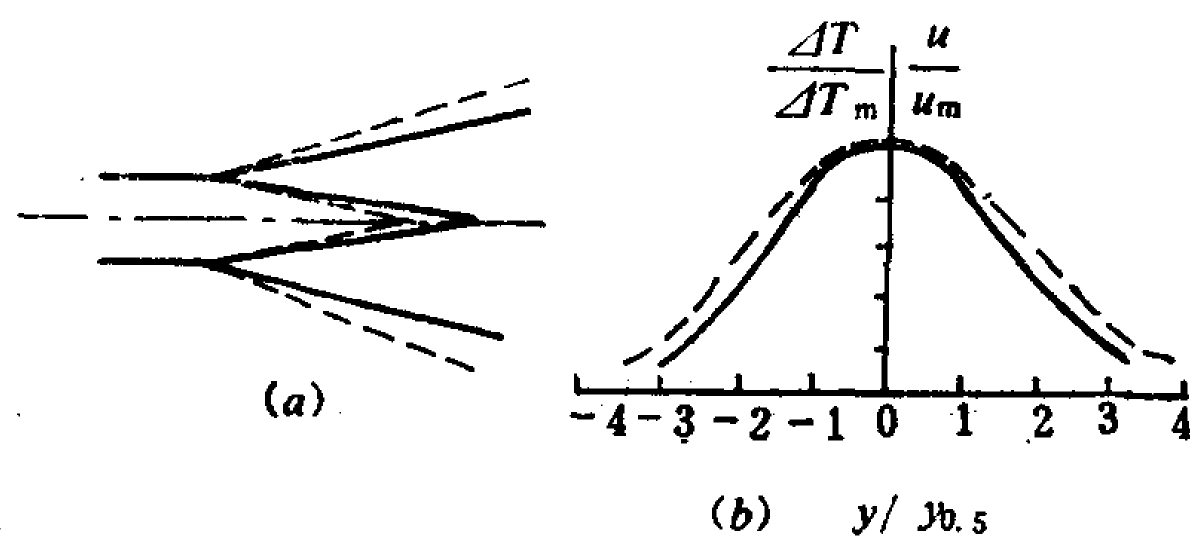


图 11-5 温度边界层和速度边界层的比较

一、圆形射流

（1）轴线温差沿程的变化

设射流喷口处温度为T_0，周围流体温度为T_e，轴线温度为T_m，所取截面任一点温度为T。在浓差射流中各相应的浓度（单位体积流体中的异质含量，含量通常指质量，也可以是重量或体积）分别为c_0、c_e、c_m、c，脚标的意义与温度同。由实验得到，所取截面上任一点的无量纲温差或浓差与无量纲距离之间存在如图11-6所示的关系，因此

$$\frac{\Delta T}{\Delta T_m}=\frac{T-T_e}{T_m-T_e}=\frac{\Delta c}{\Delta c_m}=\frac{c-c_e}{c_m-c_e}=\left(\frac{u}{u_m}\right)^{0.5} \tag{11-24}$$

现在来讨论单位时间通过射流任一截面的热量沿程的变化。在射流沿程任取两截面①、②，以该两截面及其间的射流外边界所包围的空间为控制体（图11-7中虚线所示）。由于射流外边界面上流体温度与周围流体相同，控制体内流体与周围流体没有热传导和热辐射。而射流内部各点压强近似相等，流动处于定压过程，因此在控制体内流体温度处于稳定的条件下，被流体带入控制体的热量应等于带出的热量。令$\bar{i}_1$和$\bar{i}_2$分别为①、②两截面处流体的平均焓值，i_e为周围流体的焓值，

$$\rho Q_1\bar{i}_1+\rho(Q_2-Q_1)i_e=\rho Q_2\bar{i}_2$$

或

$$\rho Q_1(\bar{i}_1-i_e)=\rho Q_2(\bar{i}_2-i_e)$$

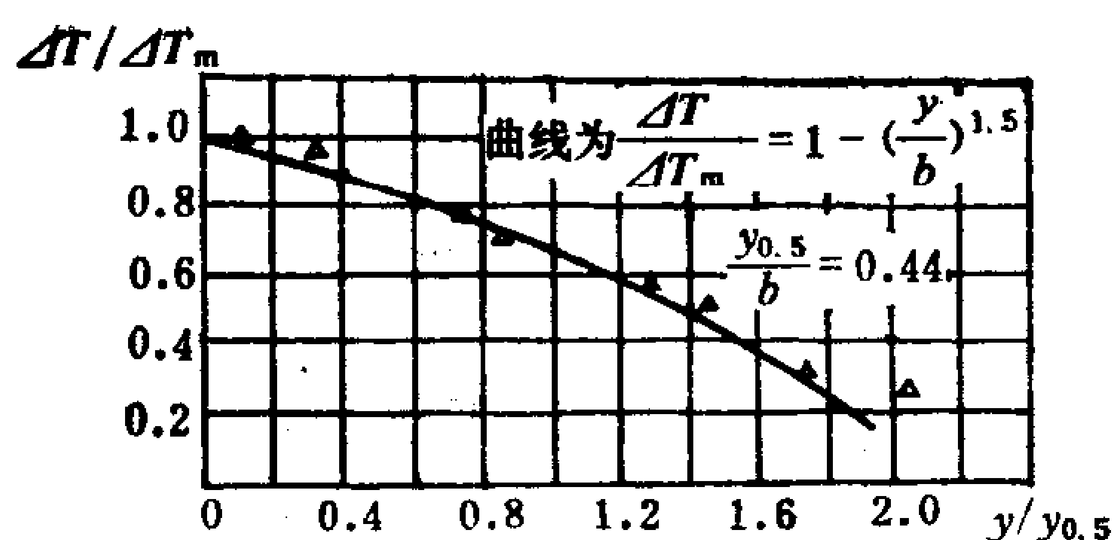


图 11-6 断面温度分布计算值与实测值比较

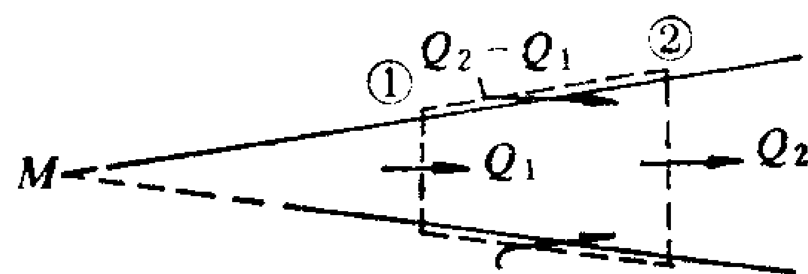


图 11-7 分析射流热力特征的控制体

此式表明，若以周围流体的焓值为起算点，单位时间通过射流各截面的总焓值是相等的，这是射流的热力特征。

如把①截面取在射流喷口处，根据上述特征可得

$$\rho Q_0 \Delta i_0 = \int_0^R \Delta i \rho u_x 2\pi y dy$$

式中，$\Delta i_0 = i_0 - i_e = C_p \Delta T_0$；$\Delta i = i - i_e = C_p \Delta T$；$Q = \pi R_0^2 v_0$将这些关系代入，并以$\rho\pi R^2 \cdot u_m C_p \Delta T_m$除等式两侧

$$\left(\frac{R_0}{R}\right)^2\left(\frac{v_0}{u_m}\right)\left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_m}\right) = 2\int_0^1\left(\frac{\Delta T}{\Delta T_m}\right)\left(\frac{u_x}{u_m}\right)\left(\frac{y}{R}\right)d\left(\frac{y}{R}\right)$$

再将（11-12）、（11-13）、（11-24）及（11-8）等式代入

$$\left(\frac{1}{0.22\bar{x}}\right)^2\left(\frac{\bar{x}}{12.4\sqrt{\beta_0}}\right)\left(\frac{\Delta T_0}{\Delta T_m}\right) = 2\int_0^1(1-\eta^{1.5})^3\eta d\eta$$

而

$$\int_0^1(1-\eta^{1.5})^3\eta d\eta = 0.089$$

代入上式，整理后得

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = \frac{9.38}{\sqrt{\beta_0}\,\bar{x}} \qquad (11\text{-}25')$$

阿勃拉莫维奇根据实验结果作了一些修正，他建议采用的计算射流轴线温差的公式为

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = \frac{9.24}{\sqrt{\beta_0}\,\bar{x}}\sqrt{\frac{T_e}{T_0}} \qquad (11\text{-}25)$$

对于浓差射流，考虑到被流体带入控制体的异质含量应与带出的相等，即可用类似的方法得到同样的结果。

$$\frac{\Delta c_m}{\Delta c_0} = \frac{9.24}{\sqrt{\beta_0}\,\bar{x}} \qquad (11\text{-}26)$$

（2）质量平均温差沿程的变化

质量平均温差T'的定义是：某截面的T'与定压比热C_p的乘积就是以周围流体的焓值为起算点的、通过射流该截面的流体平均焓值，即

$$\Delta \bar{i} = \bar{i} - i_e = C_p \Delta T'$$

根据射流的热力特征可得

$$\rho Q_0 C_p \Delta T_0 = \rho Q C_p \Delta T' \text{或} \frac{\Delta T'}{\Delta T_0} = \frac{Q_0}{Q}$$

将（11-15）式代入

$$\frac{\Delta T'}{\Delta T_0} = \frac{6.45}{\sqrt{\beta_0}\ \bar{x}} \qquad (11\text{-}27')$$

经阿勃拉莫维奇修正后，建议的计算式为

$$\frac{\Delta T'}{\Delta T_0} = \frac{6.45}{\sqrt{\beta_0}\ \bar{x}}\sqrt{\frac{T_e}{T_0}} \qquad (11\text{-}27)$$

用类似方法，可得计算质量平均浓差公式

$$\frac{\Delta c'}{\Delta c_0} = \frac{6.45}{\sqrt{\beta_0}\ \bar{x}} \qquad (11\text{-}28)$$

（3）射流轴线的弯曲

温差射流或浓差射流的密度与周围流体不同，致使作用于射流质点上的重力和浮力不平衡，造成射流轴线的弯曲（见图11-8）。例如热射流的密度比周围流体小，射流向上弯曲。冷射流则向下弯曲。

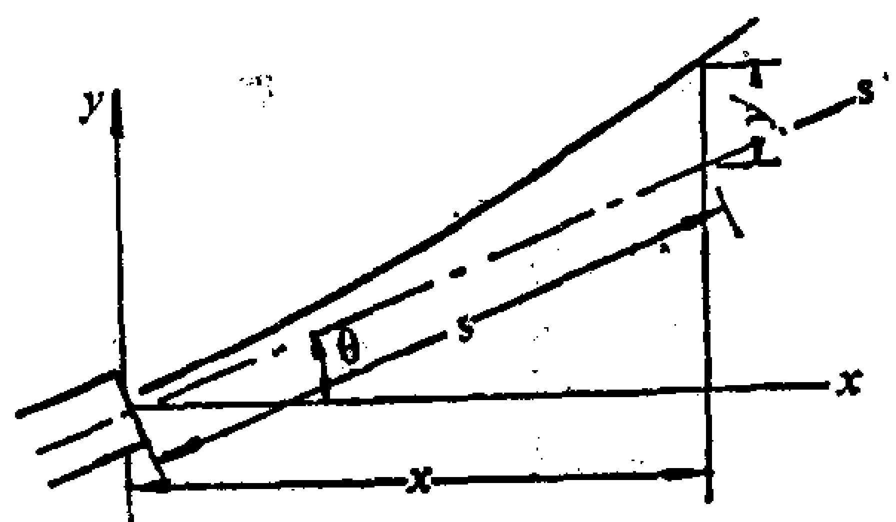


图 11-8　射流轴线的弯曲

温差或浓差射流的密度不仅沿程变化，而且在同一截面的不同点上也是不同的，要精确计算射流轴线的轨迹比较复杂，这里采用的是近似的方法。

设有一热射流从半径为R_0的喷口射出，出口流速与水平线成θ角（见图11-7）。在喷口的轴线上取一单位体积的流体微团，作用在它上面的重力为$\rho_m g$，浮力为$\rho_e g$。阿勃拉莫维奇认为，它在喷嘴轴线s上的铅垂投影的速度和温差变化，分别符合等密度射流轴线流速和轴线温差的计算式（11-13）和（11-25′）。这个微团的运动轨迹就认为是温差射流的轴线。

根据牛顿第二定律

$$(\rho_e - \rho_m)g = \rho_m \frac{du_y}{dt} = \rho_m \frac{d^2 y'}{dt^2}$$

该微团在t时刻偏离原轴线s的铅垂距离y'为

$$y' = \int_0^t u_y dt = \int_0^t dt \int_0^t \frac{du_y}{dt} dt = \int_0^t dt \int_0^t \left(\frac{\rho_e}{\rho_m} - 1\right) g dt \qquad (a)$$

由定压条件下的状态方程可得

$$\frac{\rho_e}{\rho_m} = \frac{T_m}{T_e}$$

所以

$$\frac{\rho_e}{\rho_m} - 1 = \frac{T_m}{T_e} - 1 = \frac{\Delta T_m}{T_e} = \frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}\frac{\Delta T_0}{T_e} \qquad (b)$$

比较（11-13）和（11-25′）两式，即知

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0} = \frac{0.745}{\beta_0}\frac{u_m}{v_0}$$

故（b）式可写成

$$\frac{\rho_e}{\rho_m} - 1 = \frac{0.745}{\beta_0}\frac{u_m}{v_0}\frac{\Delta T_0}{T_e} \qquad (c)$$

将（c）代入（a）

$$y'=\frac{0.745g}{\beta_0 v_0}\frac{\Delta T_0}{T_e}\int_0^t dt\int_0^t u_m dt$$

由于 $\int dt\int u_m dt=\int dt\int ds=\int sdt=\frac{1}{v_0}\int\frac{sds}{\left(\frac{u_m}{v_0}\right)}$，故

$$y'=\frac{0.745}{\beta_0 v_0^2}\frac{\Delta T_0}{T_e}\int_0^s\frac{(x_0+s)sds}{12.4\sqrt{\beta_0}R_0}=\frac{0.06g}{\beta_0^{1.5}v_0^2 R_0}\frac{\Delta T_0}{T_e}\left(\frac{x_0 s^2}{2}+\frac{s^3}{3}\right)$$

阿勃拉莫维奇对上式作了一些修正$\left(\text{乘以修正数}\sqrt{\frac{T_0}{T_e}}\right)$，故

$$\frac{y'}{R_0}=0.02\frac{\mathrm{Ar}}{\beta_0^{1.5}}\sqrt{\frac{T_0}{T_e}}\left(\frac{s}{R_0}\right)^2\left(\frac{3}{2}\frac{x_0}{R_0}+\frac{s}{R_0}\right) \tag{11-29}$$

式中 $\mathrm{Ar}=\frac{gR_0\Delta T_0}{v_0^2 T_e}$就是§6-3导出的相似准数——阿基米德数。因为造成温差射流轴线弯曲的不完全是重力，而是重力与浮力的差值，所以表征温差射流轴线相似的准数不再是佛汝德数，而是阿基米德数。

二、平面射流

同类似方法可得到平面温差射流各相应参数沿程的变化。

（1）轴线温差沿程的变化

$$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}=\frac{3.27}{\sqrt{\beta_0(\bar{x}_0+\bar{s})}}\sqrt{\frac{T_e}{T^0}} \tag{11-30}$$

式中$\bar{x}_0=\frac{x_0}{b_0}$，$\bar{s}=\frac{s}{b_0}$，$b_0$为喷口的半厚度。

（2）质量平均温差沿程的变化

$$\frac{\Delta T'}{\Delta T_0}=\frac{2.66}{\sqrt{\beta_0(\bar{x}_0+\bar{s}_0)}}\sqrt{\frac{T_e}{T_0}} \tag{11-31}$$

（3）射流轴线的偏离

$$\frac{y'}{b_0}=0.091\frac{\mathrm{Ar}}{\beta_0^{1.5}}\sqrt{\frac{T_0}{T_e}}\left[\left(\frac{s}{b_0}-\frac{2}{3}\frac{x_0}{b_0}\right)\left(\frac{s}{b_0}+\frac{x_0}{b_0}\right)^{1.5}+\frac{2}{3}\left(\frac{x_0}{b_0}\right)^{2.5}\right] \tag{11-32}$$

式中阿基米德数为$\mathrm{Ar}=\frac{gb_0}{v_0^2}\frac{\Delta T_0}{T_e}$。

（11-30）～（11-32）式亦可用于近似计算浓差射流的相应参数，但应用时需将修正项$\sqrt{\frac{T_e}{T_0}}$$\left(\text{或}\sqrt{\frac{T_0}{T_e}}\right)$去掉。

【例 11-2】 室外冷空气通过离地面高3.6m的长条形气窗流入厂房内，窗高0.4m，室外温度为0℃，室内温度为30℃，空气流过窗口的速度为2m/s，可按均匀分布考虑，求：

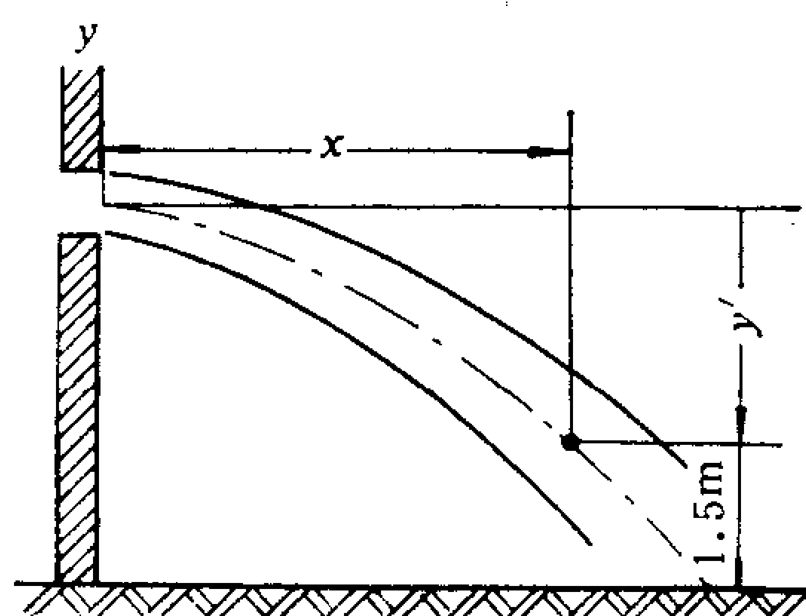
1）射流轴线的轨迹方程；

2）冷射流到达离地面1.5m处的质量平均温度。

【解】 1）求射流轴线的轨迹方程

由于喷口流速沿水平方向射出，s轴与x轴重合，y'即为y值。已知$T_e = 273 + 30 = 303$ K，$T_0 = 273 + 0 = 273K$，$\Delta T_0 = T_0 - T_e = -30$

$$\mathrm{Ar} = \frac{gR_0\Delta T_0}{v_e^2 T_e} = \frac{9.81\times 0.2\times(-30)}{2^2\times 303} = -0.0485$$



例 11-2图

将已知数据代入(11-32)式中，令$x_0 = 0$，$\beta_0 = 1$，$s = x$，$y' = y$

$$\frac{y}{0.2} = 0.091\times(-0.0485)\sqrt{\frac{273}{303}}\left(\frac{x}{0.2}\right)^{2.5}$$

整理后，轨迹方程为

$$y = -0.0468x^{2.5}$$

2）求指定截面处的质量平均温度

离地面1.5m处的y值为$y = -(3.6 - 1.5) = -2.1$m代入轨迹方程，得 $x = s = 4.58$m代入（11-31）式

$$\Delta T' = \frac{2.66}{\sqrt{\frac{4.58}{0.2}}}\sqrt{\frac{303}{273}}\times(-30) = -17.6$$

$$t_m' = T_e + \Delta T' - 273 = 303 - 17.6 - 273 = 12.4℃$$

§ 11-4　紊流射流的其它计算方法

一、阿勃拉莫维奇的旧计算方法

以上介绍的紊流淹没射流计算公式是阿勃拉莫维奇于60年代初提出的。在此之前，阿勃拉莫维奇在40年代就曾提出过计算紊流射流的方法。新方法是对旧方法的修正。旧方法在我国的通风工程设计计算中尚有应用，现作简要介绍。

旧方法中射流结构图形与新方法稍有不同。主体段与起始段的扩散角α是一致的（见图11-9），因而射流的外边界线是一条贯通的直线。α不是个定值，由射流半径(或厚度)的线性增长性可知，R（或b）$= Kx$，故

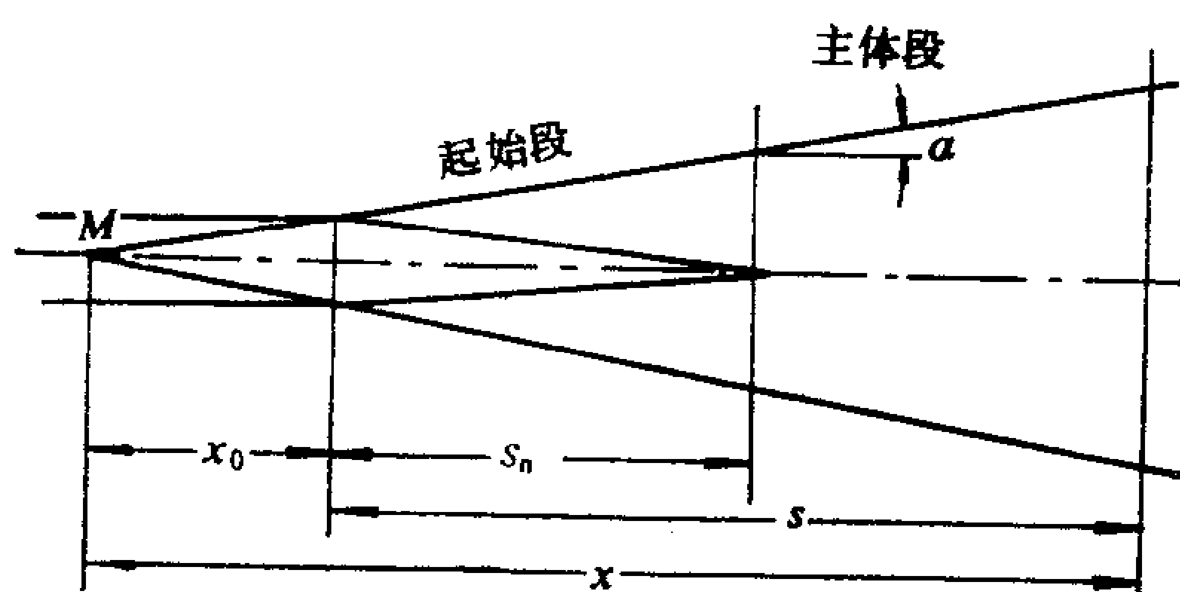


图 11-9　阿氏旧方法的射流结构简图

$$\tan\alpha = \frac{R(\text{或}b)}{x} = K$$

K是一个实验常数。阿勃拉莫维奇令$K = \phi a$，ϕ为喷口的形状系数，圆形射流$\phi = 3.4$，平面射流$\phi = 2.44$。a为紊流系数，它与喷口处射流的紊动强度及断面流速分布的均匀程度有关。喷口处紊动强度越大，a值越大；流速分布越不均匀，a值也越大，其值可参考表11-1选用。

旧公式的分析方法与新公式一样，也是以通过射流各截面的动量通量相等为出发点。现将阿勃拉莫维奇计算紊流射流主体段各参数的旧公式列于表11-2中（推导从略），表中符号与新公式同。

几种喷嘴的紊流系数　　表 11-1

喷嘴种类	紊流系数 a	喷嘴种类	紊流系数 a
带有缩口的光滑卷边喷嘴	0.066	巴吐林喷嘴(有导风板)	0.12
圆柱形喷嘴	0.08	轴流风机(有导风板)	0.16
带有导风板或栅栏的喷嘴	0.09	轴流风机(两侧有网)	0.20
方形喷嘴	0.10	条缝喷嘴	0.11～0.12

阿勃拉莫维奇计算紊流射流的旧公式　　表 11-2

参数名称	符号	圆形射流	平面射流
射流半径或半厚度	R b	$\frac{R}{R_0}=3.4\left(\frac{as}{R_0}+0.294\right)$	$\frac{b}{b_0}=2.44\left(\frac{as}{b_0}+0.41\right)$
轴线速度	u_m	$\frac{u_m}{v_0}=\frac{0.965}{\frac{as}{R_0}+0.294}$	$\frac{u_m}{v_0}=\frac{1.2}{\left(\frac{as}{b_0}+0.41\right)^{0.5}}$
流量	Q	$\frac{Q}{Q_0}=2.2\left(\frac{as}{R_0}+0.294\right)$	$\frac{Q}{Q_0}=1.2\sqrt{\frac{as}{b_0}+0.41}$
断面平均流速	v	$\frac{v}{v_0}=\frac{0.19}{\frac{as}{R_0}+0.294}$	$\frac{v}{v_0}=\frac{0.492}{\left(\frac{as}{b_0}+0.41\right)^{0.5}}$
质量平均流速	v'	$\frac{v'}{v_0}=\frac{0.46}{\frac{as}{R_0}+0.294}$	$\frac{v'}{v_0}=\frac{0.833}{\left(\frac{as}{b_0}+0.41\right)^{0.5}}$
轴线温差	ΔT_m	$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}=\frac{0.706}{\frac{as}{R_0}+0.294}$	$\frac{\Delta T_m}{\Delta T_0}=\frac{1.032}{\left(\frac{as}{b_0}+0.41\right)^{0.5}}$
质量平均温差	$\Delta T'$	$\frac{\Delta T'}{\Delta T_0}=\frac{0.46}{\frac{as}{R_0}+0.294}$	$\frac{\Delta T'}{\Delta T_0}=\frac{0.833}{\left(\frac{as}{b_0}+0.41\right)^{0.5}}$
射流轴线偏离值	y'	$\frac{y'}{R_0}=\mathrm{Ar}\left(\frac{s}{R_0}\right)^2\left(0.253\frac{as}{R_0}+0.35\right)$	$\frac{y'}{b_0}=\frac{0.904\mathrm{Ar}}{a^2}\sqrt{\frac{T_0}{T_e}}\left(\frac{as}{2b_0}+0.205\right)^{2.5}$

表中阿基米德数在圆形射流中 $\mathrm{Ar}=\frac{gR_0}{v_0^2}\frac{\Delta T_0}{T_e}$，在平面射流中 $\mathrm{Ar}=\frac{gb_0}{v_0^2}\frac{\Delta T_0}{T_e}$。

二、采用正态流速分布的射流计算公式

阿尔伯逊等采用正态分布规律（11-9）式作为射流主体段各截面的相似速度分布，并同样以通过射流各截面的动量通量守恒为分析的出发点，射流结构图形与阿勃拉莫维奇的新方法相同（见图11-4），喷口流速分布认为是均匀的，则可得到一组计算射流主体段各参数的公式（见表11-3）。

将上面的公式与出口流速分布均匀（$\beta_0=1$，$x_0\approx 0$）条件下的阿勃拉莫维奇新公式比较，两者不仅结构形式相同，计算结果也很接近。

上述公式虽然很简单，但它只适用于出口流速分布均匀的情况。阿勃拉莫维奇的新公

采用正态流速分布的紊流射流计算公式 表 11-3

参数名称	符号	圆形射流	平面射流
起始段长度	s_0	$s_0=13.6R_0$	$s_0=10.4b_0$
轴线流速	u_m	$\frac{u_m}{v_0}=12.4\frac{R_0}{s}$	$\frac{u_m}{v_0}=3.22\sqrt{\frac{b_0}{s}}$
流量	Q	$\frac{Q}{Q_0}=0.16\frac{s}{R_0}$	$\frac{Q}{Q_0}=0.44\sqrt{\frac{s}{b_0}}$
质量平均流速	v'	$\frac{v'}{v_0}=6.25\frac{R_0}{s}$	$\frac{v'}{v}=2.28\sqrt{\frac{b_0}{s}}$

式虽然考虑了出口流速分布不均匀的影响，但缺乏有关β_0和x_0在不同喷嘴情况下的实验数据，这可能是新方法在实际应用中还不能完全取代旧方法的原因。

§ 11-5 紊流扩散的基本方程

扩散过程可以是分子运动的结果，或者是紊流脉动的结果。前者称为分子扩散，后者称为是紊动扩散。分子扩散的规律对紊动扩散的研究有重要的借鉴作用，所以本节先介绍分子扩散。

一、分子扩散

放些盐在一杯水中，不久整杯水都有了咸味，这一大家都熟知的现象就是分子扩散的结果。1855年费克（Fick）在热传导定理的启发下，首先提出了分子扩散定律。他认为单位时间通过单位面积的溶解物质量（通常称为单位通量）与溶质浓度在该面法线方向n的梯度成正比

$$F=-K_m\frac{dc}{dn} \tag{11-33}$$

式中F为溶质在n方向的单位通量；c为溶质的浓度；K_m为溶质的扩散系数。如溶质的含量以质量计，则F的量纲为$ML^{-2}T^{-1}$，c的量纲为ML^{-3}，K_m的量纲与运动粘性系数ν相同，即为L^2T^{-1}。

（11-33）式称为费克第一定律。由于溶质总是由浓度高的地方向浓度低的地方扩散，即溶质扩散的方向与浓度的增值方向相反，$\frac{dc}{dn}$恒为负值，故式前需加“-”号。

分子扩散系数随溶质和流体的种类及温度、压强而变化。表11-4中给出了几种物质在水或空气中的扩散系数。

在运动流体中，不仅有分子扩散，还伴随有运动流体携带而造成的物质迁移。这种迁移称为移流输送。如流体作层流运动，不存在紊动扩散，则扩散物质通过任一断面的通量应为分子扩散输送与移流输送之和。根据这样的认识及扩散物质守恒的原理，可以导出描述扩散物质浓度变化规律的微分方程。

在作层流运动的流体中，取一微元六面体为控制体，如图11-10所示。其边长分别为dx、dy、dz，中心点坐标为x、y、z，中心点的速度分量为u_x、u_y、u_z，浓度为c（x，

几种物质的扩散系数 **表 11-4**

气体在空气中的扩散系数温度为25°C，压强为大气压		几种水溶液在水中的扩散系数		
扩散物质	$K_m \times 10^6 m^2/s$	扩 散 物 质	$K_m \times 10^9 m^2/s$	温度(°C)
H_2	41	H_2	4.8	25
水蒸汽	26	O_2	1.8	20
CO_2	16.4	CO_2	1.76	20
N_2O	20	NaCl	1.35	20
乙 醇	12	乙 醇	1.0	20
萘	6	蔗 糖	0.45	20
甲 苯	8.4	苯钾酸	0.9	25

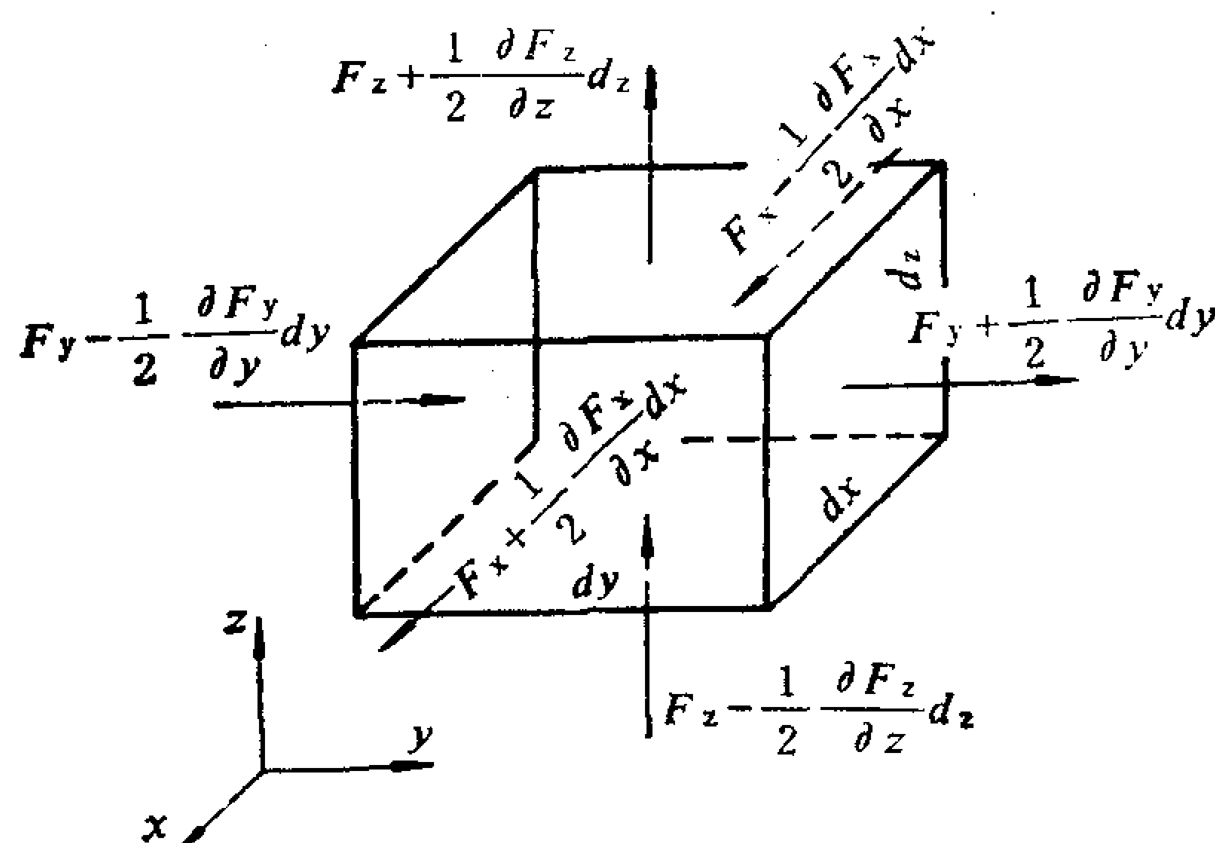


图 11-10 推导移流扩散方程的控制体

y，z）。令F_x、F_y、F_z分别为中心点的扩散通量在三个坐标轴方向的分量。则dt时段内沿x方向流进控制体的扩散物质量为$\left(F_x-\frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}dx\right)dydzdt$，流出控制体的扩散物质量为$\left(F_x+\frac{1}{2}\frac{\partial F_x}{\partial x}dx\right)dydzdt$，在$x$方向流进与流出的扩散物质的差值为

$$-\frac{\partial F_x}{\partial x}dxdydzdt$$

同理，在y、z方向流进与流出的扩散物质的差值为

$$-\frac{\partial F_y}{\partial y}dxdydzdt$$

$$-\frac{\partial F_z}{\partial z}dxdydzdt$$

由于扩散物质守恒，dt时段内净流入控制体的扩散物质量应等于同时段内控制体中因浓度增大而引起的扩散物质增量

$$\frac{\partial c}{\partial t}dtdxdydz=-\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dxdydzdt$$

$$\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}=0 \tag{11-34}$$

如前所述，移流扩散中的通量应为移流输送与扩散输送之和，故

$$
\left.\begin{aligned}
F_x &= u_x c + \left(-K_m \frac{\partial c}{\partial x}\right) \\
F_y &= u_y c + \left(-K_m \frac{\partial c}{\partial y}\right) \\
F_z &= u_z c + \left(-K_m \frac{\partial c}{\partial z}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}35)
$$

将（11-35）式代入（11-34）式

$$
\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial (u_x c)}{\partial x} + \frac{\partial (u_y c)}{\partial y} + \frac{\partial (u_z c)}{\partial z} = K_m\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) \qquad (11\text{-}36)
$$

写成矢量形式

$$
\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla\cdot(\vec{u}\, c) = K_m \nabla^2 c \qquad (11\text{-}36')
$$

这就是移流扩散的基本方程，也称费克扩散方程，式中$\nabla\cdot(\vec{u}\, c)$为移流输送项，$K_m \nabla^2 c$为分子扩散项。

在静止流体中，$u_x = u_y = u_z = 0$，上式简化为

$$
\frac{\partial c}{\partial t} = K_m\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right) \qquad (11\text{-}37)
$$

这是（11-33）式的三元表达式，称为费克第二定律。

二、紊流扩散基本方程

如流态为紊流，不但流速有脉动，扩散物质的浓度也出现随机的脉动现象。和流速一样，将任一点的瞬时浓度 c 表示为时均浓度 $\bar{c}$ 与脉动浓度 c' 之和

$$
c = \bar{c} + c' \qquad (11\text{-}38)
$$

移流扩散基本方程可认为对紊流的瞬时流动仍然适用，因此将$u_x = \bar{u}_x + u'_x$、$u_y = \bar{u}_y + u'_y$、$u_z = \bar{u}_z + u'_z$及（11-38）式一并代入（11-36）式中

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(\bar{c}+c') + \frac{\partial}{\partial x}[(\bar{c}+c')(\bar{u}_x + u')] + \frac{\partial}{\partial y}[(\bar{c}+c')(\bar{u}_y + u'_y)] \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial z}[(\bar{c}+c')(\bar{u}_z + u'_z)] = K_m\left[\frac{\partial^2(\bar{c}+c')}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{c}+c')}{\partial y^2}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2(\bar{c}+c')}{\partial z^2}\right]
\end{aligned}
$$

将各项展开，按雷诺的运算法则逐项取时平均，并考虑到紊流时均流的连续性方程

$$
\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0
$$

整理化简后

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + u_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} + u_z \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}\overline{(u'_x c')} - \frac{\partial}{\partial y}\overline{(u'_y c')} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{(u'_z c')} \\
&\quad + K_m\left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial z^2}\right) \qquad (11\text{-}39)
\end{aligned}
$$

比较上式与（11-36）式，等式右侧多了$-\frac{\partial'}{\partial x}(\overline{u'_x c'})$、$-\frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'_y c'})$、$-\frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'_z c'})$三项，而$\overline{u'_x c'}$、$\overline{u'_y c'}$、$\overline{u'_z c'}$的物理意义是紊流脉动引起的单位时间通过分别垂直于三个坐

标轴的单位面积的扩散物质量，即紊动扩散引起的单位通量，它们与费克定律中的单位通量F含义相似。因此类比该定律，可将它们表示为

$$\left.\begin{aligned}\overline{u_x'c'} &= -E_x\frac{\partial\bar{c}}{\partial x}\\\overline{u_y'c'} &= -E_y\frac{\partial\bar{c}}{\partial y}\\\overline{u_z'c'} &= -E_z\frac{\partial\bar{c}}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{11-40}$$

式中E_x、E_y、E_z分别为三个坐标轴方向的紊动扩散系数。一般说来，紊动扩散系数在不同方向有不同的值，故分别表示。同时它还随空间坐标变化。将（11-40）式代入，（11-39）式成为

$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial\bar{c}}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{c}}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{c}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E_x\frac{\partial\bar{c}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_y\frac{\partial\bar{c}}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_z\frac{\partial\bar{c}}{\partial z}\right)+K_m\left(\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial z^2}\right) \tag{11-41}$$

紊流随机运动的尺度远大于分子随机运动的尺度，所以除壁面附近因紊动受到限制的区域外，分子扩散远比紊流扩散慢，通常分子扩散可以忽略，于是（11-41）式简化为

$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial t}+\bar{u}_x\frac{\partial\bar{c}}{\partial x}+\bar{u}_y\frac{\partial\bar{c}}{\partial y}+\bar{u}_z\frac{\partial\bar{c}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(E_x\frac{\partial\bar{c}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(E_y\frac{\partial\bar{c}}{\partial y}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(E_z\frac{\partial\bar{c}}{\partial z}\right) \tag{11-42}$$

这就是紊流扩散基本方程。

三、扩散方程的求解

紊流扩散基本方程中的时均流速$\bar{u}_x$、$\bar{u}_y$、$\bar{u}_z$，可由补充了经验关系式的雷诺方程求出。解(11-42)式时一般时均流速及三个紊动扩散系数都是已知的，这样原则上就可以根据初始条件和边界条件解出时均浓度随时间及空间坐标的变化。但是具体求解时还要解决好两个问题：确定扩散系数和解二阶抛物型偏微分方程的数学问题。

在实际问题中，确定的扩散系数是否符合实际对计算结果至关重要，但迄今还没有积累足够的资料。只有在简单的情况下，可借助于一些由分析方法确定的关系式计算。一般需通过实验或实测手段确定，即在较简单的扩散方式中实测浓度分布，然后按已有的关系式反算扩散系数。

关于解偏微分方程，在简单的初、边条件下可求得解析解。比较复杂一些的情况，只能借助于数值计算求得近似解。下面仅介绍扩散系数为常数时瞬时源的解。

（1）瞬时平面源在一元流动中的扩散

设有一作等速均匀流的一元流动，流速为U，流束两端延伸至无穷远。今在流束某一过流断面上瞬时投放扩散物质M，它在该过流断面上是均匀分布的，这就是瞬时平面源。令x轴与流动方向一致，因此（11-42）式中$\bar{u}_x=U=$常数，$\bar{u}_y=\bar{u}_z=0$，$\frac{\partial c}{\partial y}=\frac{\partial c}{\partial z}=0$。在$E_x$为常数条件下，该式简化为

$$\frac{\partial\bar{c}}{\partial t}+U\frac{\partial c}{\partial x}=E_x\frac{\partial^2\bar{c}}{\partial x^2} \tag{11-43}$$

如改换成动坐标系，此式还可以进一步简化。取以速度U沿x方向与流体一起运动的动坐标系x'，两个坐标系之间的关系为

$$x'=x-Ut \tag{11-44}$$

显然流体对动坐标系的相对速度为零，即对动坐标系来说，只有紊动扩散，没有移流输送。因此，换成

动坐标系后（11-43）式进一步简化为

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = E_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x'^2} \qquad (11\text{-}45)$$

这是典型的一元热传导方程，它的解是

$$\bar{c} = \frac{B}{\sqrt{t}} \exp\left(\frac{-x'^2}{4E_x t}\right) \qquad (11\text{-}46)$$

式中B为积分常数。若扩散物质在坐标原点投放，由于扩散过程中流体内的扩散物质量必然等于投放的扩散物质量M，故有

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{c} A\, dx' = \frac{AB\sqrt{4E_x t}}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x'}{\sqrt{4E_x t}}\right)^2 d\left(\frac{x'}{\sqrt{4E_x t}}\right)$$

$$= AB\sqrt{4\pi E_x} \text{ ❶}$$

$$\therefore \qquad B = \frac{M}{A\sqrt{4\pi E_x}}$$

式中A为过流断面面积。将得到的积分常数代入后，得

$$\bar{c} = \frac{M}{A\sqrt{4\pi E_x t}} \exp\left(-\frac{x'^2}{4E_x t}\right) \qquad (11\text{-}46')$$

再还原为静坐标系，即将（11-44）式代入，就得到（11-43）式的解

$$\bar{c} = \frac{M}{A\sqrt{4\pi E_x t}} \exp\left[-\frac{(x-Ut)^2}{4E_x t}\right] \qquad (11\text{-}47)$$

当紊流扩散系数为常数且流动为等速均匀流时，移流扩散基本方程（11-36）式与紊流扩散基本方程（11-42）式形式完全相同，因此（11-47）式中将E_x换成K_m就是瞬时平面源在一元层流中分子扩散的解。

$$c = \frac{M}{A\sqrt{4\pi K_m t}} \exp\left[-\frac{(x-Ut)^2}{4K_m t}\right] \qquad (11\text{-}48)$$

（2）瞬时点源在等速均匀流中的平面和空间扩散

先讨论瞬时点源在平面流动中的扩散。若流动平行于xoy平面，则平面流动的紊流扩散方程为

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u}_x \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} + u_y \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} = E_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + E_y \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2}$$

设等速均匀流U与x轴方向一致，则上式中$\bar{u}_x = U =$常数，$\bar{u}_y = 0$，于是

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + U \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = E_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + E_y \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \qquad (11\text{-}49)$$

换成动坐标系，即令

$$\left.\begin{aligned} x &= x' + Ut \\ y &= y' \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}50)$$

上式简化为

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = E_x \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x'^2} + E_y \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y'^2} \qquad (11\text{-}51)$$

设任一点浓度$\bar{c}(x', y', t)$为两部分浓度$\bar{c}_1(x', t)$与$\bar{c}_2(y', t)$的乘积，即$\bar{c}(x', y', t) = \bar{c}_1(x', t)\bar{c}_2(y', t)$。代入（11-51）式中

$$\bar{c}_1 \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial t} + \bar{c}_2 \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial t} = E_x \bar{c}_2 \frac{\partial \bar{c}_1}{\partial x'^2} + E_y \bar{c}_1 \frac{\partial \bar{c}_2}{\partial y'^2}$$

---

❶ 采用概率积分$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\eta^2} d\eta = \sqrt{\pi}$

或 $$\bar{c}_1\left(\frac{\partial \bar{c}_2}{\partial t}-E_y\frac{\partial^2 c_2}{\partial y'^2}\right)+\bar{c}_2\left(\frac{\partial \bar{c}_1}{\partial t}-E_x\frac{\partial^2 c_1}{\partial x'^2}\right)=0$$

此式如成立必须两个括号都等于零，这样就得到两个一元紊流扩散方程，它们的解$\bar{c}_1$和$\bar{c}_2$与（11-46）式相似，因此

$$\bar{c}=\frac{B}{t}\exp\left(-\frac{x'^2}{4E_xt}-\frac{y'^2}{4E_yt}\right) \tag{11-52}$$

B为积分常数。若扩散物质在坐标原点投放，考虑到z方向的单位厚度范围内流体中的扩散物质量必然等于瞬时投放的扩散物质量M，故

$$M=-\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{c}dxdy$$

将（11-52）式代入，可得积分常数

$$B=\frac{M}{4\pi\sqrt{E_xE_y}}$$

∴ $$\bar{c}=\frac{M}{4\pi t\sqrt{E_xE_y}}\exp\left(-\frac{x'^2}{4E_xt}-\frac{y'^2}{4E_yt}\right) \tag{11-53}$$

还原为静坐标系，即得（11-52）式的解

$$\bar{c}=\frac{M}{4\pi t\sqrt{E_xE_y}}\exp\left[-\frac{(x-Ut)^2}{4E_xt}-\frac{y^2}{4E_yt}\right] \tag{11-54}$$

同理可得瞬时点源在等速均匀流中的空间紊动扩散的浓度分布

$$\bar{c}=\frac{M}{8(\pi t)^{1.5}(E_xE_yE_z)^{0.5}}\exp\left[-\frac{(x-Ut)^2}{4E_xt}-\frac{y^2}{4E_yt}-\frac{z^2}{4E_zt}\right] \tag{11-55}$$

式中 $M=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}c(x,y,z,t)dxdydz$

显然，（11-54）及（11-55）式中如将紊流扩散系数换成分子扩散系数，它们就分别适用于分子在等速均匀流中的平面及空间扩散。

【例 11-3】 有一水深2.5m的宽阔渠道，除靠岸边附近的区域外，可近似认为是等速均匀流，流速为2m/s。今在渠道中央沿水深均匀瞬时投放10kg示踪物质，试求6s后在投放点下游10m处示踪物质的浓度大于0.2kg/m³区域的宽度。设纵向及横向的紊流扩散系数皆为0.1m²/s。

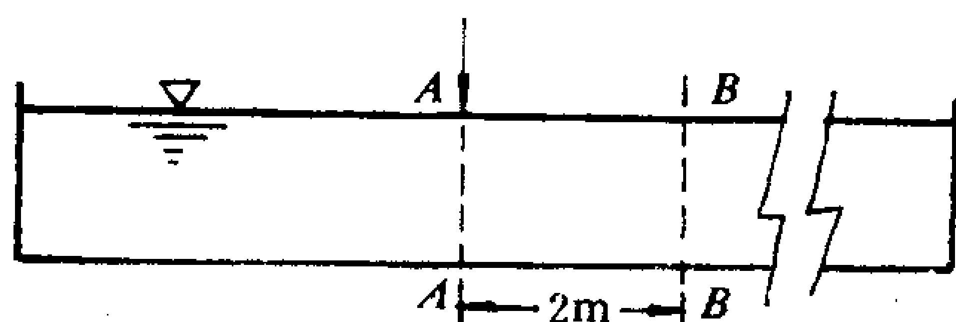
【解】 这是瞬时点源的平面扩散问题，将各已知数代入（11-54）式中

$$0.2=\frac{10/2.5}{4\pi\times6\times0.1}\exp\left(-\frac{10-2\times6}{4\times0.1\times6}-\frac{y^2}{4\times0.1\times6}\right)$$

解得浓度等于0.2kg/m³的点位于$y=\pm2.08$m，该两点之间示踪物质的浓度皆大于0.2kg/m³，故所求宽度为$b=2\times2.08=4.16$m。

【例 11-4】 在一很长的矩形封闭水槽中进行紊流扩散试验。水槽宽1m，水深0.5m。紊动是借助于一个垂直屏幕的振动激发的。设$t=0$时在A-A断面瞬时均匀投放示踪物质0.5kg，若紊流扩散系数$E_x=0.01\text{m}^2/\text{s}$，试计算离投放断面2m的$B$-$B$断面出现最大浓度的时间及该最大浓度。

【解】 这是瞬时平面源在没有移流情况下的一元紊流扩散问题。当$U=0$时，（11-47）简化为



例 11-4图

$$\bar{c}=\frac{M}{A\sqrt{4\pi E_xt}}\exp\left(-\frac{x^2}{4E_xt}\right)$$

为求$x=l=2$m的B-B断面出现$\bar{c}_{max}$的时间，令$\frac{d\bar{c}}{dt}=0$，即

$$\frac{d\bar{c}}{dt}=\frac{M}{A\sqrt{4\pi E_x}}\frac{d}{dt}\left[t^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{l^2}{4E_x t}\right)\right]=\frac{M}{A\sqrt{4\pi E_x}}\exp\left(-\frac{l^2}{4E_x t}\right)$$

$$\times\left[-\frac{1}{2}t^{-\frac{3}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{l^2}{4E_x}\right)(-1)t^{-2}\right]=0$$

由此解得

$$t=\frac{l^2}{2E_x}=\frac{2^2}{1\times 0.01}=200\text{s}$$

将求得的时间代入浓度计算式中，即得最大浓度$\bar{c}_{max}$

$$\bar{c}_{max}=\frac{0.5}{1\times 0.5\times\sqrt{4\pi\times 0.01\times 200}}\exp\left(-\frac{2^2}{4\times 0.01\times 200}\right)$$

$$=0.12\text{kg/m}^3$$

习　题

11-1　喷口直径为400mm的圆形射流，以6 m/s均匀分布的流速射出，求离喷口3 m处射流的半径R、流量Q、轴线流速u_m和质量平均流速v'。

11-2　空气从直径200mm的圆形喷口射出，流量为0.25m³/s，分别用阿勃拉莫维奇的新方法和正态流速分布法计算射程2 m处射流的轴线流速、流量和质量平均流速。喷口流速均匀分布。

11-3　某体育馆圆形送风口的直径$D_0=500$mm，今要求乒乓球比赛时风速不大于0.3m/s，风口离比赛区35m，问乒乓球赛时出口风量不能超过多少?出口流速近似均匀分布。

11-4　平面射流的喷口长2 m、高40mm，出口流量0.8m³/s，试分别用阿勃拉莫维奇的新方法和旧方法计算射程2 m处的轴线流速、流量和质量平均流速。喷口流速均匀分布。采用$a=0.11$。

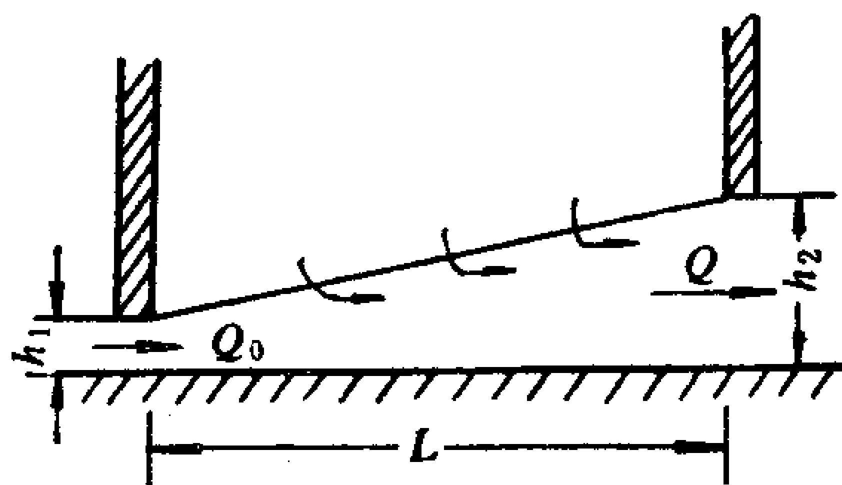
11-5　圆形射流喷口半径$R_0=200$mm，今要求射程12m处距轴线$y=1.5$m的地方流速为3m/s，求喷口流量。

11-6　用吹吸系统清除沉降室地面上的烟尘，室长$L=6$ m，室宽$B=5$m，吹风口高$h_1=150$mm，流速分布近似均匀，求：

1）吸风口高度h_2；

2）吸风口的质量平均流速达到4 m/s时的吹风口风量；

3）吸风口风量。



题 11-6图

11-7　平面射流的喷口长2 m、高0.05m，喷口流速10m/s，用阿勃拉莫维奇的旧方法($a=0.11$)计算射程2 m处的流量、质量平均流速，以及速度大于质量平均流速的范围。

11-8　40°C的空气从直径为200mm的圆形喷口射出，喷口流速为3m/s（均匀分布），周围空气温度为18°C，求射程5m处射流的轴线温度和质量平均温度。

11-9　一平面射流喷射清洁空气于含有粉尘的室内环境中，室内粉尘浓度为$c_e=0.06\times10^{-3}$kg/

m^3，工作地点允许的质量平均浓度为$c' = 0.025\times10^{-3}kg/m^3$，要求该处射流高度不小于1m，试用阿勃拉莫维奇的旧公式（$a = 0.12$）计算喷口应有的高度和喷口离工作地点的距离。

11-10 半径为0.4m的圆形喷口，比地面高5m，沿水平方向以流速2m/s向室内喷射温度为10°C的冷空气，室内温度为27°C，求距喷口 6 m处射流的质量平均速度、轴线温度及射流轴线离地面的高度。

11-11 平面射流喷射清洁空气于含尘浓度为0.12mg/l的静止空气中，喷口流速为 4 m/s，今要求在射程3m处轴线流速为 2 m/s，试用阿勃拉莫维奇的旧方法（$a = 0.12$）计算喷口高度及工作区轴线含尘浓度。

11-12 已知圆形喷口送风温度为5°C，车间温度为30°C，要求工作地点的质量平均风速为2.4m/s，轴线温度为15°C，工作面射流直径为 2 m，求：

1）喷口到工作面的距离；

2）喷口直径和流速；

3）如喷口轴线水平置放，射流轴线在工作面处下降的高度。

*11-13 某瞬时将10kg食盐投入流速为0.6m/s的水流中，过流断面面积为5m^2，沿流动方向的紊流扩散系数为40m^2/s，半小时后盐沿流向如何分布？

*11-14 水以0.8m/s的速度在直径500mm的管道中流动，流速近似均匀分布，今在某断面处瞬时投放 2 kg的示踪物质（均匀分布在断面上），扩散系数$E_x = 0.4m^2/s$，求：

1）任一时刻最大浓度的表达式$c_{max}(t)$；

2）$t = 60s$时的最大浓度；

3）该时刻$x = 20m$处的浓度。

第十二章　一元气体动力学基础

当高速气流在变径管道内运动或气体在长距离管道内流动时，由于压强沿程变化大，引起密度和温度的明显变化，不能再把气体作为不可压缩流体看待，必须考虑它的压缩性。本章主要讨论这种可压缩流体在管道内流动的基本特性。

研究可压缩一元气体的流动，除速度和压强外，又增加了密度和温度两个未知变量，仅用连续性方程和动量方程已无法求解，还需补充两个方程，即能量方程和状态方程，这就需要用到热力学的知识。由于可压缩流体的运动必须与热力学的方程联立求解，因此本章的计算中，压强必须采用绝对压强，温度必须采用开尔文温度。

§ 12-1　小扰动波的传播速度——音速　马赫数

一、音速

要考虑密度随压强的变化是可压缩流体区别于不可压缩流体流动的主要特征。密度对压强的变化率与小扰动波的传播速度有密切关系。声音的传播是一种小扰动波，所以在分析可压缩流体的流动时，音速是一个重要的参数。

为了说明小扰动波传播的物理过程，取一右端装有活塞的等直径长直管来讨论。管内充满静止的可压缩流体。若活塞以微小速度dv向左运动，紧贴活塞的流体也随之以速度dv向左运动，并产生微小的压强增量dp和密度的微小增量$d\rho$。密度的增大使扰动区域的流体体积有所减小，因而要延迟一段时间才能再推动其左侧流体运动。这个过程不断继续，就形成了向左传播的小扰动波的波速a。扰动区域与未扰动区域的分界面称为**波峰**。波峰到达前流体处于静止状态，设其压强为p，密度为ρ。波峰过后速度变为dv，压强变为$p+dp$，密度变为$\rho+d\rho$。若在波峰前后微小距离处取两断面（图12-1，b中虚线所示），它们与管壁形成的动控制体随同波峰以速度a向左运动。取固结在控制体上的动坐标系来分析。流体由左侧流入控制体的速度为a，由右侧流出控制体的速度为$(a-dv)$。对此控制体列连续性方程的动量方程

$$\rho aA=(a-dv)(\rho+d\rho)A$$

$$\rho aA[(a-dv)-a]=pA-(p+dp)A$$

式中A为管道的过流断面面积。

整理后，略去高阶小量

$$ad\rho-\rho dv=0$$

$$dp=\rho adv$$

在上两式中消去dv即得音速的表达式

$$a=\sqrt{\frac{dp}{d\rho}} \qquad (12\text{-}1)$$

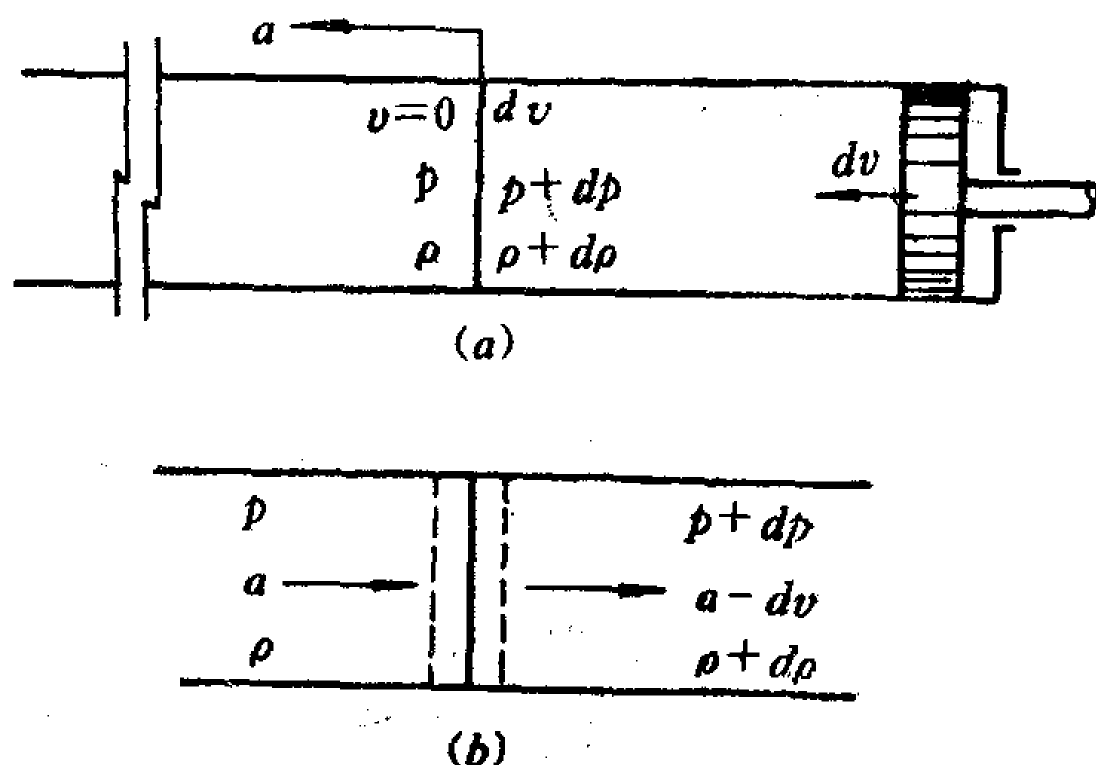


图 12-1　小扰动波的传播

此式对气体和液体都适用。

由第二章已知，密度对压强的变化率与液体的弹性模量E有下列关系

$$E=\rho\frac{dp}{d\rho}$$

因此声音在液体中的传播速度又可表示为

$$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{12-2}$$

对于气体，由于压强、密度、温度等参数的变化都是无限小量，且小扰动波传播的速度很快，与外界来不及进行热交换。因此可以认为，小扰动波的传播过程是一个既绝热又没有能量损失的等熵过程。气体的等熵过程方程为

$$\frac{p}{\rho^k}=c$$

微分上式 $dp=ck\rho^{k-1}d\rho=k\frac{pd\rho}{\rho}$，即得微分形式的等熵过程方程

$$\frac{dp}{d\rho}=k\frac{p}{\rho} \tag{12-3}$$

再代入完全气体状态方程$\frac{p}{\rho}=RT$，即得气体中的音速公式

$$a=\sqrt{k\frac{p}{\rho}}=\sqrt{kRT} \tag{12-4}$$

由（12-1）及（12-4）式可以看出，音速有下列性质：

1）音速与密度对压强的变化率的平方根成反比，流体越容易压缩，a值就越小；反之，a值越大。对于不可压缩流体，$\frac{d\rho}{dp}\approx 0$，$a\approx\infty$，所以音速是反映当地流体可压缩性大小的一个物理参数。

2）音速与气体的绝对温度的平方根成正比，在气体动力学中温度是空间坐标的函数，因此音速不是常数，它也是空间坐标的函数，为了强调这一点，常把a称为**当地音速**。

3）音速与气体的绝热指数k和气体常数R有关，所以不同气体各有自己的音速值。对于空气，$k=1.4$，$R=287\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$，代入（12-4）式，得

$$a=20.1\sqrt{T}\quad \text{m/s} \tag{12-5}$$

二、马赫数

当地气流速度与当地音速之比称为**马赫数**，以M表示，

$$\text{M}=\frac{u}{a} \tag{12-6}$$

它也是空间坐标的函数。由第六章已知，马赫数表征惯性力与弹性力之比，它是气体动力学中最重要的相似准数。气流速度的变化可以间接地反映密度的变化。速度越大的地方，压强越小，密度也越小。因此气流速度与反映气体可压缩性大小的音速相比组成的马赫数，标志着当地气流的压缩（实际上是膨胀）程度。马赫数小意味着气体运动引起的膨胀程度小，因而可近似地当作不可压缩流体处理。马赫数大，表示气流膨胀得很厉害，必须

考虑其密度的变化。

与其它相似准数类似，马赫数可作为判别可压缩流体运动类型的判据。M＜1（气流速度小于音速）的流动，称为亚音速流动；M＞1（气流速度大于音速）的流动，称为超音速流动。亚音速气流与超音速气流的流动特点有很大差别。我们先讨论扰动影响区域不同的问题。

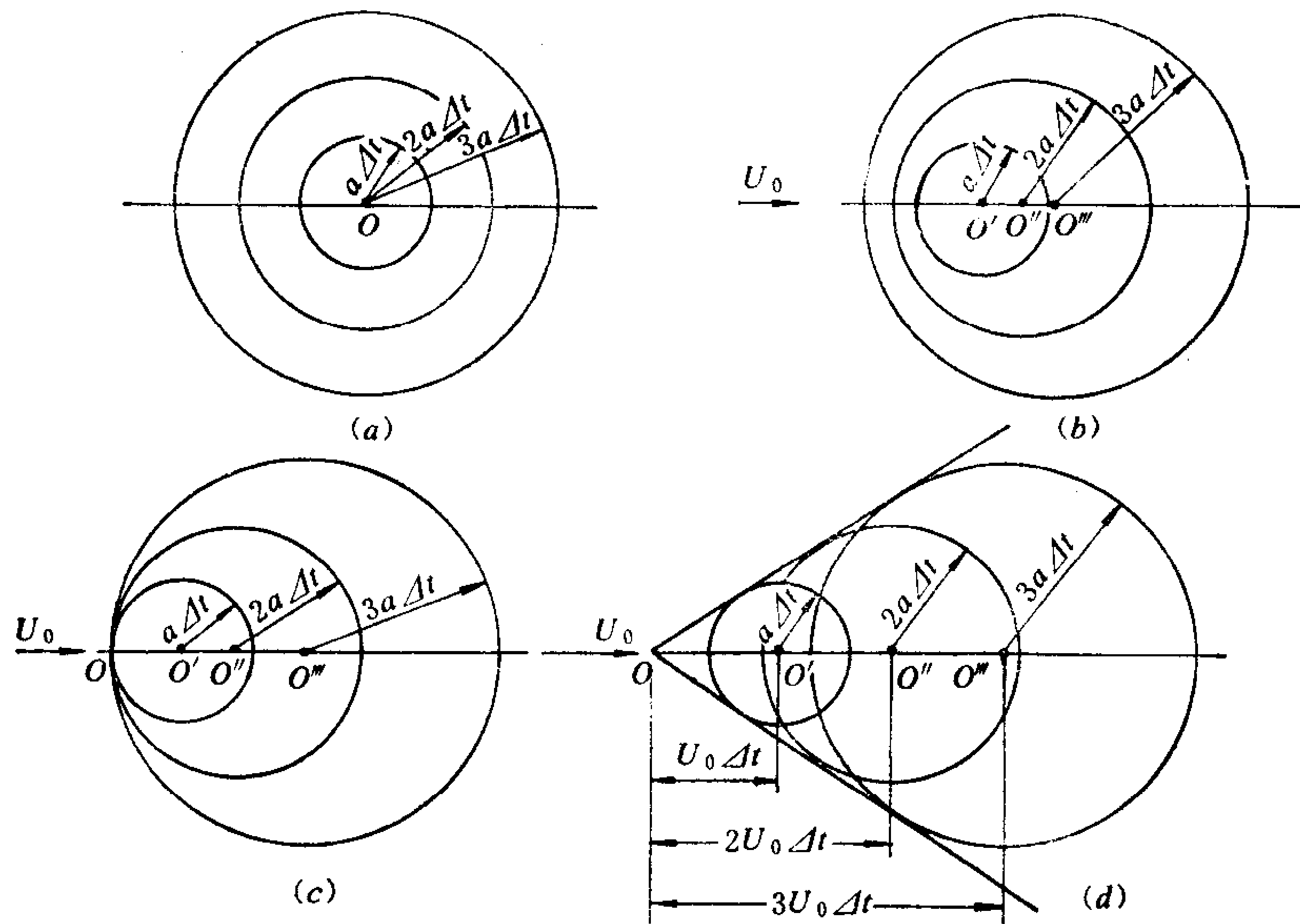


图 12-2 亚音速与超音速气流的不同扰动影响区域

设O点为一扰动源，连续不断地对气流发出小扰动。若气体是静止的，扰动波将以音速a向四周传播。不同时刻波面为不同半径的球面，球心与O点重合（见图12-2a），因而扰动波可以传播到整个空间。如扰动源处于亚音速的等速均匀流场中（流动方向由左向右），由于扰动波一方面以音速向外传播，另一方面又被气流以速度U_0带向下游，不同时刻形成的波面如图中(b)所示。扰动波沿流动方向传播得快，沿反方向传播得慢，但只要时间足够，扰动波仍能传播到整个空间。如扰动源处于等音速的流场中，不同时刻的扰动波面就如图(c)所示，扰动波只能传播到O点下游的半无限空间内，O点前方的半无限空间为不受扰动区域，感觉不到扰动源的存在。如流场速度加大到超音速，扰动波的球面被整个带向下游，不同时刻的扰动波面如图（d）所示。此时扰动波只能传播到球面的包络面内。显然包络面是一个圆锥体，通常称它为马赫锥。锥的半顶角α称为马赫角。它与音速a、气流速度U_0的关系为

$$\sin\alpha = \frac{a}{U_0} = \frac{1}{M_0} \tag{12-7}$$

M_0为来流马赫数。

如周围气体静止不动，而扰动源以速度U_0向前运动，则扰动波在不同速度时的传播情况和图12-2是一样的。这就是为什么当我们听到超音速飞机的声音时，飞机早已越过头顶的原因。

【例 12-1】 比较在标准大气压下20°C时水和空气中的音速。水在该条件下的弹性模量$E = 2.22\times 10^{9}\,\mathrm{N/m^2}$。

【解】 水的音速可按（12-2）式计算。由表2-4表得，20°C时水的密度为$\rho=998.2$ kg/m³。

$$a_w=\sqrt{\frac{E}{\rho}}=\sqrt{\frac{2.22\times10^9}{998.2}}=1491.3\text{m/s}$$

空气的音速按（12-4）式计算

$$a_a=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times287\times(273+20)}=343.1\text{m/s}$$

水的压缩系数 $\beta_{pw}=\frac{1}{E}=\frac{1}{2.22\times10^9}=4.5\times10^{-10}$ m²/N空气的压缩系数如按绝热过程计算[见(2-16)式]，$\beta_{pa}=\frac{1}{kp}=\frac{1}{1.4\times101325}=7.05\times10^{-6}\text{m}^2/\text{N}$，可见空气的压缩性约为水的一万多倍。但水中音速约为空气中音速的四倍多。

【例 12-2】 求温度为45°C时氢气中的音速。氢气的绝热指数为1.4。

【解】 由第二章得知，在标准状态下

$$R=\frac{8314}{m}\quad \text{J/kg·K} \tag{2-12}$$

m为气体的分子量。氢气的分子量为$2\times1.008=2.016$，其气体常数为$R=4124$J/kg·K。故

$$a=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times4124\times(273+45)}=1355\text{m/s}$$

由于氢气的分子量很小，声音在氢气中的传播速度比在空气中大得多，已接近于水中的音速。

§ 12-2 一元恒定气流的基本方程

一、基本方程

现在我们讨论一元恒定气流所遵循的基本规律。可压缩流体的流动，因增添了两个未知变量——密度和温度，除连续性方程和动量方程外，还要补充两个方程，即能量方程和状态方程。对于一元恒定流动，它们的形式如下：

（1）连续性方程

在第四章已得到可压缩流体恒定总流的连续性方程

$$\rho_1u_1A_1=\rho_2u_2A_2\text{或}\rho uA=\text{常数}$$

对上式微分，$d(\rho uA)=0$，即得微分形式的一元恒定气流的连续性方程

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{du}{u}+\frac{dA}{A}=0 \tag{12-8}$$

（2）动量方程

在一元恒定气流的流束上取两个相距为dl的过流断面，并以此两断面之间的流束段为控制体（如图12-3所示）。设①断面的面积及其上的压强、密度、流速和温度分别为A、p、ρ、u、T，则②断面的相应参数分别为$A+dA$、$p+dp$、$\rho+d\rho$、$u+du$、$T+dT$。对此控制体列恒定流动的动量方程（忽略质量力）

$$\rho uA[(u+du)-u]=pA-(p+dp)(A+dA)+\left(p+\frac{dp}{2}\right)dA-\delta F_{\tau}$$

式中$\left(p+\frac{dp}{2}\right)dA$为作用在控制体侧壁上的总压力在流量方向的分量；$\delta F_{\tau}$为侧壁对气流的摩擦阻力。

整理上式，略去高阶小量，即得微分形式的一元恒定气流的动量方程

$$udu+\frac{dp}{\rho}+\frac{\delta F_{\tau}}{\rho A}=0 \qquad (12\text{-}9)$$

如为理想流体，$\delta F_{\tau}=0$。再对上式积分，可得积分形式的一元恒定无摩擦气流的动量方程

$$\frac{u^2}{2}+\int\frac{dp}{\rho}=\text{常数} \qquad (12\text{-}10)$$

知道了ρ和p的关系，就可求得式中的积分。

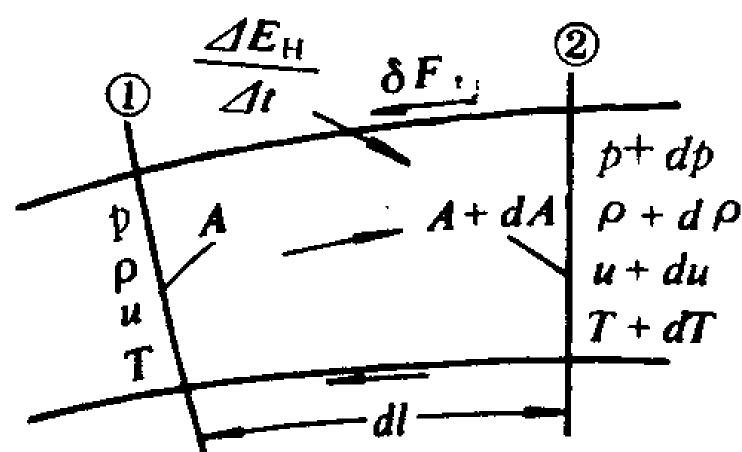


图 12-3 推导动量和能量方程的控制体

（3）能量方程

第四章给出，如控制体内无流体机械作功，恒定流动的能量方程为

$$\frac{\Delta E_H}{\Delta t}=\iint_{CS}\left(\frac{p}{\rho}+e_i+gz+\frac{u^2}{2}\right)\rho\,\vec{u}\cdot d\vec{S} \qquad (4\text{-}35)$$

在一元流动的同一过流断面上，各流动参数为常数。将它应用于图12-3所示的控制体（忽略位能的差异），得

$$\frac{\Delta E_H}{\Delta t}=Q_m\left[\frac{p+dp}{\rho+d\rho}+e_i+de_i+\frac{(u+du)^2}{2}\right]-Q_m\left(\frac{p}{\rho}+e_i+\frac{u^2}{2}\right)$$

其中$\frac{p+dp}{\rho+d\rho}=\frac{p}{\rho}+\frac{dp}{\rho}-\frac{p}{\rho^2}d\rho+\frac{dp}{\rho^2}d\rho+\cdots\cdots=\frac{p}{\rho}+d\left(\frac{p}{\rho}\right)+\frac{dp}{\rho^2}d\rho+\cdots\cdots$

略去高阶小量，整理后得微分形式的能量方程

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right)+de_i+udu=di+udu=\frac{\Delta E_H}{\Delta t} \qquad (12\text{-}11)$$

式中$i=\frac{p}{\rho}+e_i$为热力学中的状态参数，称为焓。

如为绝热流动，$\frac{\Delta E_H}{\Delta t}=0$，上式简化为

$$di+udu=0 \qquad (12\text{-}12)$$

积分上式，即得积分形式的一元恒定绝热气流的能量方程

$$i+\frac{u^2}{2}=\text{常数} \qquad (12\text{-}13)$$

对于完全气体

$$i=C_pT=\frac{k}{k-1}RT=\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\frac{a^2}{k-1} \qquad (12\text{-}14)$$

故一元恒定绝热气流的能量方程还可写成

$$\left.\begin{aligned}&\frac{u^2}{2}+C_pT=\text{常数}\\&\frac{u^2}{2}+\frac{k}{k-1}RT=\text{常数}\\&\frac{u^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\text{常数}\\&\frac{u^2}{2}+\frac{a^2}{k-1}=\text{常数}\end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}15)$$

（4）状态方程

已知完全气体的状态方程

$$\frac{p}{\rho}=RT$$

它的微分形式为

$$\frac{dp}{p}=\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dT}{T} \tag{12-16}$$

以上四个方程组成求解一元恒定气流的基本方程组，u、p、ρ、T四个未知量与方程的个数相同，方程组是封闭的。这四个方程的应用范围不完全一样，连续性方程的应用范围最广，它适用于一切满足连续介质条件的流体；动量方程（12-10）式适用于无摩擦的理想流体；能量方程（12-13）及（12-15）式适用于绝热流动（无论是有摩擦的，还是无摩擦的），状态方程则是完全气体的。

如为等熵（即无摩擦的绝热）流动，p与ρ的关系符合等熵过程方程$\frac{p}{\rho^k}=$常数，将它代入（12-10）式中，则一元恒定等熵气流的动量方程为

$$\frac{u^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\text{常数}$$

它与能量方程（12-15）式完全相同。这就是说，在等熵条件下，动量方程与能量方程是等价的。这样，上述基本方程组在等熵条件下就只有三个是独立的，需要补充等熵过程方程才能使方程组封闭。所以求解一元恒定等熵气流的方程组是

$$\left.\begin{aligned}&\rho uA=\text{常数}\\&\frac{u^2}{2}+\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}=\text{常数}\\&\frac{p}{\rho}=RT\\&\frac{p}{\rho^k}=\text{常数}\end{aligned}\right\} \tag{12-17}$$

在一元恒定等熵气流上任取两个断面，利用这个方程组，就可由已知的u_1、p_1、ρ_1、T_1、A_1、A_2求得四个未知参数u_2、p_2、ρ_2、T_2。

（12-17）式中的后三个方程可以改写成下列形式。对两个断面写能量方程

$$\frac{u_1^2}{2}+\frac{k}{k-1}RT_1=\frac{u_2^2}{2}+\frac{k}{k-1}RT_2$$

式中速度用$u=Ma=M\sqrt{kRT}$代入，整理后

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M_2^2} \tag{12-18}$$

由（12-14）式可知

$$\frac{i_2}{i_1}=\frac{T_2}{T_1}=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \tag{12-19}$$

由状态方程及等熵过程方程可得

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{p_2}{p_1}\frac{\rho_1}{\rho_2}=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{k-1} \text{或} \frac{\rho_2}{\rho_1}=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{k-1}} \tag{12-20}$$

因此，方程组（12-17）中的后三个方程可合并写成

$$\frac{p_2}{p_1}=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^k=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}=\left(\frac{i_2}{i_1}\right)^{\frac{k}{k-1}}=\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{2k}{k-1}}=\left(\frac{1+\frac{k-1}{2}M_1^2}{1+\frac{k-1}{2}M_2^2}\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{12-21}$$

用（12-21）式计算完全气体一元恒定气流有时更方便些。应指出，用此式计算 p 和 ρ时，因推导过程中涉及到等熵过程方程，气流必须是等熵的。但计算T、i和 a 时，只要求气流满足绝热的条件。

二、滞止参数

设想某处流速以等熵过程减小到零，则该处各流动参数所达到的数值称为**滞止参数**。常以角标“0”表示各滞止参数，例如p_0、ρ_0、T_0、i_0、a_0分别表示滞止压强、滞止密度、滞止温度、滞止焓、滞止音速。当气体由较大容器流出时，容器内的各流动参数就是滞止参数。在气体对物体的绕流中，驻点处速度为零，该处的流动参数也是滞止参数。在这类问题中利用滞止参数计算等熵流动更为方便。

一般情况下滞止参数也是空间坐标的函数，故又称它为**当地滞止参数**。对于一元等熵流动，滞止参数在整个流动过程中保持不变。由能量方程（12-13）式得知，$i_0=i+\frac{u^2}{2}=$常数。而$i_0=C_pT_0$，C_p是常数，T_0也应是常数。由$a_0=\sqrt{kRT_0}$可知，$a_0=$常数。再由（12-20）式可得，$\frac{p_0}{T_0^{\frac{1}{k-1}}}=\frac{p}{T^{\frac{1}{k-1}}}=$常数，故$p_0=$常数。又由等熵过程方程$\frac{p_0}{\rho_0^k}=\frac{p}{\rho^k}=$常数，可得$\rho_0=$常数。可见，各滞止参数在等熵流动中确是不变的。各断面的滞止参数i_0、T_0、a_0不变，反映了等熵流动中包括热能在内的气流总能量不变。

对于有摩擦的绝热流动，由于摩阻消耗的一部分机械能转化为热能后，仍保存在气流内，其总能量仍不变，因而各断面的i_0、T_0、a_0也不变，但p_0、ρ_0沿程是变化的，只是其比值$\frac{p_0}{\rho_0}$不变。

在等熵流动中各滞止参数都是各气流中最大的相应参数，即任一断面的 p、ρ、T、i、a都不可能分别大于p_0、ρ_0、T_0、i_0、a_0。

为了便于利用滞止参数进行计算，可在（12-21）式中令②断面为滞止断面，①断面为所取的断面，略去其角标，把它写成下列形式

$$\frac{p_0}{p}=\left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^k=\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\frac{k}{k-1}}=\left(\frac{i_0}{i}\right)^{\frac{k}{k-1}}=\left(\frac{a_0}{a}\right)^{\frac{2k}{k-1}}=\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)^{\frac{k}{k-1}} \tag{12-22}$$

【例 12-3】 空气流过一圆断面收缩喷嘴，①断面直径$d_1=20\text{cm}$，空气流过时的绝对压强和温度分别为$p_1=400\text{kN/m}^2$，$T_1=120℃$；②断面直径$d_2=15\text{cm}$，绝对压强$p_2=300\text{kN/m}^2$。喷嘴很短，气流通过时可认为是等熵过程，求：

1）通过喷嘴的质量流量；

2）两断面的马赫数。

【解】 1）求通过的质量流量Q_m

求质量流量需先算出通过任一断面的流速和密度，为此根据状态方程先求ρ_1

$$\rho_1=\frac{p_1}{RT_1}=\frac{400\times10^3}{287\times(273+120)}=3.546\text{kg/m}^3$$

为了从能量方程中求得u_1，要先算出ρ_2及u_1与u_2之间的关系。由等熵过程方程

$$\rho_2=\rho_1\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}=3.546\times\left(\frac{300}{400}\right)^{\frac{1}{1.4}}=2.887\text{kg/m}^3$$

由连续性方程

$$u_2=\frac{\rho_1A_1}{\rho_2A_2}u_1=\left(\frac{3.546}{2.887}\right)\times\left(\frac{20}{15}\right)^2\times u_1=2.184u_1$$

代入（12-17）式中

$$\frac{u_1^2}{2}+\frac{1.4}{1.4-1}\frac{400\times10^3}{3.546}=\frac{(2.184u_1)^2}{2}+\frac{1.4}{1.4-1}\frac{300\times10^3}{2.887}$$

得
$$u_1=128.5\text{m/s}$$

$$Q_m=\rho_1u_1A_1=3.546\times128.5\times\frac{\pi(0.2)^2}{4}=14.32\text{kg/s}$$

2）求两断面的马赫数

先求两断面的音速

$$a_1=\sqrt{k\frac{p_1}{\rho_1}}=\sqrt{1.4\times\frac{400\times10^3}{3.546}}=397.4\text{m/s}$$

$$a_2=\sqrt{k\frac{p_2}{\rho_2}}=\sqrt{1.4\times\frac{300\times10^3}{2.887}}=381.4\text{m/s}$$

$$u_2=2.184u_1=280.6\text{m/s}$$

$$\text{M}_1=\frac{u_1}{a_1}=\frac{128.5}{397.4}=0.323$$

$$\text{M}_2=\frac{u_2}{a_2}=\frac{2.184\times128.5}{381.4}=0.736$$

【例 12-4】 容器中的压缩空气经一收缩喷嘴射出，喷嘴出口处的绝对压强为100kN/m²，温度为－30℃，流速为250m/s，试求容器中的压强和温度。

【解】 容器中空气的流速为零，其流动参数为滞止参数，可按（12-22）式计算。

喷口处音速

$$a=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times287\times(273-30)}=312.5\text{m/s}$$

其马赫数为
$$\text{M}=\frac{250}{312.5}=0.8$$

$$p_0=p\left(1+\frac{k-1}{2}\text{M}^2\right)^{\frac{k}{k-1}}=100\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times0.8^2\right)^{\frac{1.4}{1.4-1}}=152.4\text{kN/m}^2$$

$$T_0=T\left(1+\frac{k-1}{2}\text{M}^2\right)=(273-30)\times\left(1+\frac{1.4-1}{2}\times0.8^2\right)=274.1\text{K}=1.1℃$$

原书缺页

一元等熵气流各参数沿程的变化趋势　　　　表 12-1

流动参数	亚音速流动M <1		超音速流动M>1	
	渐缩管	渐扩管	渐缩管	渐扩管
速度u	↗	↘	↘	↗
压强p	↘	↗	↗	↘
密度ρ	↘	↗	↗	↘
温度T	↘	↗	↗	↘

1）在任何情况下，压强、密度、温度的变化与速度的变化相反，即如u沿程增大，p、ρ、T必然沿程减小；反之亦然。

2）在亚音速流动中，速度随截面积的变化趋势，与不可压缩流体是一致的，即在渐缩管中速度沿程增大，在渐扩管中速度沿程减小。但在量的关系两者却是不同的。由（12-24）式可知，不可压缩流体的M = 0，因而$\frac{du}{u}=-\frac{dA}{A}$，积分此式即得速度与截面成反比例关系。在可压缩流体中，$0<M<1$，（12-24）式中的$\frac{1}{M^2-1}<0$，此时速度绝对值的相对变化大于截面积的相对变化，M愈接近于1，两者的差别愈大。所以在高速的亚音速气流中，截面积的微小变化会导致速度的明显变化。

3）在超音速气流中，速度随截面积的变化趋势刚好与不可压缩流体相反，即在渐缩管中速度沿程减小，在渐扩管中速度沿程增大。为什么会出现这种现象呢？由（12-26）式可看出，当$M>1$时，$\frac{d\rho}{\rho}$与$\frac{dA}{A}$异号，同时$\frac{dA}{A}$前面的系数$\frac{M^2}{M^2-1}>1$。这表明在渐缩管中密度沿程增大，且密度的相对增大值大于截面积的相对减小值，而可压缩流体的连续性方程却要求沿流程$\rho uA=$常数，这样速度就只能沿程减小，这就是超音速气流在渐缩管中速度减小的物理解释。用类似的分析，也就可以理解在渐扩管中速度为什么会增大了。

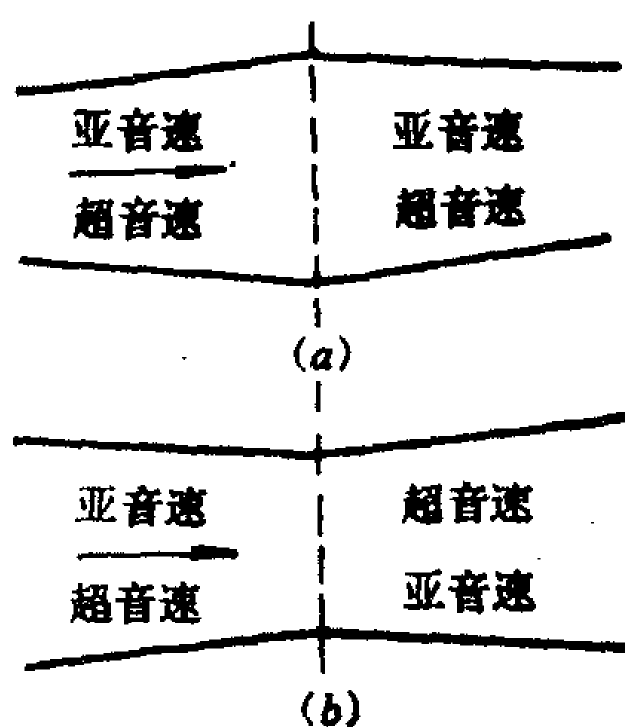


图 12-4　$dA=0$处可能出现音速的情况

4）若M = 1，由（12-24）式可得$dA=0$，这表明音速只能出现在管道的最大或最小截面处。但是，从物理现象上来分析，在最大截面处出现音速是不可能的。如管道截面变化如图12-4a所示，进入管道的气流为亚音速时，在渐扩段内速度沿程减小，在最大截面处不可能达到音速。如进入管道的气流为超音速，在渐扩段内速度沿程增大，在最大截面处也不可能是音速。只有在先收缩后扩大的管道内，在最小截面上才可能出现音速。此时亚音气流在渐缩段内加速，在最小截面处达到音速，进入渐扩段后继续加速为超音速气流。这样的喷管称为**赖伐尔喷管**，是瑞典汽轮机设计师赖伐尔首先创造的，他的成就为设计超音速风洞指明了途径。

二、通过收缩喷管的最大流量

现在我们讨论这样一个问题：可压缩流体自大容器内经收缩喷管流出。设大容器内 $u=0$，p_0、ρ_0已知，喷管的出口截面积A_e及外界环境的压强p_b给定，求通过的质量流量Q_m。

根据（12-22）式，由已知的p_0、p_b可求得出口截面上的马赫数M_e

$$M_e=\sqrt{\frac{2}{k-1}\left[\left(\frac{p_0}{p_b}\right)^{\frac{k-1}{k}}-1\right]} \tag{12-29}$$

如$M_e<1$，则质量流量等于出口截面处的密度ρ_e，流速u_e与A_e的乘积

$$Q_m=\rho_e u_e A_e=\rho_0 a_0 \frac{\rho_e}{\rho_0}\frac{a_e}{a_0}M_e A_e$$

将$\frac{\rho_e}{\rho_0}$及$\frac{a_e}{a_0}$用（12-22）式代入，并令 $a_0=\sqrt{k\frac{p_0}{\rho_0}}$，得

$$Q_m=A_e\sqrt{kp_0\rho_0}\,M_e\left(1+\frac{k-1}{2}M_e^2\right)^{-\frac{k+1}{2(k-1)}} \tag{12-30}$$

由已知的A_e、k、p_0、ρ_0和算出的M_e即可求得通过喷管的质量流量。

如大容器中的p_0、ρ_0值较大，并把喷管外环境的压强p_b看成是变量。当p_b变小时，M_e将增大，M_e是否能不受限制地增大呢？在这样的条件下（12-30）式中的Q_m只是M_e的函数，求Q_m的极值，令

$$\frac{dQ_m}{dM_e}=1-\frac{k+1}{2}M_e^2\left(1+\frac{k-1}{2}M_e^2\right)^{-1}=0$$

可得$M_e=1$。这表明在喷管出口马赫数为1时通过的流量最大。

从物理现象上来分析，得到这个结果是必然的。由容器进入喷管的亚音速气流不可能达到超音速，增速的极限状态就是在出口截面处达到音速。此后，不论p_b下降多少，出口截面处的速度不可能再增大，因而通过的流量也达到了极限。此时喷管出口截面处的压强不再是p_b，而是（12-22）式中相当于$M_e=1$时的压强p_*，这个压强称为**临界压强**。因此，如由（11-29）式算出的$M_e>1$，则通过喷管的流量为最大流量Q_{mmax}，它不再与p_b有关。

令（12-30）式中的$M_e=1$，即得最大流量的计算式

$$Q_{mmax}=A_e\sqrt{kp_0\rho_0}\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} \tag{12-31}$$

【例 12-5】 完全气体自一密闭的大容器经收缩喷管流入标准大气中，如容器内气体的绝对压强为170kN/m²，温度为60℃，该气体的气体常数$R=167$J/kg·K，绝热指数$k=1.4$，喷管出口截面积为12.57cm²。

1）求流经喷管的质量流量；

2）如容器内压强提高到300kN/m²，其它条件不变，求通过的流量。

【解】 1）求$p_0=170$kN/m²时的流量

先按（12-29）式计算出口截面处的马赫数。$p_b=101.34$kN/m²。

$$M_e=\sqrt{\frac{2}{1.4-1}\left[\left(\frac{170}{101.34}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}}-1\right]}=0.892<1$$

出口截面处未达到音速，Q_m应按（12-30）式计算

$$\rho_0=\frac{p_0}{RT_0}=\frac{170\times10^3}{167\times(273+60)}=3.057\text{kg/m}^3$$

$$Q_m=\frac{12.57}{10^4}\sqrt{1.4\times170\times10^3\times3.057}\times0.892\times\left[1+\frac{1.4-1}{2}(0.892)^2\right]^{-\frac{1.4+1}{2(1.4-1)}}$$

$$=0.614\text{kg/s}$$

2）求$p_0=300\text{kN/m}^2$时的流量

$$M_e=\sqrt{\frac{2}{1.4-1}\left[\left(\frac{300}{101.34}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}}-1\right]}=1.348>1$$

通过的流量为最大流量Q_{mmax}，应按（12-31）式计算

$$\rho_0=\frac{p_0}{RT_0}=\frac{300\times10^3}{167\times(273+60)}=5.395\text{kg/m}^3$$

$$Q_{mmax}=\frac{12.57}{10^4}\sqrt{1.4\times300\times10^3\times5.395}\times\left(\frac{2}{1.4+1}\right)^{\frac{1.4+1}{2(1.4-1)}}=1.10\text{kg/s}$$

§12-4 等截面管道中实际气体的恒定流动

上一节我们讨论了等熵流动的基本规律，即认为流体是理想的，没有摩擦阻力，且与外界环境没有热交换。只有在流程很短、流速较大的情况下，可压缩流体才能按等熵流动处理。否则，还应考虑摩阻和热交换的作用，这就是实际气体的流动。本节将对等截面管道中的等温和绝热两种热力学过程的流动进行分析。

一、等温流动

在实际工程中，如管道很长，流速不太大，气体与外界能进行充分的热交换，使气流基本保持与周围环境相同的温度，这类管道可按等温流动处理，例如煤气管道。

（1）基本方程组

在等截面等温流动中，因A=常数，T=常数，基本方程组可进一步简化。

连续性方程：

$$\rho u=\text{常数} \tag{12-32}$$

$$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{du}{u}=0 \tag{12-33}$$

动量方程：

$$udu+\frac{dp}{\rho}+\frac{\delta F_\tau}{\rho A}=0 \tag{12-9}$$

式中管壁对流体的摩阻$\delta F_\tau=\tau_0\pi Ddl$，$\tau_0$为管壁处的摩擦切应力。由前已知，$\tau_0=\lambda\frac{\rho u^2}{8}$，代入上式，等截面管道中的动量方程可写成

$$udu+\frac{dp}{\rho}+\lambda\frac{dl}{D}\frac{u^2}{2}=0 \tag{12-34}$$

状态方程：

$$\frac{p}{\rho}=\text{常数} \tag{12-35}$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{d\rho}{\rho} \tag{12-36}$$

能量方程：在等温流动中因温度T一般为已知常数，故无需能量方程。如要分析 滞止温度沿程的变化，可采用下式

$$\frac{T_0}{T}=\left(1+\frac{k-1}{2}\mathrm{M}^2\right) \qquad (12\text{-}22)$$

（2）流动参数沿程的变化

分析微分形式的基本方程组，可得出等温流动中各参数沿程的变化趋势。以$\frac{\rho}{p}$乘动量方程（12-34）式中的各项

$$\frac{\rho u du}{p}+\frac{dp}{p}+\frac{\lambda}{2D}\frac{\rho u^2}{p}dl=0 \qquad (12\text{-}37)$$

将此式中的第一项和第三项用马赫数M来表示。由于$u=a\mathrm{M}$，而 $a=\sqrt{kRT}$，在等温流动中T是常数，a也是常数，故

$$du=ad\mathrm{M},\quad \frac{du}{u}=\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}=\frac{d\mathrm{M}^2}{2\mathrm{M}^2} \qquad (a)$$

$$\frac{\rho u du}{p}=\frac{u du}{RT}=\frac{a^2\mathrm{M}d\mathrm{M}}{RT}=k\mathrm{M}d\mathrm{M} \qquad (b)$$

$$\frac{\rho u^2}{p}=\frac{a^2\mathrm{M}^2}{RT}=k\mathrm{M}^2 \qquad (c)$$

由（12-33）、（12-36）式及（a）式可得

$$\frac{dp}{p}=\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{du}{u}=-\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}} \qquad (d)$$

将（b）、（c）、（d）各式代入（12-37）式中

$$\frac{dp}{p}=-\frac{\lambda}{2D}k\mathrm{M}^2dl-k\mathrm{M}d\mathrm{M}=-\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}$$

或

$$\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}(1-k\mathrm{M}^2)=\frac{\lambda}{2D}k\mathrm{M}^2dl$$

$$\therefore \frac{dp}{p}=\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{du}{u}=-\frac{d\mathrm{M}}{\mathrm{M}}=-\frac{k\mathrm{M}^2}{1-k\mathrm{M}^2}\frac{\lambda}{2D}dl \qquad (12\text{-}38)$$

沿流动方向dl为正值，由（12-38）式即可根据M小于或大于$\frac{1}{\sqrt{k}}$来判断p、ρ、u、M等参数沿流程的变化趋势。例如，当$\mathrm{M}<\frac{1}{\sqrt{k}}$时，式中最后一项的正负号与$du$、$d\mathrm{M}$一致，而与$dp$、$d\rho$相反。这表明压强和密度沿程减小，流速和马赫数沿程增大；如$\mathrm{M}>\frac{1}{\sqrt{k}}$，则变化趋势相反。马赫数的变化趋势表明，不论进口断面的马赫数是否大于$\frac{1}{\sqrt{k}}$，M沿流程总是向着趋近于$\frac{1}{\sqrt{k}}$变化。

如对能量方程（12-22）式微分，并除以该式

$$\frac{dT_0}{T_0}=\frac{k-1}{2(k-1)\mathrm{M}^2}d\mathrm{M}^2$$

此式与（13-38）式联立，消去$d\mathrm{M}^2$，得

$$\frac{dT_0}{T_0}=\frac{k(k-1)\mathrm{M}^4}{(1-k\mathrm{M}^2)[2+(k-1)\mathrm{M}^2]}\ \frac{\lambda}{D}dl \qquad (12\text{-}39)$$

当$\mathrm{M}<\frac{1}{\sqrt{k}}$时，$dT_0$为正值，滞止温度沿程增加，这是因为压强沿程减小，流体体积膨胀，需要由外界输入热量才能保持等温流动；如$\mathrm{M}>\frac{1}{\sqrt{k}}$则有热量从流体输出。

表12-2列出了等温流动各参数沿流程的变化趋势。

等温管流各参数沿流程的变化趋势　　表 12-2

流动参数	$\mathrm{M}<\frac{1}{\sqrt{k}}$ 亚音速	$\mathrm{M}>\frac{1}{\sqrt{k}}$ 亚音速或超音速
流速u	↗	↘
马赫数M	↗	↘
压强p	↘	↗
密度ρ	↘	↗
滞止温度T_0	↗	↘

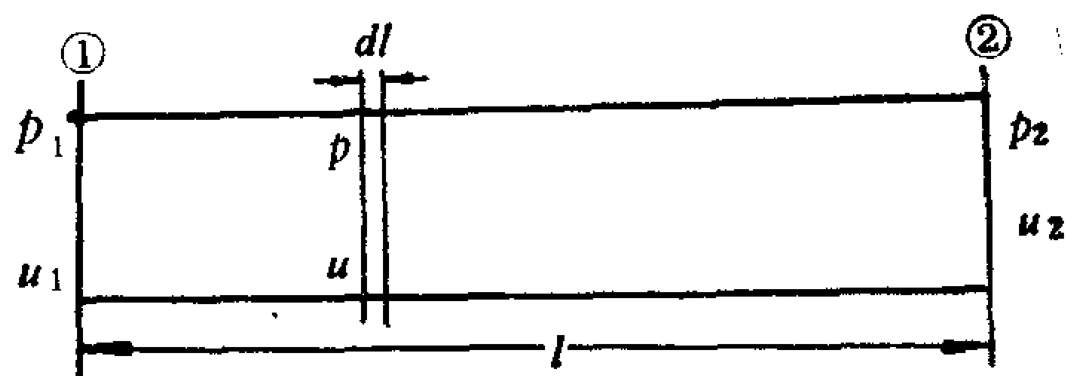


图 12-5　等截面长管中的等温气流

（3）流量或压降计算

以$\frac{2}{u^2}$乘（12-34）式中的各项

$$2\frac{du}{u}+2\frac{dp}{\rho u^2}+\frac{\lambda}{D}dl=0 \qquad (12\text{-}40)$$

设p_1、u_1和p_2、u_2分别为管道进口断面和出口断面的压强和流速（见图12-5），由（12-32）和（12-35）式得

$$\frac{\rho}{\rho_1}=\frac{u_1}{u}=\frac{p}{p_1}$$

故$\frac{1}{\rho u^2}$可写成

$$\frac{1}{\rho u^2}=\frac{1}{\rho_1 u_1^2}\ \frac{u_1}{u}=\frac{1}{\rho_1 u_1^2}\ \frac{p}{p_1}$$

代入（12-40）式中，并从①断面积分至②断面

$$2\int_1^2\frac{du}{u}+\frac{2}{\rho_1 u_1^2 p_1}\int_1^2 p\,dp+\int_0^l\frac{\lambda}{D}dl=0$$

因$\lambda=f\left(\mathrm{Re},\frac{\Delta}{D}\right)$，而$\mathrm{Re}=\frac{\rho u D}{\mu}$，等截面管道中$\rho u$=常数，等温流动中$\mu$=常数，故流体在等截面管道中作等温流动时$\lambda$沿程不变，其值可参照不可压缩流体的情况选取。

$$2\ln\frac{u_2}{u_1}+\frac{1}{\rho_1 u_1^2 p_1}(p_2^2-p_1^2)+\frac{\lambda}{D}l=0$$

或

$$p_1^2-p_2^2=\rho_1 u_1^2 p_1\left(2\ln\frac{u^2}{u_1}+\lambda\frac{l}{D}\right) \qquad (12\text{-}41)$$

如管道较长 $2\ln\frac{u_2}{u_1}\ll\lambda\frac{l}{D}$，$2\ln\frac{u^2}{u_1}$可不计，即得压降的近似计算式

$$p_1^2-p_2^2=2p_1\lambda\frac{l}{D}\frac{\rho_1u_1^2}{2}$$

或

$$p_2=p_1\sqrt{1-\frac{\rho_1u_1^2}{p_1}\frac{\lambda l}{D}} \qquad (12\text{-}42)$$

如 $2\ln\frac{u_2}{u_1}$ 不能忽略，则需用试算才能求得 p_2 或 p_1。

（12-42）式还可写成

$$p_1-p_2=\frac{2}{1+\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}\lambda\frac{l}{D}\frac{\rho_1u_1^2}{2}$$

而 $p_1-p_2=\lambda\frac{l}{D}\frac{\rho_1u_1^2}{2}$ 是不计质量力时不可压缩流体的压降计算式，比较该两式即知，可压缩流体等温流动的压降比不可压缩流体约大 $\frac{2}{1+\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$ 倍。$\frac{p_2}{p_1}$随管长 l 而变，管道愈长，$\frac{p_2}{p_1}$愈小，$\frac{2}{1+\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$愈大。可见，管道愈长，流体的压缩性愈不能忽略。

如将 $u_1=\frac{4Q_m}{\rho_1\pi D^2}$ 代入（12-42）式，即得流量的近似计算式

$$Q_m=\sqrt{\frac{\pi^2D^5}{16\lambda lRT}(p_1^2-p_2^2)} \qquad (12\text{-}43)$$

（4）极限管长

既然无论进口断面的马赫数大于还是小于 $\frac{1}{\sqrt{k}}$，M沿流程总是向着趋近于 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 变化，那么在管道中间就不可能出现由 $M\leqslant\frac{1}{\sqrt{k}}$ 变为M与 $\frac{1}{\sqrt{k}}$ 的临界断面。临界断面只能出现在管道出口断面上。也就是说，沿流动方向流速只能单调地增大 $\left(M<\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ 或减小 $\left(M>\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$。但是管道是可以任意加长的，而流速变化只能以 $M_2=\frac{1}{\sqrt{k}}$ 为限，这就提出了极限管长的问题。当管道出口断面的马赫数 $M_2=\frac{1}{\sqrt{k}}$ 时，相应的管长就是**极限管长** l_{max}。如实际管长大于极限管长，则管内流动将出现**阻塞现象**。此时，管内通过的实际流量不是按（12-43）式算出的流量，实际流量将减少到进口断面的马赫数 M_1 正好使出口断面的 $M_2=\frac{1}{\sqrt{k}}$。

如M_1已知，对（12-38）式的最后一式积分，即得极限管长

$$\frac{\lambda}{D}\int_0^{l_{max}}dl=\frac{1}{k}\int_{M_1}^{\frac{1}{\sqrt{k}}}\frac{1-kM^2}{M^4}dM^2$$

$$\frac{\lambda}{D}l_{max}=\frac{1-kM_1^2}{kM_1^2}+\ln(kM_1^2) \qquad (12\text{-}44)$$

如对(12-38)式的其它各式积分，可得两断面间压强、密度等与马赫数的关系，例如

$$\int_{p_1}^{p_2}\frac{dp}{p}=-\frac{1}{2}\int_{M_1}^{M_2}\frac{dM^2}{M^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{M_1}{M_2}$$

令上式中的 $M_2=\frac{1}{\sqrt{k}}$，p_2就是管长为极限管长时出口断面的压强，它是管道内可能出现的最小压强，以p_{min}表示。因此

$$p_{min}=p_1\sqrt{k}\,M_1 \qquad (12\text{-}45)$$

【例 12-6】 氦气在直径$D=200$mm、长$l=600$m的管道中作等温流动。已知进口断面的速度$u_1=90$m/s，压强$p_1=1380$kN/m²，温度$t=25$℃，氦的气体常数$R=2077$J/kg·K，绝热指数$k=1.67$，沿程阻力系数$\lambda=0.015$

1）求出口断面的压强和流速；

2）如按不可压缩流体计算，出口断面压强为多少？

3）如管长$l=1200$m，出口断面压强为多少？

4）进口断面的流动参数不变，求极限管长；

5）如管长为极限管长，求出口断面的压强、速度和马赫数。

【解】 1）求$l=600$m的出口断面压强和流速

$$\rho_1=\frac{p_1}{RT_1}=\frac{1380\times10^3}{2077\times(273+25)}=2.23\text{kg/m}^3$$

由(12-42)式

$$p_2=1380\times\sqrt{1-\frac{2.23\times90^2\times0.015\times600}{1380\times10^3\times0.2}}=884.7\text{kN/m}^2$$

由连续性方程和状态方程得

$$u_2=u_1\frac{\rho_1}{\rho_2}=u_1\frac{p_1}{p_2}=90\times\frac{1380}{884.7}=140.4\text{m/s}$$

2）如按不可压缩流体计算，求p_2

$$p_1-p_2=\lambda\frac{l}{D}\frac{\rho u^2}{2}=\frac{0.015\times600\times2.23\times90^2}{0.2\times2\times10^3}=406.4\text{kN/m}^2$$

$$p_2=1380-406.4=973.6\text{kN/m}^2$$

可见，考虑流体的压缩性压强沿程下降比不可压缩流体快。

3）如$l=1200$m，求出口断面压强

$$p_2=1380\times\sqrt{1-\frac{2.23\times90^2\times0.015\times1200}{1380\times10^3\times0.2}}=1380\sqrt{-0.178}\ \text{kN/m}^2$$

p_2为无理数，这表明在本题所给的条件下，要在1200m管长范围内保持等温流动是不可能的。

4）求极限管长l_{max}

先求M_1，　　$M_1=\frac{u_1}{\sqrt{kRT_1}}=\frac{90}{\sqrt{1.67\times2077\times(273+25)}}=0.0885$

$$\frac{0.015}{0.2}l_{\max}=\frac{1-1.67\times0.0885^2}{1.67\times0.0885^2}+\ln(1.67\times0.885^2)=71.11$$

$$l_{\max}=71.11\frac{0.2}{0.015}=948\text{m}$$

5）如$l=l_{\max}$，求p_2、u_2、M_2

如管长为极限管长，出口断面压强$p_2=p_{\min}$，可按（13-45）式计算

$$p_{\min}=p_1\sqrt{k}\,M_1=1380\times\sqrt{1.67}\times0.0885=157.8\text{kN/m}^2$$

$$u_2=u_1\frac{p_1}{p_2}=\frac{90\times1380}{157.8}=787.1\text{m/s}$$

$$\rho_2=\rho_1\frac{p_2}{p_1}=\frac{2.23\times157.8}{1380}=0.255\text{kg/m}^3$$

$$a_2=\sqrt{k\frac{p_2}{\rho_2}}=\sqrt{\frac{1.67\times157.8}{0.255}}=1016.6\text{m}$$

$$M_2=\frac{u_2}{a_2}=\frac{787.1}{1016.6}=0.774$$

核对：出口断面的马赫数 确为$M_2=\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{1.67}}=0.774$

二、绝热流动

在实际工程中，如管道被包在良好的隔热材料内，与外界不发生热交换；或流速较大，管道又不太长，流体来不及与外界进行充分的热交换，这类管道皆可近似地按绝热流动计算。

（1）基本方程组

求解等截面管道绝热流动的基本方程组是

连续性方程：　$\rho u=$常数　$\frac{d\rho}{\rho}+\frac{du}{u}=0$

动量方程：　$udu+\frac{dp}{\rho}+\lambda\frac{dl}{D}\frac{u_2}{2}=0$

能量方程：　$i+\frac{u^2}{2}=$常数　$di+udu=0$

状态方程：　$\frac{p}{\rho}=RT$　$\frac{dp}{p}=\frac{d\rho}{\rho}+\frac{dT}{T}$

（2）流动参数沿程的变化

由上述微分形式的基本方程组可得流动参数沿程的变化趋势

将（12-14）式中的$i=\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho}$微分，得

$$di=\frac{k}{k-1}\left(\frac{dp}{\rho}-\frac{pd\rho}{\rho^2}\right)$$

也可写成　$$\frac{dp}{\rho}=\frac{p}{\rho}\frac{d\rho}{\rho}+\frac{k-1}{k}di$$

将微分形式的连续性方程和能量方程代入

$$\frac{dp}{\rho}=\left(\frac{u^2}{k}-\frac{p}{\rho}\right)\frac{du}{u}-udu$$

将它代入动量方程中

$$\left(\frac{u^2}{k}-\frac{p}{\rho}\right)\frac{du}{u}+\lambda\frac{dl}{D}\frac{u^2}{2}=0$$

以$u^2=a^2M^2=k\frac{p}{\rho}M^2$代入上式

$$\frac{du}{u}=\frac{kM^2}{1-M^2}\frac{\lambda}{2D}dl \qquad (12\text{-}46)$$

由连续性方程得

$$\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{kM^2}{1-M^2}\frac{\lambda}{2D}dl \qquad (12\text{-}47)$$

以$u^2=M^2kRT$除能量方程$C_pdT+udu=0$中的各项

$$\frac{C_p}{R}\frac{1}{kM^2}\frac{dT}{T}+\frac{du}{u}=0$$

而 $\frac{C_p}{R}=\frac{kC_v}{C_p-C_v}=\frac{k}{k-1}$（$C_v$为定容比热），故

$$\frac{dT}{T}=-(k-1)M^2\frac{du}{u} \qquad (12\text{-}48)$$

将连续性方程和（12-48）式代入微分形式的状态方程中

$$\frac{dp}{p}=-\frac{du}{u}-(k-1)M^2\frac{du}{u}=-[1+(k-1)M^2]\frac{du}{u} \qquad (12\text{-}49)$$

以上四式可合并写成

$$\frac{1}{1+(k-1)M^2}\frac{dp}{p}=\frac{1}{(k-1)M^2}\frac{dT}{T}=\frac{d\rho}{\rho}=-\frac{du}{u}=-\frac{kM^2}{1-M^2}\frac{\lambda}{2D}dl \qquad (12\text{-}50)$$

沿流动方向dl为正值，因此当$M<1$时，du为正值，dp、dT、$d\rho$皆为负值；当$M>1$时，刚好相反。这就是说，$M<1$时，u沿程增大，p、T、ρ皆沿程减小；当$M>1$时，u沿程减小，p、T、ρ皆沿程增大。这个变化趋势与等截面管道中的等温流动是一致的，只是流动参数变化趋势突变的临界断面是$M=1$，而不是等温流动时的$M=\frac{1}{\sqrt{k}}$。

（3）进、出口断面的马赫数与管长l的关系 极限管长

将（12-46）式中的u用M来表示，并沿管长积分，即可求得M_1、M_2与l的关系。为此微分$u_2=kRTM^2$，并以原式除之，得

$$2\frac{du}{u}=2\frac{dM}{M}+\frac{dT}{T}$$

将（12-48）式代入，整理后

$$\frac{du}{u}=\frac{1}{1+\frac{k-1}{2}M^2}\frac{dM}{M}$$

将它代入（12-46）式中，经整理

$$\frac{\lambda}{D}dl=\frac{2(1-M^2)}{kM^3\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}dM=\frac{2dM}{kM^3}-\frac{k+1}{k}\frac{dM}{M\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)}$$

积分上式。在绝热流动中λ实际是一个变量，但它的变化范围不大，可视为常数，或取平均值计算。在亚音速气流中，λ 值可按不可压缩流体选取；在超音速气流中，有些文献指出λ值可能要小些

$$\frac{\lambda}{D}l=\frac{1}{k}\left(\frac{1}{M_1^2}-\frac{1}{M_2^2}\right)+\frac{k+1}{2k}\ \ln\left[\left(\frac{M_1}{M^2}\right)^2\frac{(k-1)M_2^2+2}{(k-1)M_1^2+2}\right] \tag{12-51}$$

如$k=1.4$，上式简化为

$$\frac{\lambda}{D}l=\frac{5}{7}\left(\frac{1}{M_1^2}-\frac{1}{M_2^2}\right)+\frac{6}{7}\ \ln\left[\left(\frac{M_1}{M_2}\right)^2\frac{M_2^2+5}{M_1^2+5}\right] \tag{12-52}$$

与等温流动一样，流速在等截面管道中只能单调地增大（$M<1$）或减小（$M>1$），其极限值是$M_2=1$。因此绝热流动也有极限管长。当出口断面的马赫数$M_2=1$时，相应的管长即为**极限管长**。在（12-51）和（12-52）式中，令$M_2=1$，即得极限管长的计算式。对于$k=1.4$的气体

$$\frac{\lambda}{D}l_{max}=\frac{5}{7}\left(\frac{1}{M_1^2}-1\right)+\frac{6}{7}\ \ln\frac{6M_1^2}{M_1^2+5} \tag{12-53}$$

【例 12-7】 空气流经一直径$D=100$mm的绝热管道，已知进口断面的压强$p_1=9.81\times10^4$N/m²，温度$T_1=289$K，马赫数$M_1=0.3$，出口断面的压强$p_2=\frac{1}{3}p_1$，求：

1）流过管道的质量流量；

2）管长；

3）所给进口断面流动参数条件下的极限管长。

【解】 1）求质量流量

$$Q_m=\rho_1u_1A=\rho_1u_1\frac{\pi D^2}{4}$$

$$\rho_1=\frac{p_1}{RT_1}=\frac{9.81\times10^4}{287\times289}=1.183\text{kg/m}^3$$

$$u_1=M_1\sqrt{kRT_1}=0.3\sqrt{1.4\times289\times289}=102.2\text{m/s}$$

$$Q_m=1.183\times102.2\times\frac{\pi0.1^2}{4}=0.95\text{kg/s}$$

2）求管长l

由（12-52）式计算l需先求得M_2，为此首先要求出ρ_2和u_2

$$\rho_2=\frac{\rho_1u_1}{u_2}=\frac{1.183\times102.2}{u_2}=\frac{120.9}{u_2}$$

代入能量方程

$$\frac{102.2^2}{2}+\frac{1.4}{1.4-1}\frac{9.81\times10^4}{1.183}=\frac{u_2^2}{2}+\frac{1.4}{1.4-1}\frac{9.81\times10^4u_2}{3\times120.9}$$

整理后

$$u_2^2+1893u_2-590924=0$$

$$u_2=272.8\text{m/s}$$

$$\rho_2=\frac{120.9}{272.8}=0.443\mathrm{kg/m^3}$$

$$a_2=\sqrt{k\frac{p_2}{\rho_2}}=\sqrt{\frac{1.4\times9.81\times10^4}{3\times0.443}}=321.5\mathrm{m/s}$$

$$\mathrm{M}_2=\frac{u_2}{a_2}=\frac{272.8}{321.5}=0.848$$

再来计算沿程阻力系数λ，钢管的当量糙粒高度$\Delta=0.046\mathrm{mm}$，$\therefore\frac{\Delta}{D}=0.00046$。用平均速度$\overline{u}$和平均温度$\overline{t}$计算Re。

$$\overline{u}=\frac{u_1+u_2}{2}=\frac{102.2+272.8}{2}=187.4\mathrm{m/s}$$

$$T_2=\frac{p_2}{\rho_2R}=\frac{9.81\times10^4}{3\times0.443\times287}=257\mathrm{K}$$

$$\overline{T}=\frac{T_1+T_2}{2}=\frac{289+257}{2}=273\mathrm{K},\ t=0^\circ\mathrm{C}$$

由表（2-8）查得，0℃空气的运动粘性系数$\nu=13.7\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$

$$\mathrm{Re}=\frac{\overline{u}D}{\nu}=\frac{187.4\times0.1}{13.7\times10^{-6}}=1.37\times10^6$$

由莫迪图查得$\lambda=0.017$

将已得到的数值代入（12-52）式中

$$\frac{0.017}{0.1}l=\frac{5}{7}\left(\frac{1}{0.3^2}-\frac{1}{0.848^2}\right)+\frac{6}{7}\ln\left[\left(\frac{0.3}{0.848}\right)^2\left(\frac{0.848^2+5}{0.3^2+5}\right)\right]$$

$$l=30.9\mathrm{m}$$

（3）求极限管长l_{max}

将M_1代入（12-53）式中

$$\frac{0.017}{0.1}l_{max}=\frac{5}{7}\left(\frac{1}{0.3^2}-1\right)+\frac{6}{7}\ln\frac{6\times0.3^2}{0.3^2+5}$$

$$l_{max}=31.2\mathrm{m}$$

可见，$l<l_{max}$，流动不会出现阻塞。

习　题

12-1　在海拔高度不超过11km的范围内，标准大气的温度随高程H的变化为

$$T=T_0-aH$$

式中$T_0=288\mathrm{K}$，$a=0.0065\mathrm{K/m}$。现有一飞机在10000m高空飞行，速度为240m/s，求它的飞行马赫数。如飞机在1000m高度以同样速度飞行，马赫数又为多少？

12-2　上题中如飞行高度仍为10000m，而飞行马赫数为1.6，求飞机相对于地面的飞行速度及所形成的马赫角。

12-3　步枪弹头在15°C的标准大气中以900m/s的速度射出，求它的马赫角。

12-4　用声纳探测仪探测水下物体，如水温为10°C（其弹性模量为$2.11\times10^9\mathrm{N/m^2}$，密度为999.1 $\mathrm{kg/m^3}$，今测得信号往返时间为6s，求该物体到声源的距离。

12-5　空气作等熵流动，已知其滞止压强为$p_0=5\times98100\mathrm{N/m^2}$，滞止温度为$t_0=20°\mathrm{C}$，某截面处马赫数$\mathrm{M}=0.8$，求滞止音速$a_0$、当地音速$a$、流速$u$及压强$p$。

12-6　氦气作绝热流动，已知截面①的参数为$t_1=60°\mathrm{C}$、$u_1=10\mathrm{m/s}$，截面②处$u_2=180\mathrm{m/s}$，求t_2

和p_2/p_1。氦的气体常数为$R=2077\text{J/kg}\cdot\text{K}$，绝热指数$k=1.67$。

12-7　空气流经一收缩喷嘴作等熵流动，进口截面流动参数为$p_1=140\text{kN/m}^2$、$u_1=80\text{m/s}$、$T_1=293\text{K}$，出口截面$p_2=100\text{kN/m}^2$，求出口流速u_2。

12-8　氮气在等温变径管道中流动，$t=5°\text{C}$，已知$d_1=50\text{mm}$，$p_1=378\text{kN/m}^2$，$d_2=25\text{mm}$，$p_2=253\text{kN/m}^2$，不计阻力，求流速u_1和u_2。氮的气体常数为$R=296\text{J/kg}\cdot\text{K}$，绝热指数$k=1.4$。

12-9　空气流过一收缩喷管作等熵流动，已知进口截面流动参数为$u_1=128\text{m/s}$、$p_1=400\text{kN/m}^2$，$T_1=393\text{K}$，出口截面温度$T_2=362\text{K}$，喷管进、出口直径分别为$d_1=200\text{mm}$、$d_2=150\text{mm}$，求通过的质量流量Q_m及出口压强p_2。

12-10　氨气由大容器中经喷管流出，外界环境压强为100kN/m^2，容器内气体的温度为200°C，压强为180kN/m^2，如通过的重量流量为20N/s，求喷管直径。设流动是等熵的。氨的气体常数为$R=482\text{J/kg}\cdot\text{K}$，绝热指数为$k=1.32$。

12-11　用毕托管测得空气的静压为$3656\times9.81\text{N/m}^2$（表压），全压与静压差为49.4cmHg，大气压为75.5cmHg，气流滞止温度为27°C，计算考虑空气的压缩性和不考虑其压缩性这两种情况的气流速度。

12-12　试分析变截面喷管中等熵气流的音速、马赫数及焓的沿程变化趋势。

12-13　封闭容器中氮气的压强为$p_0=392\text{kN/m}^2$，温度为$t_0=25°\text{C}$，通过出口直径$d=50\text{mm}$的收缩喷管作等熵流动，出口在大气中，求通过的质量流量和喷管出口流速。

12-14　直径$d=200\text{mm}$、长$l=3000\text{m}$的煤气管道，已知进口断面的流动参数为$p_1=980\text{kPa}$、$T_1=300\text{K}$，出口断面的压强为$p_2=490\text{kPa}$，如煤气的气体常数为$R=490\text{J/kg}\cdot\text{K}$，绝热指数为$k=1.3$，管道的沿程阻力系数为$\lambda=0.012$，按等温流动考虑，求通过的重量流量及出口断面的马赫数。

12-15　空气流过一直径$d=300\text{mm}$的管道排入大气中（大气压为98.1kN/m^2），管长$l=100\text{m}$，空气温度$t=32°\text{C}$，通过的重量流量为130N/s，沿程阻力系数$\lambda=0.0105$，如保持等温流动，进口压强为多少？

【提示】 本题管长较短，（12-41）式中的$2\ln\frac{u_2}{u_1}$项不宜忽略，可先按（12-42）式求出近似的p_1，再用（12-41）式逐步逼近，即可求得解答。

12-16　空气在$d=300\text{mm}$的管道中作绝热流动，已知通过的重量流量为400N/s，入口断面的流动参数为$p_1=980\text{kN/m}^2$、$T_1=333\text{K}$，出口断面的密度为$\rho_2=0.8\rho_1$，如沿程阻力系数$\lambda=0.02$，求管长l。

12-17　空气在$d=300\text{mm}$的管道中作绝热流动，已知入口断面的流动参数$p_1=980\text{kN/m}^2$、$T_1=333\text{K}$，出口断面的压强和密度分别为$p_2=781.5\text{kN/m}^2$、$\rho_2=0.8\rho_1$，如沿程阻力系数$\lambda=0.02$，求通过的质量流量及管长。

12-18　空气在$d=150\text{mm}$的管道中作绝热流动，流量为2.7kg/s，沿程阻力系数$\lambda=0.018$，起始断面的压强为180kPa，温度为50°C，求不发生气流阻塞的最大管长及相应的出口断面温度和压强。

第十三章　离心式泵与风机的叶轮理论

§13-1　概　　述

泵与风机是用途广泛的流体机械。它的作用是将原动机的机械能转换为流体的能量，从而克服阻力，达到输送流体的目的。其中输送水或其它液体的机械称为泵，输送空气或其它气体的机械称为风机。泵与风机在供热、采暖、通风、空调、燃气、给排水、环境等工程中得到广泛的应用。

按工作原理的不同，泵与风机通常分为三大类。

一、叶轮式

通过高速旋转的叶轮对流体做功，使流体获得能量。根据流体流过叶轮时的方向不同，又可分为三种。

（1）离心式泵与风机

离心泵的示意图见图13-1。离心泵启动前使泵体和吸水管内充满水，启动后叶轮高速旋转，叶轮内的水随之旋转获得能量。同时由于惯性沿离心方向流出叶轮进入螺旋形机壳，将一部分动能转化为压能，通过压水管排出。这时叶轮入口处形成真空，在大气压作用下，吸水池的水经底阀、吸水管被压入水泵，从而压水吸水过程得以连续进行。离心式风机的工作原理与离心泵相同。

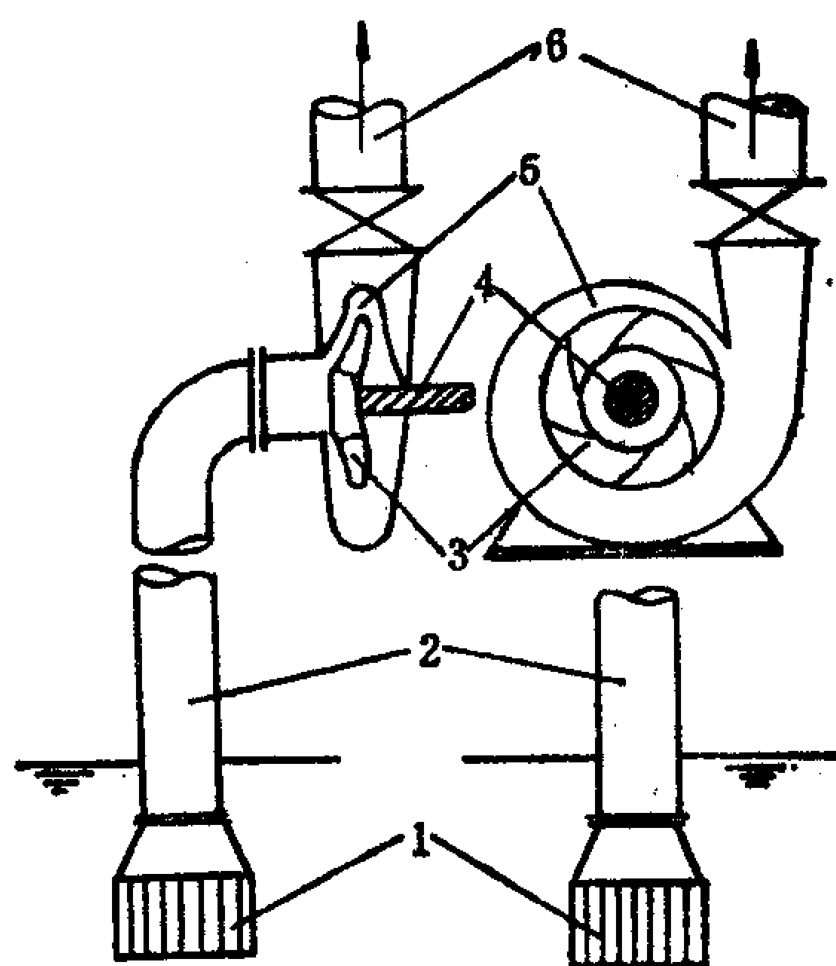


图 13-1　离心泵示意图

1—底阀；2—吸水管；3—叶轮；4—轴；5—机壳；6—压水管

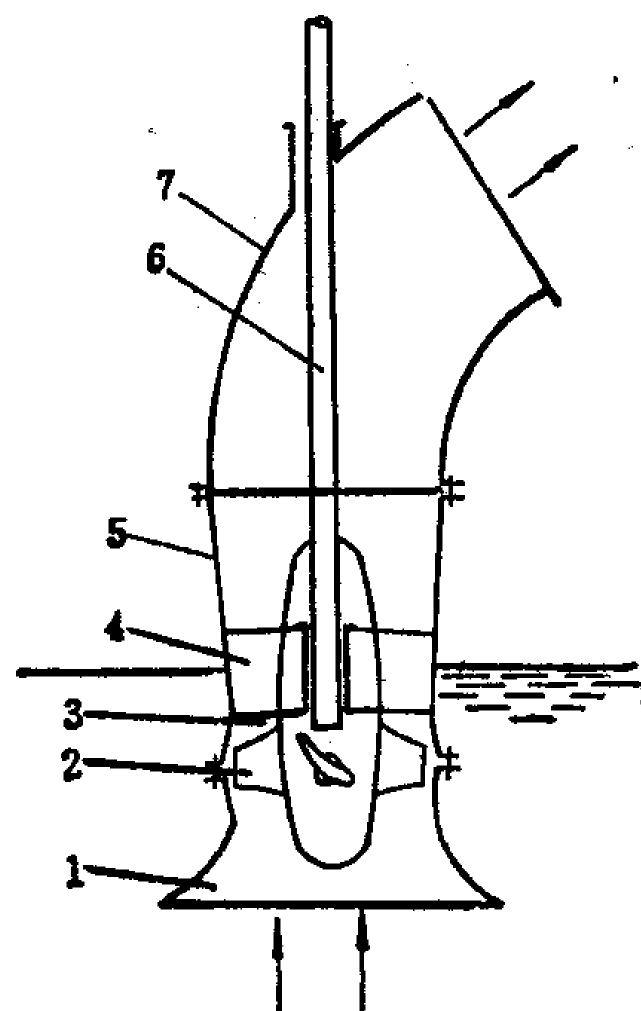


图 13-2　立式轴流泵示意图

1—吸入管；2—叶片；3—轮毂；4—导叶；5—泵壳；6—轴；7—出水弯管

（2）轴流式泵与风机

图13-2是立式轴流泵的示意图。叶轮由叶片和轮毂组成，在转轴带动下在圆筒形泵壳内旋转。流体由吸入管沿轴向流入叶轮，随之旋转获得能量，然后沿轴向经导叶流出。导叶固定在泵壳上不动，它的作用是消除水流的旋转运动，将动能转变为压能。

（3）混流式泵与风机

流体沿轴向流入叶轮，斜向流出，介于离心式与轴流式之间。

叶轮式泵与风机的优点是构造简单，效率高，且易于调节，因此得到普遍应用。其中尤以离心式泵与风机应用最多，本课程以离心式泵与风机为主要内容。

二、容积式

通过工作室容积的改变对流体做功，使流体获得能量。根据工作室容积改变的方式不同，又可分为两种。

（1）往复式　以活塞泵为例。图13-3是活塞泵的示意图。曲柄连杆机构带动活塞在泵缸内往复运动。当活塞由左向右运动时，工作室容积扩大，压强降低，液体顶开吸水阀进入泵缸，是吸水过程。当活塞由右向左运动时，工作室容积减小，液体受压，吸水阀关闭，顶开压水阀而排出，是排水过程。活塞不断往复运动，吸水与压水过程就不断交替进行。

（2）旋转式　以齿轮泵为例，如图13-4所示。齿轮泵有一对互相啮合的齿轮。主动轮由原动机带动旋转，并带动从动轮反向旋转。液体由取液口进入，在齿的挤压下分左右沿泵壳流向排液口。

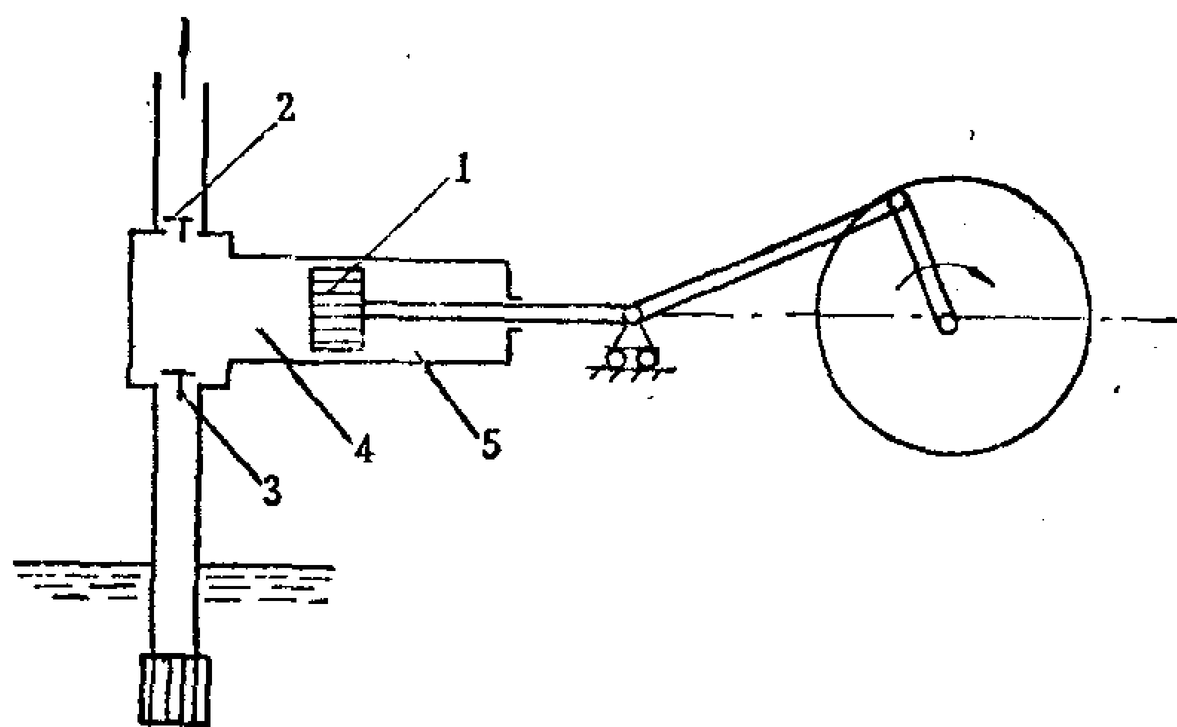


图 13-3　活塞泵示意图

1—活塞；2—压水阀；3—吸水阀；4—工作室；5—泵缸

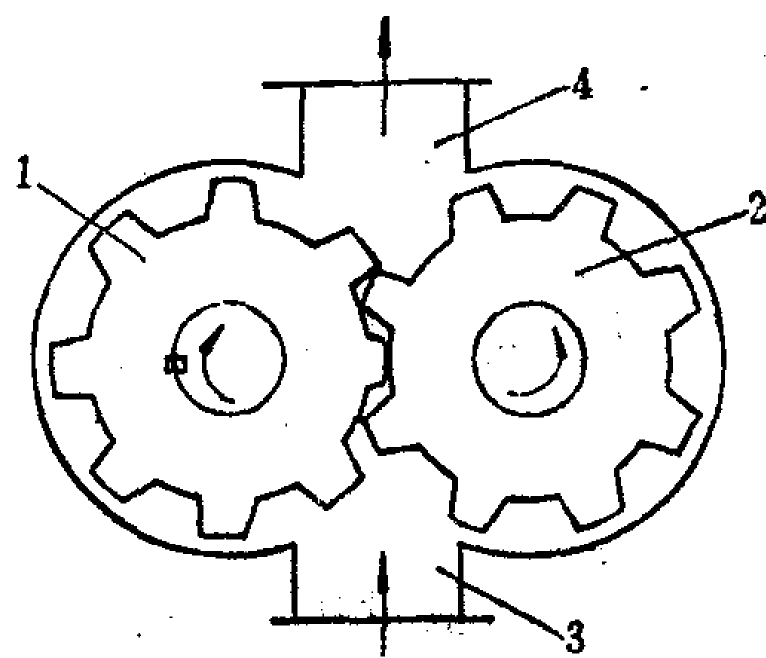


图 13-4　齿轮泵示意图

1—主动轮；2—从动轮；3—吸液口；4—排液口

容积式泵与风机由于构造不同，各有特点，可以应用于各种不同情况。如在锅炉房中，利用锅炉产生的蒸汽为动力的蒸汽活塞泵，可以做为停电时锅炉的补给水泵。齿轮泵常用来做输送润滑油的油泵。

三、其它类型的泵与风机

如射流泵，示意图见图13-5。

射流泵的工作原理是，高压工作流体A从喷嘴高速射出，使吸入室形成真空，流体B在大气压作用下进入吸入室。二者在混合室中相混，经过扩散管使部分动能转化为压能，然后输送出去，输出的是混合流体C。射流泵的工作流体可以是高压水，也可以是高压气体，抽吸的流体可以是水、药液、空气等。射流泵的用途很广，可以做水处理工艺中的投药装置，充气、曝气装置，可以做水泵启动前排气设备，还可以与离心泵联合工作以增加离心泵的吸水高度，等等。

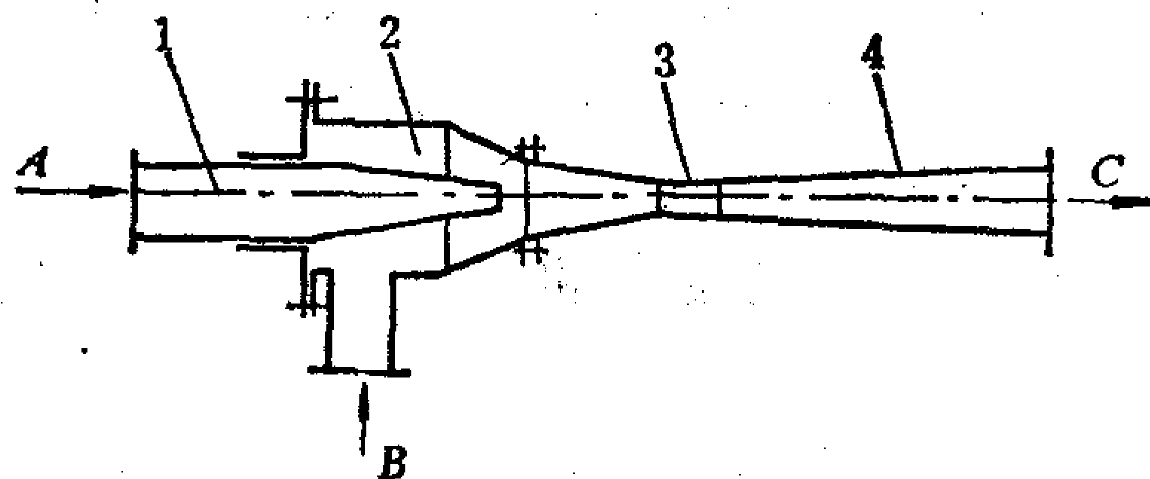


图 13-5　射流泵示意图

1—喷嘴；2—吸入室；3—混合管；4—扩散管

由于液体是不可压缩流体，而风机对气体的增压不高，通常不超过1000mmH_2O，故以下内容都按不可压缩流体进行论述。

§13-2 离心式泵与风机的工作原理与性能参数

离心式泵与风机启动前叶轮内充满流体（水泵应预先充水），启动后叶轮内流体在叶轮带动下旋转，从而能量增加，同时在惯性作用下产生离心方向的位移，沿叶片之间的通道流向机壳，机壳收集从叶轮中流出的流体，导向出口排出，见图13-6。当叶轮中流体离心方向运动时，叶轮入口处压强降低形成真空，在大气压作用下，流体由吸入口进入叶轮，使泵或风机连续工作。

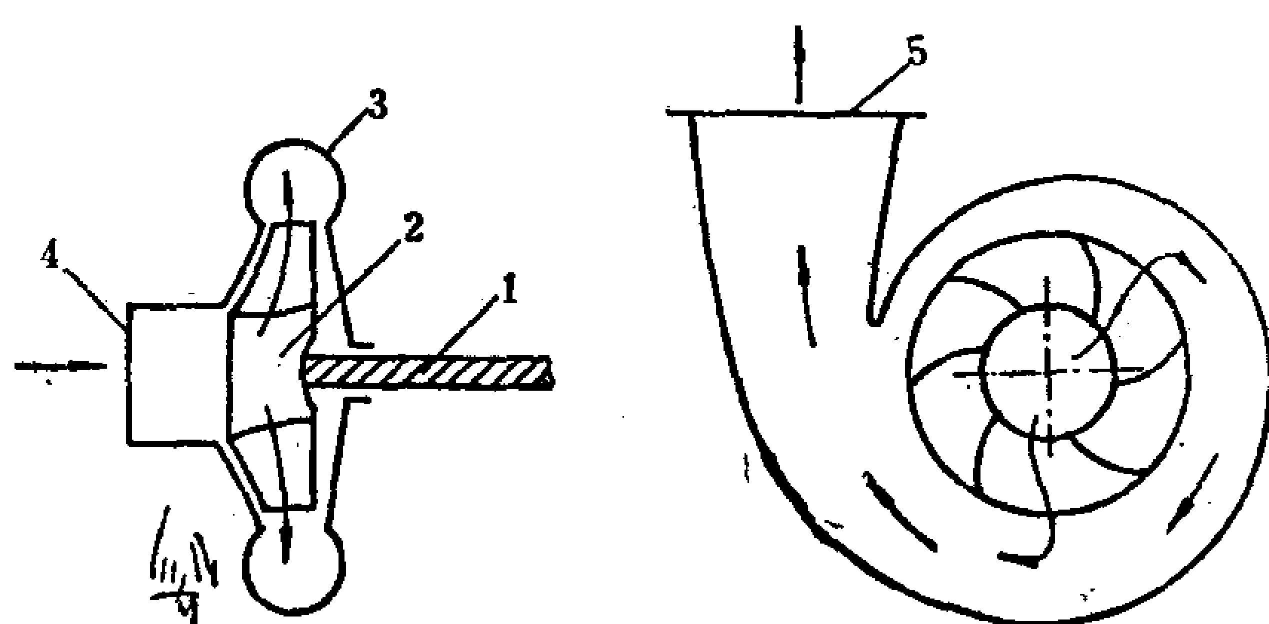


图 13-6 离心泵工作示意图

1—轴；2—叶轮；3—机壳；4—吸入口；5—压出口

泵与风机的工作特性，通常可以用以下性能参数表示。

1）流量Q 单位时间内输送流体的数量，常用体积流量表示，单位为m^3/s或m^3/h等。

2）能头H 单位重量流体所获得的能量，即单位重量流体从泵或风机的进口至出口能量的增值。

进口断面单位重量流体具有的能量为

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}$$

出口断面单位重量流体具有的能量为

$$H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g}$$

则泵或风机的能头为

$$H = (z_2 - z_1) + \frac{p_2 - p_1}{\gamma} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \qquad (13\text{-}1)$$

对于水泵，能头常称为扬程，常用单位为mH_2O。对于风机，习惯上常用风压p表示气体能量的增值，$p=\gamma H$。它实际上是单位体积气体通过风机获得的能量。p的单位与压强相同，可用Pa或mmH_2O表示。

3）功率

原动机传到泵或风机转轴上的功率是输入功率，称为泵与风机的轴功率N，单位为W或kW。

泵或风机的输出功率，即流体单位时间内获得的能量，称为有效功率N_e。

$$N_e = \gamma QH = pQ \qquad (13\text{-}2)$$

式中γ为流体的重度。

4）效率η 有效功率与轴功率之比，表示输入功率被流体利用的程度。

$$\eta = \frac{N_e}{N} = \frac{\gamma QH}{N} = \frac{pQ}{N} \qquad (13\text{-}3)$$

5）转速n　泵或风机的叶轮每分钟的转数，单位为rpm（r/min）。

泵或风机的其它性能参数，将在有关内容中论述。

§13-3　流体在叶轮中的运动

流体在叶轮中的运动很复杂。它一方面随叶轮旋转作圆周运动，即牵连运动，另一方面沿叶片方向作相对于叶片的相对运动，二者合成为绝对运动，如图13-7所示。圆周速度$\vec{u}$沿圆周的切线方向，相对速度$\vec{w}$沿叶片弯曲方向，绝对速度$\vec{c}$是$\vec{u}$与$\vec{w}$的矢量和，即

$$\vec{c}=\vec{u}+\vec{w}$$

流体在流道中任意点的三种速度，可以绘成速度图，如图13-8。其中圆周速度$\vec{u}$沿圆周切线方向，用水平线段表示。相对速度$\vec{w}$与圆周速度$\vec{u}$的反向夹角β，叫做安装角，它表示叶片弯曲的方向。绝对速度$\vec{c}$与圆周速度$\vec{u}$的夹角α，叫做工作角，它表示流体运动的方向。

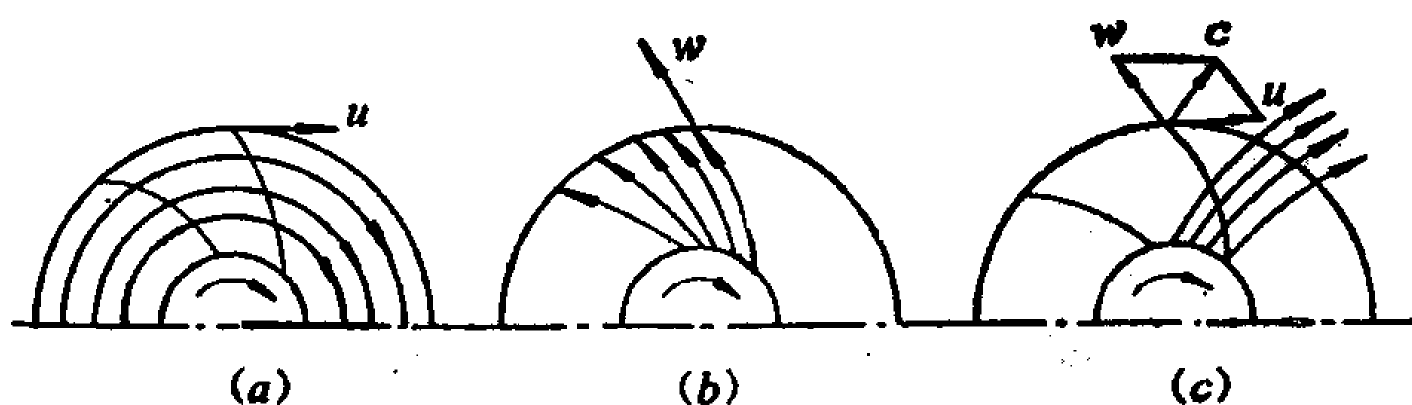


图 13-7　流体在叶轮中的运动

(a)圆周运动；(b)相对运动；(c)绝对运动

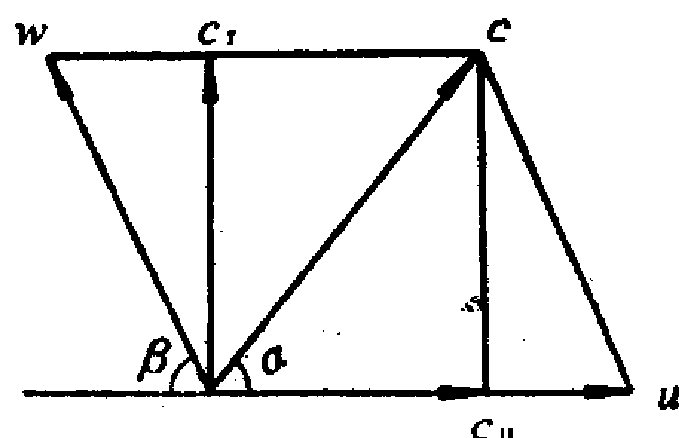


图 13-8　速度图

绝对速度$\vec{c}$可以分解为径向分速度c_r和切向分速度c_u。径向分速度与流量有关，切向分速度与能头有关。即

$$c_r=c\sin\alpha$$

$$c_u=c\cos\alpha$$

速度图是研究流体在叶轮内能量转换及其性能的基础。由以后的分析得知，泵与风机的性能主要与叶轮进口及出口处的流体运动情况有关。以后用角标"1"表示进口的物理量，用角标"2"表示出口处的物理量。

叶轮进口直径为D_1，出口直径（即叶轮外径）为D_2，叶轮转速为n，则叶轮的进口圆周速度u_1及出口圆周速度u_2分别为

$$\left.\begin{aligned}u_1&=\frac{\pi D_1 n}{60}\\u_2&=\frac{\pi D_2 n}{60}\end{aligned}\right\}\tag{13-4}$$

叶轮的进口宽度为b_1，出口宽度为b_2，泵或风机的流量为Q，则叶轮进口的径向分速度c_{r1}及出口径向分速度c_{r2}分别为

$$\left.\begin{aligned}c_{r1}&=\frac{Q}{e_1\pi D_1 b_1}\\c_{r2}&=\frac{Q}{e\pi D_2 b_2}\end{aligned}\right\}\tag{13-5}$$

式中e_1、e_2为排挤系数，考虑叶片厚度对流动通道的影响。对于水泵e值在0.75～0.95之

间。小泵取低限，大泵取高限。

根据u_1、u_2、c_{r1}、c_{r2}、及β_1、β_2，则可以作出叶轮进口及出口的速度图。

§13-4 离心式泵与风机的基本方程

从理论上研究流体在叶轮中的运动情况和获得能量的关系，就是泵与风机的基本方程式。

一、基本假设

为了使问题简化，在推导过程中采用以下两个基本假设，建立流动模型。

1）叶轮具有无限多个叶片，叶片厚度极薄。流体在叶片之间的流道中流动时，流速方向与叶片弯曲方向相同，同一圆周上流速的大小是均匀的。

2）流过叶轮的流体是理想流体，流动过程中没有能量损失。

二、方程式推导

在以上基本假设下，应用§4-12动量矩方程推导离心式泵与风机的基本方程式。由动量矩方程得知，作用于控制面内流体上的外力对转轴的力矩等于单位时间内控制面流体对该轴的动量矩的增量与通过控制面净流出的动量矩之和。

取叶轮的进口及出口圆柱面为控制面。当叶轮转速恒定时，流体运动是恒定流动，控制面内流体动量矩增量为零，则外力矩等于单位时间内通过控制面流出与流入的动量矩的差值。

由于假设叶轮无穷多叶片，同一圆周上速度的大小是均匀的，故单位时间内通过叶轮整个出口断面流出的动量矩为

$$\rho Q_{T\infty} c_{u2T\infty} r_2$$

单位时间内通过叶轮整个进口断面流入的动量矩为

$$\rho Q_{T\infty} c_{u1T\infty} r_1$$

其中流量Q及切向分速度c_u的角标"T∞"表示理想流体及无穷多叶片，r_1、r_2是叶轮进口半径及出口半径。

由动量矩方程得

$$M=\rho Q_{T\infty}(r_2 c_{u2T\infty}-r_1 c_{u1T\infty})$$

将此式两边乘以角速度ω，而$M\omega=N$。N是外加功率，在没有能量损失的假设条件下，$N=\gamma Q_{T\infty}H_{T\infty}$。又考虑到$u=r\omega$，则上式可写为

$$M\omega=N=\gamma Q_{T\infty}H_{T\infty}\doteq\rho Q_{T\infty}(u_{2T\infty}c_{u2T\infty}-u_{1T\infty}c_{u1T\infty})$$

整理之，就得到单位重量流体获得的能量为

$$H_{T\infty}=\frac{1}{g}(u_{2T\infty}c_{u2T\infty}-u_{1T\infty}c_{u1T\infty}) \tag{13-6}$$

这就是离心式泵与风机的基本方程，它是1754年首先由欧拉提出的，故又称为欧拉方程。

由欧拉方程式看出：

1）流体所获得的理论能头$H_{T\infty}$，仅与流体在叶轮进口与出口处的速度有关，与叶轮内部的流动过程无关；

2）流体所获得的理论能头$H_{T\infty}$，与被输送流体的种类无关 也就是说，无论被输

送的流体是水或是空气，只要叶轮进出口的速度图相同，都可以得到相同的水柱或气柱高度（能头）。但水与空气所需功率不同，因为功率和流体的重度成正比。

三、欧拉方程式的修正

欧拉方程式是在无限多叶片和叶片无限薄的假设下得到的。实际上，叶轮的叶片数目只有几片或几十片，叶片之间的流道有一定宽度。当叶轮旋转时，流体由于惯性，产生与叶轮转动方向相反的相对涡流。如图13-9所示。

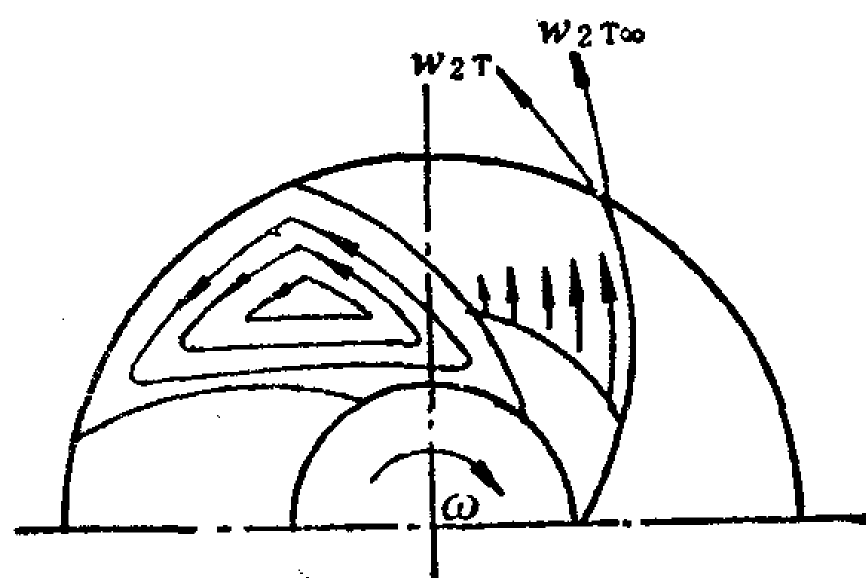


图 13-9 相对涡流

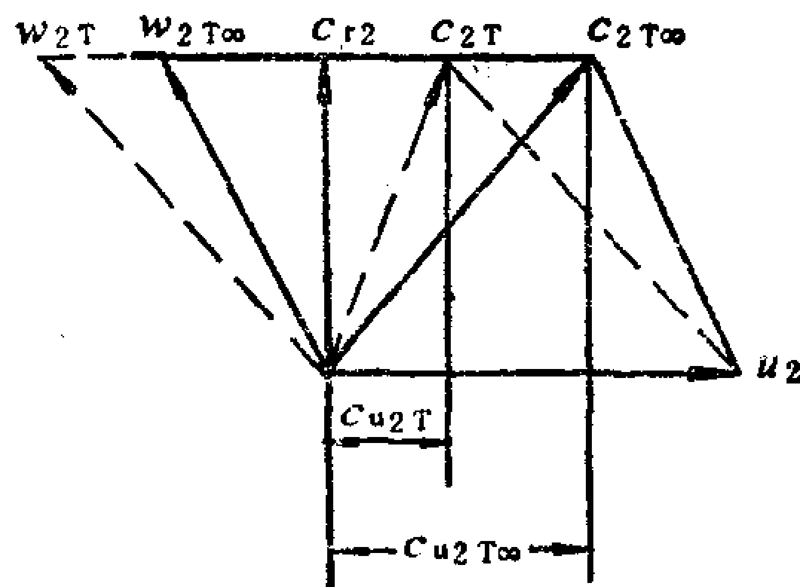


图 13-10 出口速度图的变化

相对涡流与沿叶片的均匀流动迭加，使顺转动方向的流道前部相对流速增大，后部相对流速减小，从而同一半径圆周上速度分布不均匀。同时叶轮出口处相对速度的方向向叶轮转动的反方向偏移，由$w_{2T\infty}$偏移为w_{2T}（见图13-9）。由于流量与转速不变，即c_{r2}及u_2不变，从出口速度图（图13-10）可以看出，相对速度的偏移使切向分速度$c_{u2T\infty}$减小为c_{u2T}。从而有限叶片叶轮的能头降低。可采用涡流系数K来表示此项影响。即

$$H_T = KH_{T\infty} \tag{13-7}$$

理论和试验表明，涡流系数K与叶片数目、叶轮内径和外径的比值、流体粘度等因素有关。对于水泵常采用斯塔区金（Stechkin）经验公式

$$K = \frac{1}{1 + \frac{2\pi}{3Z}\frac{1}{1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}} \tag{13-8}$$

式中 Z——叶片数；

r_1、r_2——叶轮进出口半径。

对于风机，板式前盘、且前后盘平行的叶轮，可采用Eck经验公式计算

$$K = \frac{1}{1 + \sin\beta_2 \frac{\pi}{Z\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]}} \tag{13-9}$$

上式适用于 $30° < \beta_2 < 50°$ 的范围。当 $\beta_2 > 50°$时，则采用下式

$$K = \frac{1}{1 + \frac{1.5 + 1.1\frac{\beta_2}{90}}{Z\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2\right]}} \tag{13-10}$$

粗略计算时，水泵的K值可取为0.8，风机可取为0.8～0.85。

在推导欧拉方程式时，假设流体是理想流体，流动过程中没有能量损失，而实际流体

都有粘性，在叶轮内流动过程中必然产生能量损失。因此实际能头H必然小于理论能头H_T。我们用水力效率η_H考虑此项能量损失。

$$H=\eta_H H_T=\eta_H K H_{T\infty}$$

为简便起见，以后写欧拉方程式时，将速度角标“T∞”省略。

【例 13-1】 有一离心泵，已知叶轮进口直径$D_1=120$mm，出口直径$D_2=240$ mm，进口宽度$b_1=27$mm，出口宽度$b_1=15$mm，进口安装角$\beta_1=15°$，出口安装角$\beta_2=22°$，叶轮转速$n=1800$r/min，忽略叶片厚度的影响。试求：

（1）液体径向流入$\alpha_1=90°$时的理论流量Q_T；

（2）出口工作角α_2及理论扬程$H_{T\infty}$；

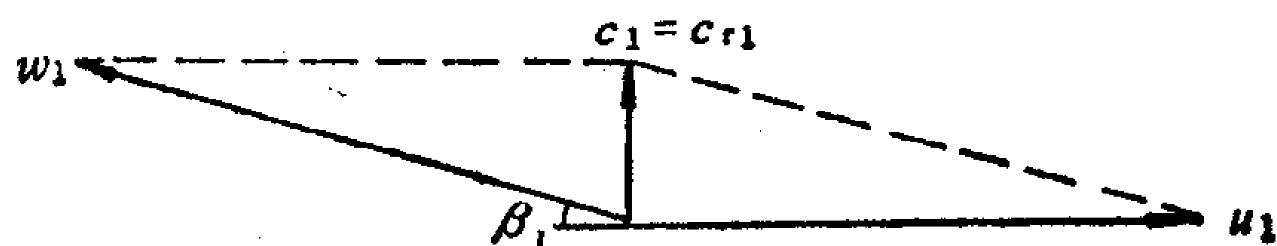
（3）理论功率N_T。

【解】 （1）$u_1=\dfrac{\pi D_1 n}{60}=\dfrac{\pi\times0.12\times1800}{60}=11.30\text{m/s}$

$\because\ \alpha_1=90°$

$c_1=c_{r1}=u_1\tan\beta_1=11.30\times\tan15°=3.03\text{m/s}$

$Q_T=c_{r1}\pi D_1 b_1=3.03\times\pi\times0.12\times0.027=0.031\text{m}^3/\text{s}$



例 13-1图（a）

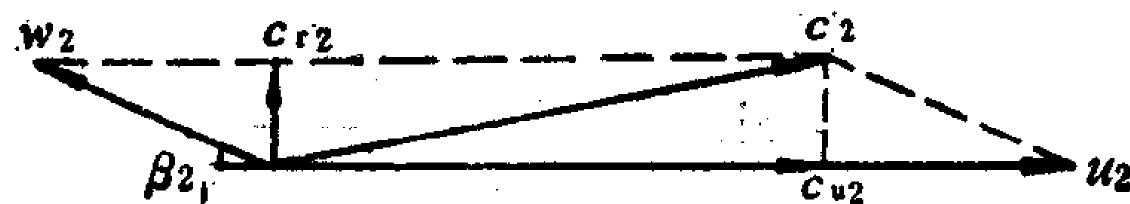
（2）$u_2=\dfrac{\pi D_2 n}{60}=\dfrac{\pi\times0.24\times1800}{60}=22.61\text{m/s}$

$$c_{r2}=\frac{Q}{\pi D_2 b_2}=\frac{0.031}{\pi\times0.24\times0.015}=2.74\text{m/s}$$

$$c_{u2}=u_2-c_{r2}\cot\beta_2=22.61-2.74\times\cot22°=15.83\text{m/s}$$

$$\alpha_2=\arctan\frac{c_{r2}}{c_{u2}}=\arctan\frac{2.74}{15.83}=9.82°$$

$$H_{T\infty}=\frac{1}{g}u_2c_{u2}=\frac{1}{g}\times22.61\times15.83=36.5\text{m}$$



例 13-1图（b）

（3）理论功率

$$N_T=\gamma Q_T H_{T\infty}=9.807\times0.031\times36.5=11.1\text{kW}$$

【例 13-2】 上题中离心泵的叶轮有8个叶片，水力效率$\eta_H=0.9$，问泵的实际扬程是多少？

【解】 叶轮进出口半径比$\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{D_1}{D_2}=\dfrac{120}{240}=\dfrac{1}{2}$

叶片数$Z=8$

由斯塔区金公式，涡流系数为

$$K=\frac{1}{1+\dfrac{2\pi}{3Z}\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2}}=\frac{1}{1+\dfrac{2\pi}{3\times8}\dfrac{1}{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}}=0.74$$

实际扬程$H=\eta_H K H_{T\infty}=0.9\times0.74\times36.5=24.31\text{m}$

§ 13-5 理论能头的组成

理论能头是单位重量流体通过泵或风机获得的机械能。流体的机械能包括位能、压能、动能三部分，理论能头中这三部分能量的组成如何呢？

首先看位能，由于叶轮的进口与出口断面是同轴圆柱面，平均位置高度Z相等，都在转轴上。因此理论能头中不包括位能。

为了将理论能头中压能与动能分开，将速度图用余弦定理展开：

$$w_2^2=u_2^2+c_2^2-2u_2c_2\cos\alpha_2=u_2^2+c_2^2-2u_2c_{u2}$$

$$w_1^2=u_1^2+c_1^2-2u_1c_1\cos\alpha_1=u_1^2+c_1^2-2u_1c_{u1}$$

得

$$u_2c_{u2}=\frac{u_2^2+c_2^2-w_2^2}{2}$$

$$u_1c_{u1}=\frac{u_1^2+c_1^2-w_1^2}{2}$$

代入理论能头公式，则

$$H_T=\frac{c_2^2-c_1^2}{2g}+\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}+\frac{w_1^2-w_2^2}{2g} \tag{13-11}$$

其中第一项中c_2、c_1是流体在叶轮出口与进口的绝对速度，是流体相对于固定在地球上的惯性坐标系的速度。因此绝对速度的流速水头是单位重量流体具有的动能。出口绝对流速水头与进口绝对流速水头的差值，就是流体所获得的动能，称为**动能头**，记为

$$H_d=\frac{c_2^2-c_1^2}{2g} \tag{13-12}$$

其余两项虽然形式上也是流速水头差，但实质上是单位重量流体获得的压能，称为**静能头**，记为

$$H_s=\frac{p_2-p_1}{\gamma}=\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}+\frac{w_1^2-w_2^2}{2g} \tag{13-13}$$

其中$\dfrac{u_2^2-u_1^2}{2g}$是进出口圆周速度不同转化的压能，它是静能头的主要部分。如果叶轮中流体只作圆周运动，没有相对运动时，与容器作等角速度旋转流体相对平衡情况相同。由§3-5得知，流体各点的压强为（不考虑位置高度）

$$\frac{p}{\nu}=\frac{r^2\omega^2}{2g}=\frac{u^2}{2g}$$

由于叶轮出口半径r_2大于进口半径r_1，故出口压强p_2大于进口压强p_1，其差值正是

$$\left(\frac{p_2-p_1}{\nu}\right)_u=\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}$$

实际上流体除圆周运动外，还沿着叶片间的流道作相对运动。由于叶片由进口向出口展宽，相对速度降低而转化为压能，即

$$\left(\frac{p_2-p_1}{\gamma}\right)_w=\frac{w_1^2-w_2^2}{2g}$$

这部分压能在静能头中所占比例较小。

§13-6 叶轮型式对能头的影响

泵与风机设计时，为了得到最大能头，一般这样选定进口安装角β_1，在设计工况下使进口工作角$\alpha_1=90°$。由于$c_{u1}=c_1\cos\alpha_1=0$，由欧拉方程式可知，理论能头$H_{T\infty}$得到最大值，

即
$$H_{T\infty}=\frac{1}{g}u_2c_{u2} \tag{13-14}$$

这时流体沿径向流入叶片间的流道，绝对速度c_1与径向分速度相等$c_1=c_{r1}$。如图13-11(a)所示。

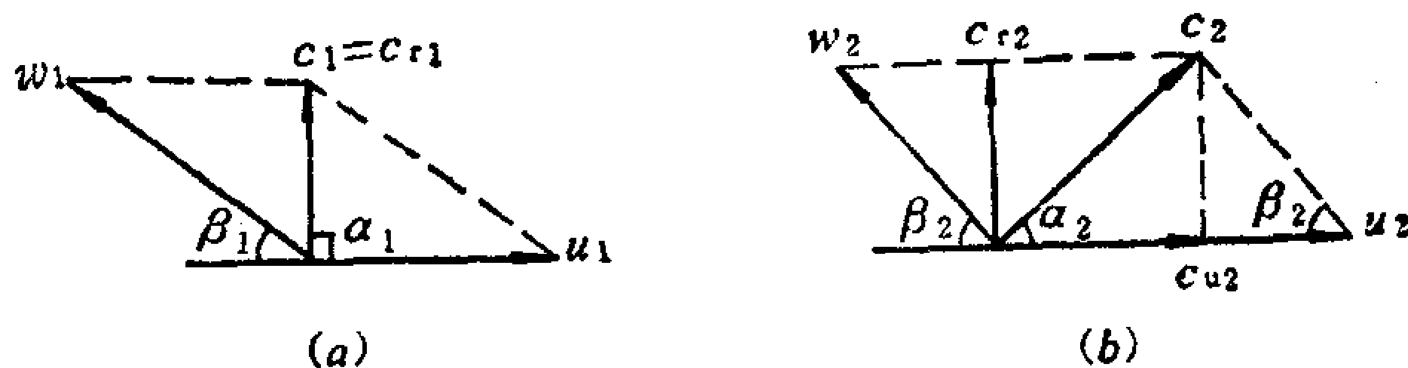


图 13-11 叶轮进出口速度图

(a)进口速度图；(b)出口速度图

为了讨论出口安装角β_2对理论能头的影响，将出口速度图画出，如图13-11(b)。由图看出

$$c_{u2}=u_2-c_{r2}\cot\beta_2 \tag{13-15}$$

代入式(13-14)，则

$$H_{T\infty}=\frac{1}{g}(u_2^2-u_2c_{r2}\cot\beta_2) \tag{13-16}$$

上式表明，理论能头$H_{T\infty}$与出口安装角β_2有关。按照β_2的不同，叶轮可分为三种型式：后弯式$\beta_2<90°$，叶片出口方向与叶轮旋转方向相反；径向式$\beta_2=90°$，叶片出口方向沿叶轮的半径方向；前弯式$\beta_2>90°$，叶片出口方向与叶轮旋转方向一致。

取外径相同，转速相同(u_2相同)、流量相同(c_{r2}相同)的三种型式叶轮，见图13-12，比较其理论能头。由式(13-16)可知：

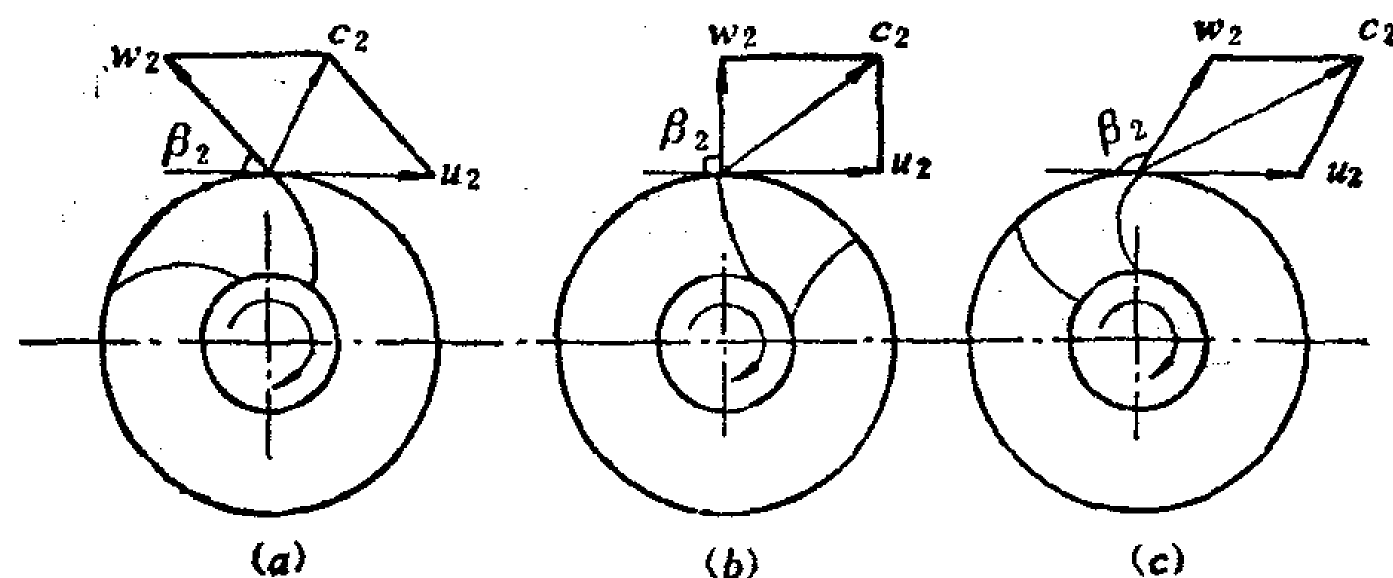


图 13-12 三种型式叶轮

(a)后弯式$\beta_2<90°$；(b)径向式$\beta_2=90°$；(c)前弯式$\beta_2>90°$

后弯式$\beta_2<90°$，$\cot\beta_2>0$，　则$H_{T\infty}<\frac{u_2^2}{g}$；

径向式$\beta_2=90°$，$\cot\beta_2=0$，　则$H_{T\infty}=\frac{u_2^2}{g}$；

前弯式$\beta_2>90°$，$\cot\beta_2<0$，　则$H_{T\infty}>\frac{u_2^2}{g}$。

因此，在流量、尺寸、转速相同的条件下，前弯式叶轮产生的理论能头最大，后弯式叶轮的理论能头最小，径向式居中。

下面进一步分析不同叶轮型式对理论能头组成的影响。通常离心式泵与风机叶轮的进口截面积与出口截面积相差不大，因此进口和出口的径向分速度可以近似看作相等，

即
$$c_{r1}=c_{r2}$$

又因
$$c_1=c_{r1}，故c_1=c_{r1}=c_{r2}$$

将此关系代入式（13-9），得动能头为

$$H_d=\frac{c_2^2-c_1^2}{2g}=\frac{c_2^2-c_{r2}^2}{2g}=\frac{c_{u2}^2}{2g}$$

由前知
$$c_{u2}=u_2-c_{r2}\mathrm{ctg}\beta_2$$

后弯式叶轮$\beta_2<90°$，$c_{u2}<u_2$，所以$H_{T\infty}=\frac{u_2c_{u2}}{g}>\frac{c_{u2}^2}{g}$，则$H_d<\frac{H_{T\infty}}{2}$，动能头小于理论能头的一半。

径向式叶轮$\beta_2=90°$，$c_{u2}=u_2$，所以$H_{T\infty}=\frac{u_2c_{u2}}{g}=\frac{c_{u2}^2}{g}$，则$H_d=\frac{H_{T\infty}}{2}$，动能头等于理论能头的一半。

前弯式叶轮$\beta_2>90°$，$c_{u2}>u_2$，所以$H_{T\infty}=\frac{u_2c_{u2}}{g}<\frac{c_{u2}^2}{g}$，则$H_d>\frac{H_{T\infty}}{2}$，动能头大于理论能头的一半。

由以上分析可见，流体通过前弯式叶轮所获得的能头中，动能占一半以上。后弯式叶轮则相反，压能占一半以上。动能占的比重越大，相应的能量损失也越大，因而前弯式叶轮效率较低。

综上所述，各种型式的叶轮各有优缺点，对于离心式水泵及大型风机，一般要求效率高，多采用后弯式叶轮。对于中小型风机，由于本身功率较小，效率成为次要的问题，为了缩小风机的尺寸，常采用前弯式叶轮。径向式叶轮的特点介于后弯式与前弯式之间，由于它加工容易，出口沿径向，不易积尘堵塞，叶片强度较好，多采用于污水泵、排尘风机、耐高温风机等。

【例 13-3】 例题13-1离心泵的理论能头中，动能头与静能头各多少？

【解】 由例13-1知绝对速度$c_1=3.03\text{m/s}$

$$c_2=\sqrt{c_{r2}^2+c_{u2}^2}=\sqrt{2.74^2+15.83^2}=16.07\text{m/s}$$

动能头 $H_d=\frac{c_2^2-c_1^2}{2g}=\frac{16.07^2-3.03^2}{2g}=12.7\text{m}$

相对速度 $w_1=\frac{c_{r1}}{\sin\beta_1}=\frac{3.03}{\sin15°}=11.71\text{m/s}$

$$w_2=\frac{c_{r2}}{\sin\beta_2}=\frac{2.74}{\sin22°}=7.31\text{m/s}$$

静能头 $H_s=\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}+\frac{w_1^2-w_2^2}{2g}=\frac{22.61^2-11.30^2}{2g}+\frac{11.71^2-7.31^2}{2g}$

$=19.55+4.27=23.8\text{m}$

此离心泵的叶轮是后弯式，其理论能头中静能头占一半以上，静能头中由于进出口圆周速度不同转化的压能$\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}$占主要部分。

习　题

13-1　已知离心式通风机叶轮直径$D_2=500\text{mm}$，出口宽度$b_2=100\text{mm}$，出口安装角$\beta_2=30°$，转速$n=1200\text{r/min}$，风量$Q=8000\text{m}^3/\text{h}$，忽略叶片厚度，试作出口速度图。如叶轮进口气流沿径向流入，求理论风压$p_{T\infty}$（空气密度$\rho=1.2\text{kg/m}^3$）。

13-2　离心式水泵的叶轮直径$D_2=178\text{mm}$，进口直径$D_1=59\text{mm}$，进出口净面积相等，$A_1=A_2=0.00514\text{m}^2$，转速$n=2900\text{r/min}$，流量$Q=120\text{m}^3/\text{h}$时，液体径向流入叶轮，试求进口安装角$\beta_1$。如出口安装角$\beta_2=25°$，问理论扬程$H_{T\infty}$是多少？

13-3　有一台多级离心泵，扬程为156m，已知叶轮直径$D_2=250\text{mm}$，转速$n=1800\text{r/min}$，出口切向分速c_{u2}是圆周速度的50%，涡流修正系数$K=0.8$，水力效率$\eta_H=92\%$，问需要多少级？

13-4　离心式风机的叶轮为径向式，外径$D_2=300\text{mm}$，转速$n=1450\text{r/min}$，设气体沿径向流入，试绘叶轮出口速度图，并求叶轮的理论全压$p_{T\infty}$。

13-5　离心式水泵叶轮外径为200mm，后弯式出口安装角$\beta_2=30°$，出口径向分速度$c_{r2}=5.4\text{m/s}$。设径向流入，试求理论扬程$H_{T\infty}$。如叶轮反向旋转，理论扬程为多少？并将二者进行比较。

13-6　上题中水泵如叶轮进口直径$D_1=100\text{mm}$，进口径向分速与出口径向分速相等，$c_{r1}=c_{r2}$。试求后弯式及前弯式两种情况下的动扬程及静扬程。

第十四章　离心式泵与风机的设备性能

§14-1　离心式泵与风机的理论性能曲线

泵与风机的性能是由流量Q、能头H、轴功率N、效率η及转速n等参数表示的。这些参数之间存在着一定的函数关系，当一个参数变化时，其它参数都随之而变化。这种函数关系用曲线表示，就是泵与风机的性能曲线。

在泵与风机运转时，转速n一般由原动机转速所决定，基本不变。流量Q随着用户需要而经常变化。所以性能曲线通常是在转速一定的情况下，以流量为自变量，讨论其它性能参数的变化。性能曲线有以下三种：

1）能头与流量之间的关系$H=f_1(Q)$；

2）轴功率与流量之间的关系$N=f_2(Q)$；

3）效率与流量之间的关系$\eta=f_3(Q)$。

理论性能曲线是从欧拉方程式出发，研究理想条件下的性能曲线。假设流体沿径向流入叶轮，欧拉方程式为：

$$H_{T\infty}=\frac{1}{g}u_2c_{u2} \quad (13\text{-}14)$$

其中，

$$u_2=\frac{\pi D_2 n}{60}; \quad (13\text{-}4)$$

$$c_{u2}=u_2-c_{r2}\cot\beta_2; \quad (13\text{-}15)$$

$$c_{r2}=\frac{Q_T}{\varepsilon_2\pi D_2 b_2}。 \quad (13\text{-}5)$$

将以上流速代入式（13-14），得

$$H_{T\infty}=\frac{u_2^2}{g}-\frac{u_2}{g}\frac{Q_T}{\varepsilon_2\pi D_2 b_2}\cot\beta_2$$

对于大小一定的泵或风机，转速不变时，上式中u_2、ε_2、D_2、b_2、β_2均为定值，上式可简写为

$$H_{T\infty}=A-BQ_T \quad (14\text{-}1)$$

式中，$A=\frac{u_2^2}{g}$，$B=\frac{u_2}{g}\frac{\cot\beta_2}{\varepsilon_2\pi D_2 b_2}$，均是常数。

式（14-1）说明，泵与风机的理论能头与理论流量是线性关系，当$Q_T=0$时，$H_{T\infty}=\frac{u_2^2}{g}$。直线的形状与出口安装角$\beta_2$有关。对于三种叶型分别为：后弯式叶轮$\beta_2<90°$，$\cot\beta_2>0$，$B>0$，当$Q_T$增大时$H_{T\infty}$减小，$H_{T\infty}$-$Q_T$线向下倾斜；前弯式叶轮$\beta_2>90°$，$\cot\beta_2<0$，$B<0$，当$Q_T$增大时$H_{T\infty}$增大，$H_{T\infty}$-$Q_T$线向上倾斜；径向式叶轮$\beta_2=90°$，$\cot\beta_2=0$，$B=0$，当$Q_T$增大时$H_{T\infty}$不变，$H_{T\infty}$-$Q_T$线水平。如图14-1所示。

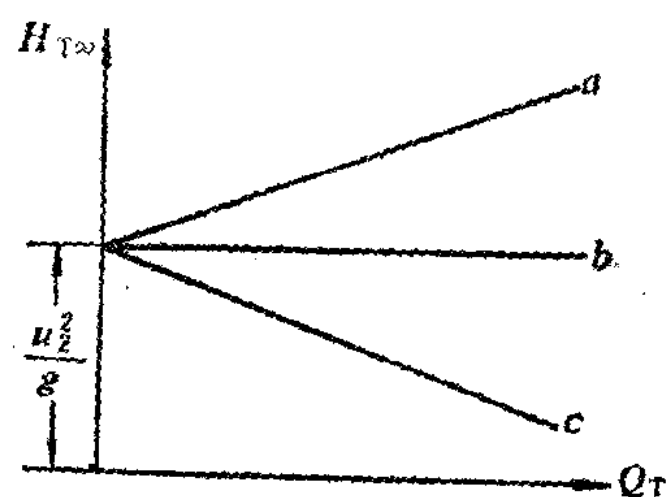


图 14-1　三种叶轮的理论能头曲线
a—前弯式；b—径向式；c—后弯式

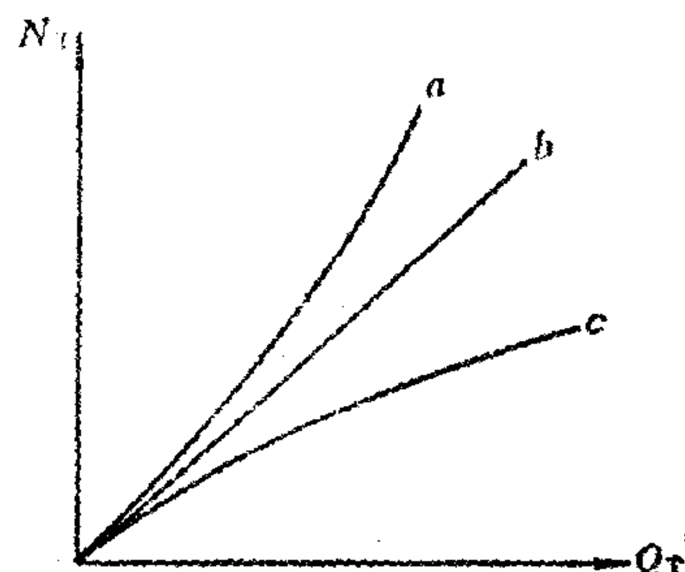


图 14-2　三种叶型的理论功率曲线
(a)前弯式；(b)径向式；(c)后弯式

由于假设没有能量损失，理论轴功率等于有效功率，即

$$N_T = N_e = \gamma Q_T H_{T\infty}$$

将式（14-1）代人，可得

$$N_T = \gamma Q_T(A - BQ_T) \qquad (14\text{-}2)$$

式（14-2）表明，当$Q_T = 0$时，三种叶轮的理论功率都等于零，理论功率曲线都交于原点。对于径向式叶轮$\beta_2 = 90°$，$\cot\beta_2 = 0$，$B = 0$，理论功率曲线是一条直线。对于前弯式叶轮，$\beta_2 > 90°$，$\cot\beta_2 < 0$，$B < 0$，理论功率曲线是向上凹的二次曲线。对于后向式叶轮，$\beta_2 < 90°$，$\cot\beta_2 > 0$，$B > 0$，理论功率曲线是向下凹的二次曲线。见图14-2。

在理想条件下，各项损失为零，因此效率恒为100%。

以上分析，可以定性地说明不同叶型的泵与风机性能曲线的变化趋势，对于研究实际性能曲线是有意义的。同时理论性能曲线还可以解释泵与风机在运转中产生一些问题的原因。如由理论功率曲线可以看出，前弯式叶轮的轴功率随流量增加而迅速增长，因此这种风机在运行中，电机很容易超载，而后弯式叶轮几乎不会发生超载。

§ 14-2　泵与风机的损失与效率

泵与风机在运行中的损失，按产生的原因，可分为三种，机械损失，容积损失和水力损失。由于流体在泵与风机内的流动情况十分复杂，现在还不能用数学方法进行准确的计算。但是从理论上分析这些损失，指出它产生的原因及影响因素，可以找出减少损失的途径。

一、机械损失和机械效率

机械损失包括轴承和轴封的摩擦损失及叶轮转动时其表面与机壳内流体之间发生的圆盘摩擦损失。机械损失中圆盘损失占主要部分。

圆盘损失与叶轮外径、转速、以及圆盘外侧与机壳内侧的粗糙度等因素有关。叶轮外径愈大，转速愈大，圆盘损失也愈大。

机械损失功率的大小，可用机械效率来衡量，机械效率用下式表示：

$$\eta_m = \frac{N - \Delta N_m}{N} \qquad (14\text{-}3)$$

式中　ΔN_m——机械损失功率，包括轴承轴封和圆盘摩擦损失功率。

二、容积损失和容积效率

在泵与风机中，由于转动部件与静止部件之间存在间隙，当叶轮转动时，间隙两侧产生压力差，从而使流体从高压侧通过间隙向低压侧泄漏，这种损失称为容积损失或泄漏损失。流体泄漏主要发生在以下地方：叶轮进口处与机壳之间的间隙；轴与机壳之间即轴封处的间隙；以及水泵为平衡轴向推力而设置的平衡孔等。如图14-3。

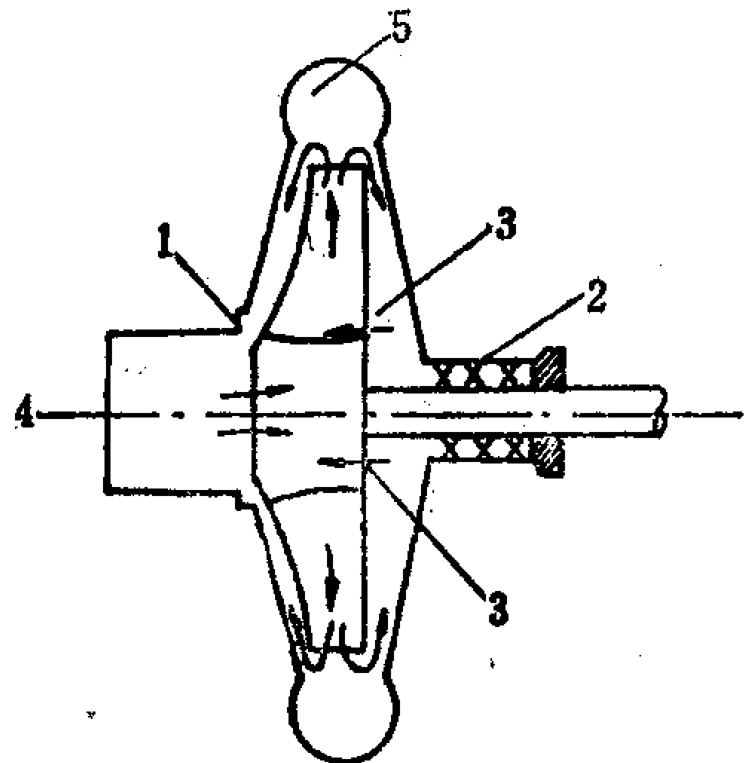


图 14-3　泵的泄漏损失及有关构造

1—密封环；2—轴封；3—平衡孔；4—低压区；5—高压区

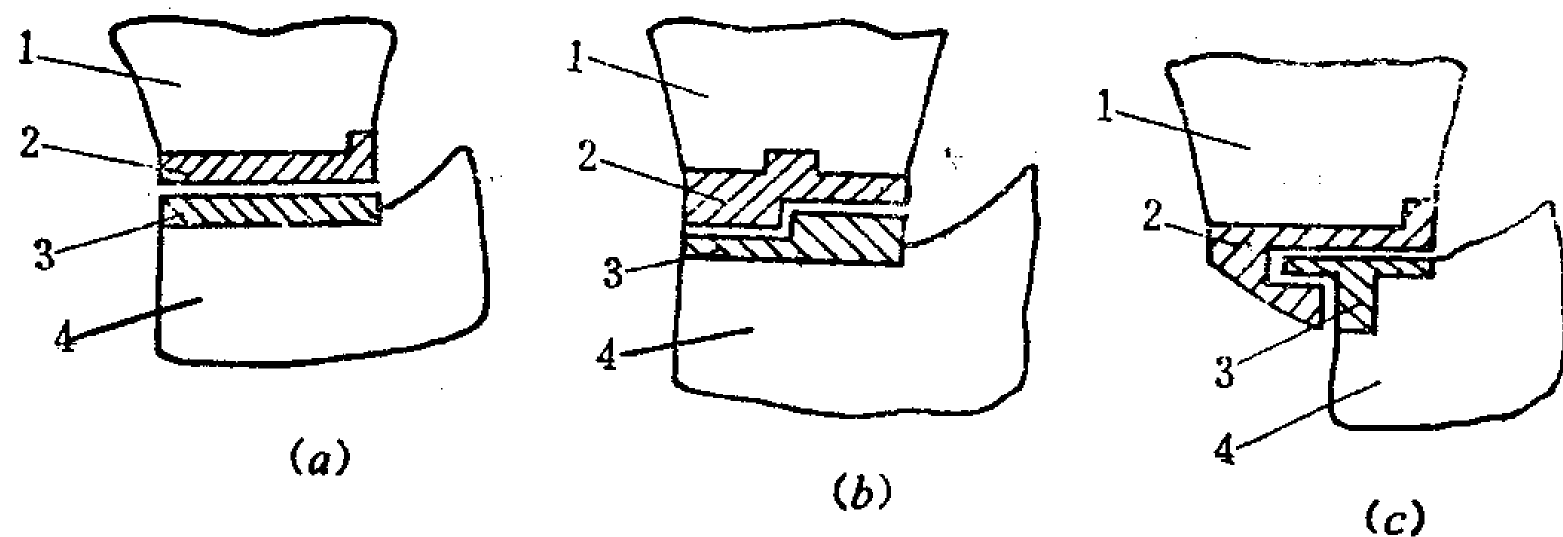


图 14-4　密封环装置

(a)圆柱式；(b)锯齿式；(c)迷宫式

1—机壳；2—定环；3—动环；4—叶轮

为了减少进口泄漏损失，一般在叶轮进口装有密封环。密封环的定环与动环分别装在机壳与叶轮上，定环与动环之间间隙较小，并可做成锯齿式、迷宫式，以加大间隙长度，减少泄漏，见图14-4，密封环磨损后可以更换。

泵轴与泵体之间的轴封，也是为了防止泵内高压液体流向泵外，同时保持轴转动灵活，减少机械摩擦损失。常用的轴封有填料轴封、骨架橡胶轴封、机械轴封等。

由于泵的叶轮两侧液体压强不平衡，引起叶轮受轴向推力作用，致使泵轴及叶轮运转时发生窜动。通常在叶轮后盘上开设平衡孔，高压液体通过平衡孔向进口侧泄漏，从而使轴向力平衡。为了减少这项泄漏损失，可采用其它消除轴向力措施。如在叶轮后盘外侧适当位置设置密封环，液体通过密封环，压强有所降低，从而与进口侧的低压相平衡。

通常用容积效率η_v来表示容积损失的大小。如以q表示泄漏的回流量，则

$$\eta_v=\frac{Q_T-q}{Q_T}=\frac{Q}{Q_T} \tag{14-4}$$

三、水力损失与水力效率

流体流经泵或风机所产生的能量损失，包括吸入口至叶片进口、叶轮流道、叶轮出口至机壳出口的损失。可分为两种，一种是沿程阻力损失和局部阻力损失。其大小与过流部件的几何形状、壁面粗糙度以及流体的粘性有关。一般来说这种水力损失与流量的平方成正比，即

$$\Delta H_1=K_1Q^2 \tag{14-5}$$

另一种水力损失是流体在叶片进口处的相对速度w_1的方向与叶片进口安装角β_1的方向不一致而引起的撞击损失，如图14-5所示。当泵与风机通过设计流量时，流体沿叶片切线方向流入叶片之间的流道，撞击损失等于零。当流量大于或小于设计流量时，w_1的方向偏离叶片的切线方向，在叶片的正面或背面形成漩涡区，由此而引起撞击损失。撞击损失可用下式表示：

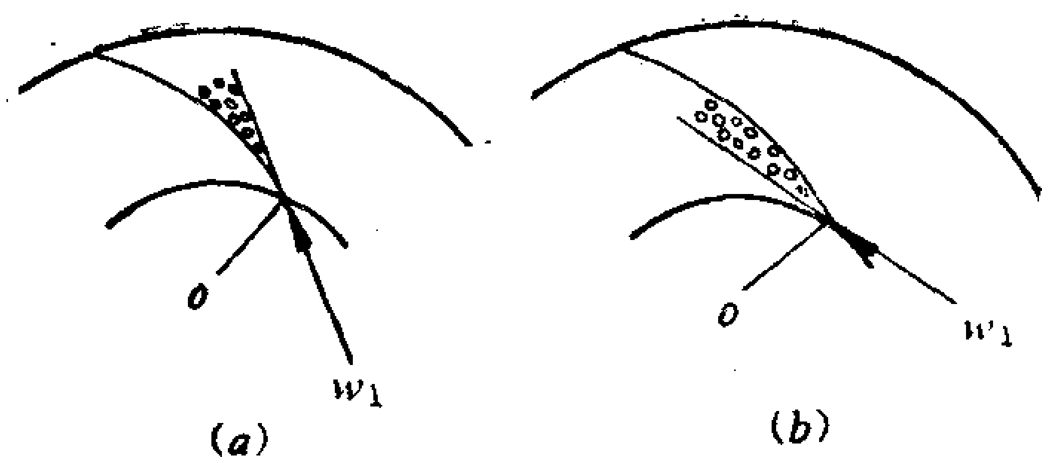


图 14-5 流体在叶轮进口的撞击损失
(a)大于设计流量；(b)小于设计流量

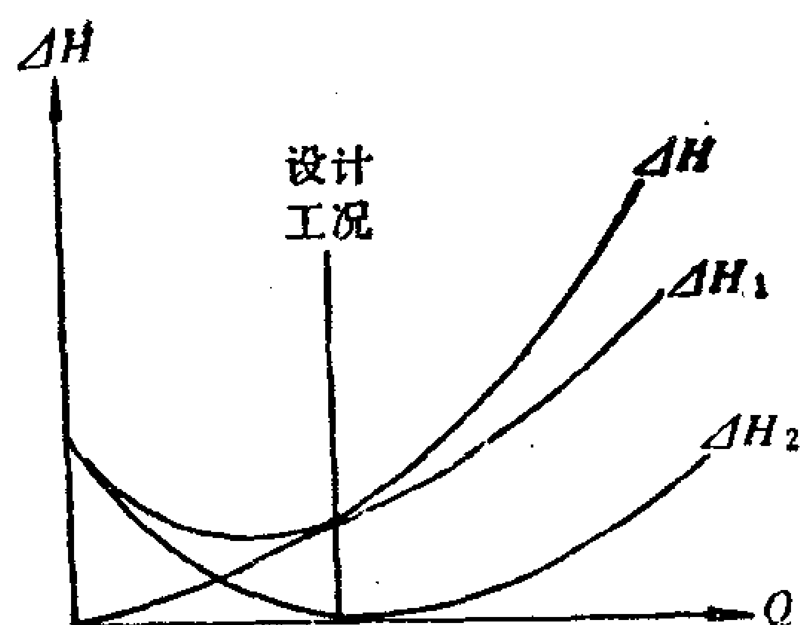


图 14-6 水力损失与流量的关系

$$\Delta H_2 = K_2(Q - Q_{设})^2 \tag{14-6}$$

总水头损失为以上两种损失之和，$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2$。总水头损失与流量的关系如图14-6。在所有损失中水力损失最大，即泵与风机的效率，主要受水力损失的影响。

水力损失可用水力效率η_H来衡量，水力效率为

$$\eta_H = \frac{H_T - \Delta H}{H_T} = \frac{H}{H_T} \tag{14-7}$$

式中，$H = H_T - \Delta H$为泵与风机的实际能头。

四、泵与风机的总效率η

泵与风机的总效率等于有效功率与轴功率之比，即

$$\eta = \frac{N_e}{N} = \eta_m \frac{\gamma QH}{\gamma Q_T H_T} = \eta_m \eta_V \eta_H \tag{14-8}$$

由此可见，泵与风机的总效率等于水力效率、容积效率及机械效率三者的乘积。目前，离心式泵的总效率约在62%～92%范围内，离心式风机约在50%～90%范围内。

§14-3 泵与风机的实际性能曲线

泵与风机在运行中必然产生机械损失、容积损失与水力损失，因此实际性能曲线与理论性能曲线必然不同。由于无法准确计算各项损失，实际性能曲线需要通过实验进行测定。但是我们可以根据各项损失的定性分析，在理论性能曲线的基础上，估计出实际性能曲线的大致形状。

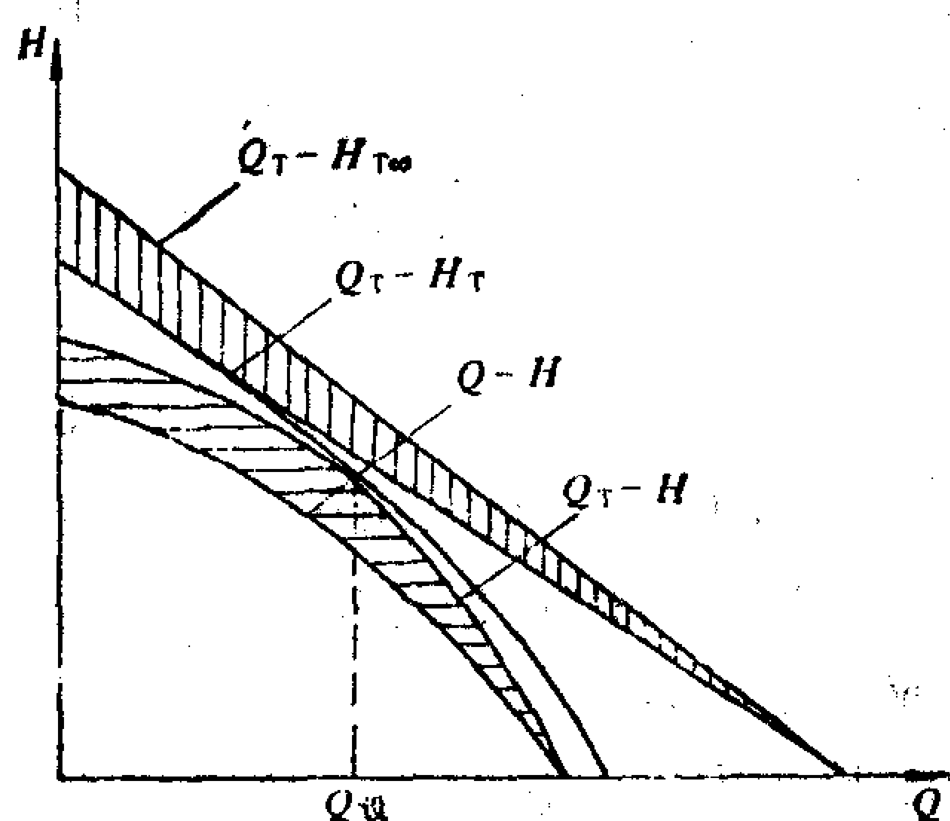


图 14-7 实际能头曲线的分析

一、实际能头曲线

以后弯式叶轮的能头曲线为例进行分析，目的是将理论性能曲线、损失与实际性能曲线联系起来。

1）根据欧拉方程式，理论能头$H_{T\infty} = A - BQ_T$，因此$H_{T\infty}$-Q_T曲线是一条向下倾斜的直线，见图14-7。

2）考虑相对涡流的影响，将无穷多叶片修正为有限个叶片，因$H_T = KH_{T\infty}$，在$H_{T\infty} = 0$时，

$H_T=0$，得H_T-Q_T线，仍是直线。

3）流体在叶轮中的沿程阻力损失和局部阻力损失与流量的平方成正比，即$\Delta H_1=K_1Q_T^2$，从H_T中减去ΔH_1。

4）水力损失中的撞击损失在设计工况时为零，$\Delta H_2=K_2(Q_T-Q_{设})^2$。从$H_T$中再减去$\Delta H_2$，得实际能头与理论流量的关系曲线，$H$-$Q_T$已是一条曲线。

5）泵与风机存在泄漏损失，泄漏量q的大小与能头H有关。$H=0$时，$q=0$；H愈大，q愈大。在理论流量Q_T中扣除相应的泄漏量q，得到实际的能头曲线，即H-Q曲线。

常用的泵与风机实际能头曲线有三种类型：陡降型、缓降型与驼峰型。陡降型的泵与风机宜用于流量变化较小的情况。缓降型的泵或风机可用于流量变化大而要求能头变化不大的情况。具有驼峰型性能的泵或风机，可能出现不稳定工况，是应避免的。

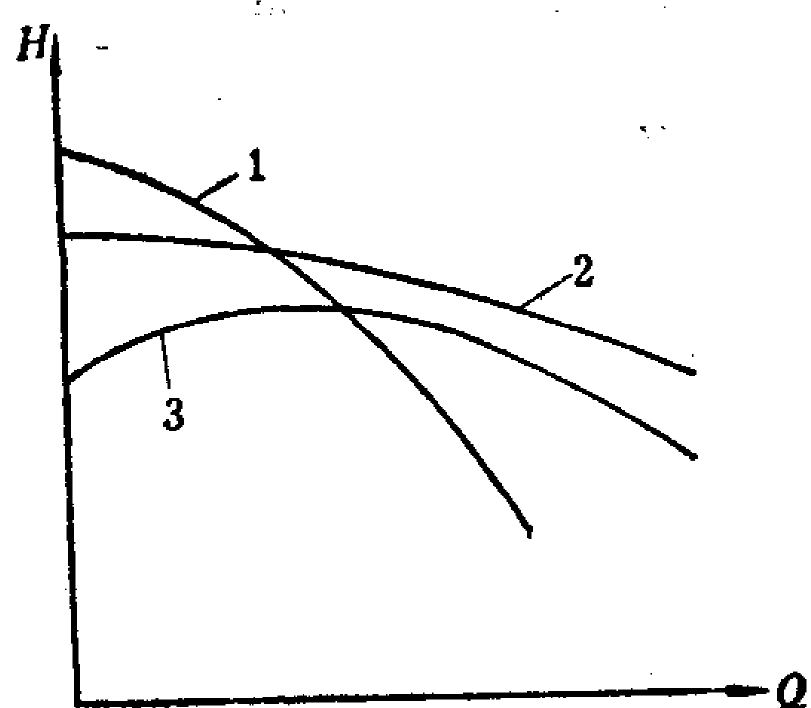


图 14-8　三种实际能头曲线

1—陡降型；2—缓降型；3—驼峰型

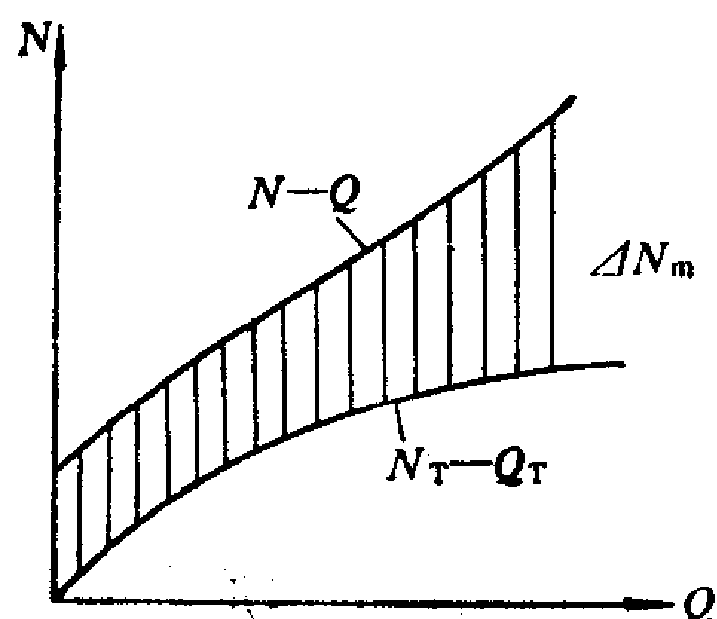


图 14-9　实际功率曲线

二、实际功率曲线

由于存在机械损失，实际轴功率大于理论功率，即

$$N=N_T+\Delta N_m=\gamma Q_T H_{T\infty}+\Delta N_m$$

实际功率曲线如图14-9所示。$Q=0$时，实际功率并不等于零。因为空载运转时，机械摩擦损失仍然存在。一般离心式泵与风机的实际功率随流量加大而增大，空载功率最小，所以离心式泵与风机应空载启动，以免电机超载。

三、效率曲线

泵与风机的效率曲线，可由能头曲线及功率曲线计算出来，即

$$\eta=\frac{\gamma QH}{N}$$

在$Q=0$和$H=0$时，η都等于零。故存在一个最高效率点$\eta=\eta_{max}$，称为最佳工况，或额定工况。泵与风机在此工况下工作最经济，能量损失最小。一般以$\eta\geqslant0.9\eta_{max}$做为高效区，只要在此范围内工作，就认为是经济的。

Q-H、Q-N、Q-η三条曲线是一台泵或风机在一定转速下的基本性能曲线，如图14-10所示。

四、风机的性能曲线

风机常用风压p代替能头H，p称为全压，$p_{全}=\gamma H$。相应的效率称为全效率，$\eta=$

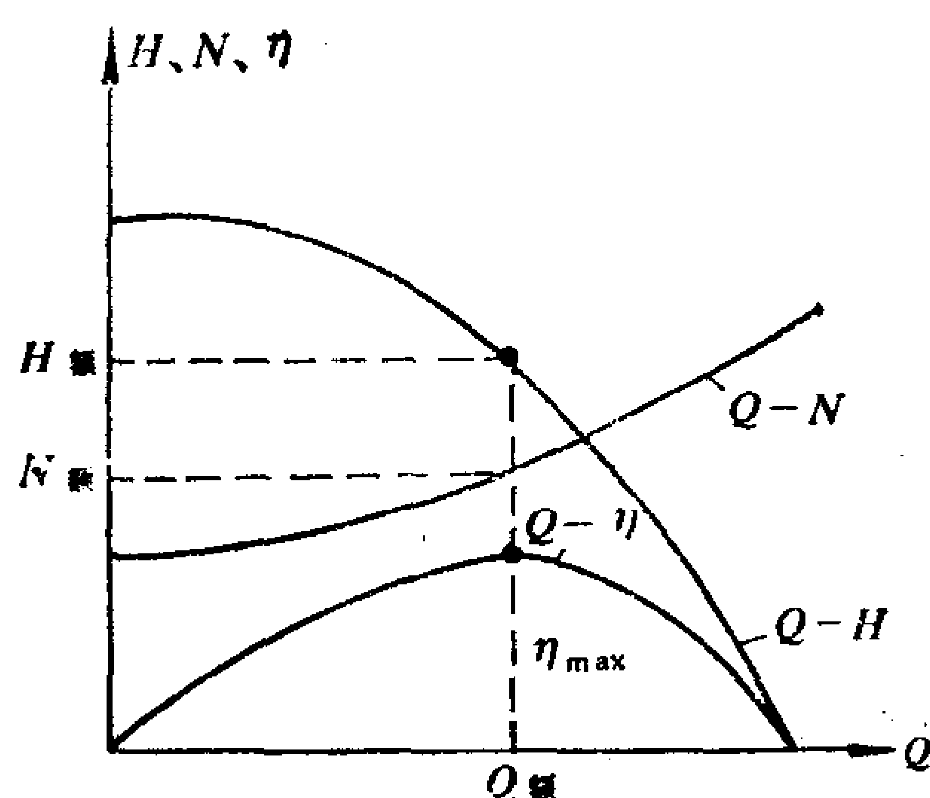


图 14-10　泵的性能曲线

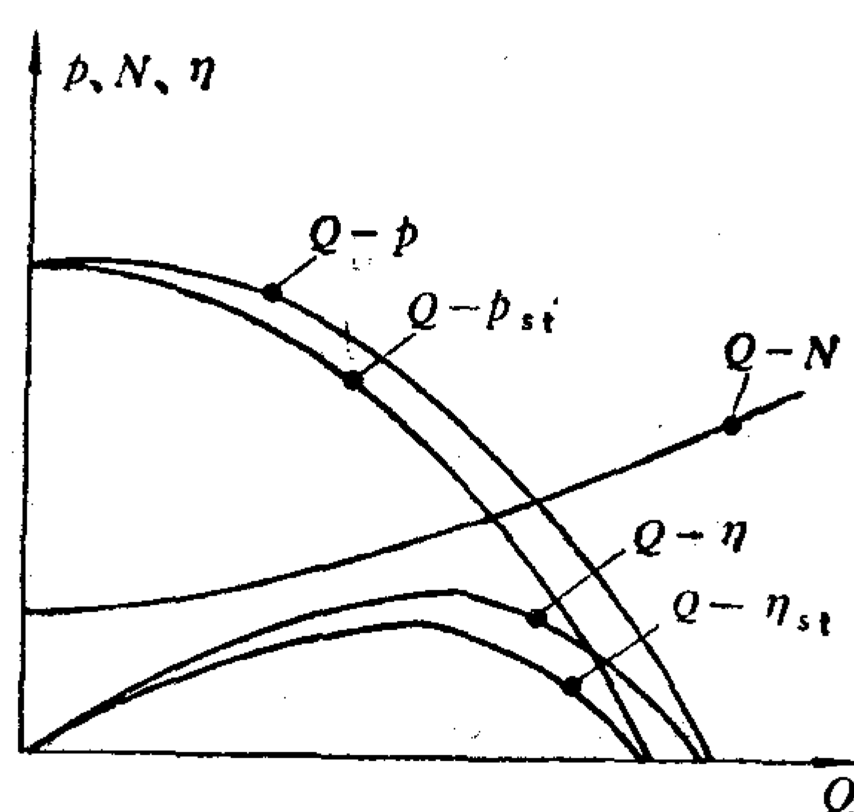


图 14-11　风机的性能曲线

$\frac{pQ}{N}$。式中γ为标准状况（大气压为760mmHg，温度为20℃）空气的重度。

风机的性能曲线除Q-p、Q-N、Q-η三条曲线外，有时给出静压曲线Q-p_{st}和静压效率曲线Q-η_{st}，见图14-11。

静压
$$p_{st}=p_{全}-\gamma\frac{v^2}{2g} \qquad (14\text{-}9)$$

静压效率
$$\eta_{st}=\frac{p_{st}Q}{N} \qquad (14\text{-}10)$$

式中v是风机出口的速度，静压是将流体获得的能量中扣去动能后所余部分。

§14-4　泵与风机的相似律

泵与风机的相似律是研究几何相似的泵或风机在相似工况之间性能参数的关系。在泵与风机的研制、选用与运行中，可以解决以下三方面问题。首先，研制新的泵或风机尤其大型机，需要通过模型试验，原型与模型之间性能参数按相似律进行换算。第二，泵与风机的设计与制造按系列进行，同一系列的泵或风机是几何相似的，它们的性能参数符合相似律。第三，同一台泵或风机，当转速改变或流体密度改变时，性能参数随之变化，需要用相似律进行换算。

一、相似条件

由相似原理得知，为了保证流体运动的力学相似，必需满足三方面的相似条件。下面用角标"m"表示模型的参数，"p"表示原型的参数。

（1）几何相似　同一系列的泵或风机满足几何相似条件，即相应的几何长度比值相等，相应的角度相等。

$$\frac{D_{1p}}{D_{1m}}=\frac{D_{2p}}{D_{2m}}=\frac{b_{1p}}{b_{1m}}=\frac{b_{2p}}{b_{2m}}=\cdots\cdots=\lambda_l \qquad (14\text{-}11)$$

$$\beta_{1p}=\beta_{1m} \quad \beta_{2p}=\beta_{2m} \qquad (14\text{-}12)$$

式中λ_l为长度比尺。

（2）运动相似　各对应点的同名速度大小比值相等，方向相同，即流体在各对应点的速度三角形相似。

$$\frac{c_{1p}}{c_{1m}}=\frac{c_{2p}}{c_{2m}}=\frac{u_{1p}}{u_{1m}}=\frac{u_{2p}}{u_{2m}}=\frac{w_{1p}}{w_{1m}}=\frac{w_{2p}}{w_{2m}}=\lambda_v \tag{14-13}$$

$$\alpha_{1p}=\alpha_{1m} \qquad \alpha_{2p}=\alpha_{2m} \tag{14-14}$$

原型与模型满足运动相似条件，即相应的速度图相似，它们对应的工况称为**相似工况**。

（3）动力相似　流动的动力相似，系指各对应点受同名力作用，其大小比值相等，方向相同。对于泵与风机而言，重力作用很小，可以忽略不计，粘滞力起主要作用，为了保证动力相似应满足雷诺准则。又由于泵与风机中的流动雷诺数较大，处于阻力平方区，因此自动满足动力相似。

二、相似律

同一系列的泵或风机，在相似工况下，性能参数有如下关系。

（1）流量关系　由式（13-5）及式（14-4）得泵或风机的流量为$Q=\eta_V\varepsilon\pi D_2b_2c_{r2}$，式中$\eta_V$是容积效率，$\varepsilon$是排挤系数。

原型机与模型机在相似工况的流量比为

$$\frac{Q_p}{Q_m}=\frac{\eta_{Vp}\varepsilon_p\pi D_{2p}b_{2p}c_{r2p}}{\eta_{Vm}\varepsilon_m\pi D_{2m}b_{2m}c_{r2m}}$$

如两机尺寸相差不太悬殊，认为其容积效率及排挤系数近似相等，即$\eta_{Vp}\approx\eta_{Vm}$，$\varepsilon_p\approx\varepsilon_m$。由于两机几何相似，有

$$\frac{b_{2p}}{b_{2m}}=\frac{D_{2p}}{D_{2m}}=\lambda_l$$

又由于在相似工况下，有

$$\frac{c_{r2p}}{c_{2rm}}=\frac{u_{2p}}{u_{2m}}=\frac{D_{2p}n_p}{D_{2m}n_m}$$

其中n_p、n_m为原型机、模型机的转速。

流量比为

$$\frac{Q_p}{Q_m}=\left(\frac{D_{2p}}{D_{2m}}\right)^3\left(\frac{n_p}{n_m}\right)=\lambda_l^3\left(\frac{n_p}{n_m}\right) \tag{14-15}$$

（2）能头关系　由式（13-14）、（13-7）及（14-7），得泵与风机的能头为$H=\eta_H K\frac{u_2c_{u2}}{g}$，式中$\eta_H$为水力效率，$K$为涡流系数。近似认为两机水力效率相等$\eta_{Hp}\approx\eta_{Hm}$，涡流系数相等$K_p\approx K_m$。则原型机与模型机在相似工况下的能头比为

$$\frac{H_p}{H_m}=\frac{\eta_{Hp}K_pu_{2p}c_{u2p}}{\eta_{Hm}K_mu_{2m}c_{u2m}}=\left(\frac{D_{2p}}{D_{2m}}\right)^2\left(\frac{n_p}{n_m}\right)^2=\lambda_l^2\left(\frac{n_p}{n_m}\right)^2 \tag{14-16}$$

风压$p=\gamma H$，γ为流体重度，将上式改换为风压，则

$$\frac{p_p}{p_m}=\frac{\gamma_pH_p}{\gamma_mH_m}=\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\lambda_l^2\left(\frac{n_p}{n_m}\right)^2 \tag{14-17}$$

（3）功率关系　由式（13-3）得泵与风机的轴功率为$N=\frac{N_e}{\eta}=\frac{\gamma QH}{\eta}$。如近似认为两机效率相等$\eta_p\approx\eta_m$，则两机相似工况下的轴功率之比为

$$\frac{N_p}{N_m}=\frac{\gamma_pQ_pH_p}{\gamma_mQ_mH_m}=\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\left(\frac{D_{2p}}{D_{2m}}\right)^5\left(\frac{n_p}{n_m}\right)^3=\left(\frac{\rho_p}{\rho_m}\right)\lambda_l^5\left(\frac{n_p}{n_m}\right)^3 \tag{14-18}$$

以上四式（14-15）（14-16）、（14-17）、（14-18）就是同一系列泵与风机在相似

工况下流量、扬程、风压、轴功率的关系式。这四个公式还可以变换为另一种形式。将四式中同一泵或风机的参数合并在一起，可得

$$\frac{Q_p}{D_{2p}^3 n_p}=\frac{Q_m}{D_{2m}^3 n_m}=\frac{Q}{D_2^3 n}=\lambda_Q \tag{14-19}$$

$$\frac{H_p}{D_{2p}^2 n_p^2}=\frac{H_m}{D_{2m}^2 n_m^2}=\frac{H}{D_2^2 n^2}=\lambda_H \tag{14-20}$$

$$\frac{p_p}{\rho_p D_{2p}^2 n_p^2}=\frac{p_m}{\rho_m D_{2m}^2 n_m^2}=\frac{p}{\rho D_2^2 n^2}=\lambda_p \tag{14-21}$$

$$\frac{N_p}{\rho_p D_{2p}^5 n_p^3}=\frac{N_m}{\rho_m D_{2m}^5 n_m^3}=\frac{N}{\rho D_2^5 n^3}=\lambda_N \tag{14-22}$$

以上四式说明，同一系例泵或风机在相似工况下，比例常数λ_Q、λ_H、λ_p、λ_N相等，这是相似律的另一种表示方法。

三、相似律的应用

（1）转速改变时性能参数的变化

同一台泵或风机，当转速改变时，性能参数随之变化。此时$\lambda_l=1$，相似律简化为

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{n}{n'} \qquad \frac{H}{H'}=\left(\frac{n}{n'}\right)^2$$
$$\frac{p}{p'}=\left(\frac{n}{n'}\right)^2 \qquad \frac{N}{N'}=\left(\frac{n}{n'}\right)^3 \tag{14-23}$$

式（14-23）可写为综合形式

$$\frac{n}{n'}=\frac{Q}{Q'}=\sqrt{\frac{H}{H'}}=\sqrt{\frac{p}{p'}}=\sqrt[3]{\frac{N}{N'}} \tag{14-24}$$

式（14-24）表明，当泵或风机转速改变时，流量、能头（风压）及功率都将随之变化。

（2）流体密度改变时性能参数的变化

同一台泵或风机当输送流体的密度改变时，因$\lambda_l=1$，$\frac{n_p}{n_m}=1$，由相似律得知，流量和能头都不改变，只有风压及功率改变。即

$$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0} \qquad \frac{N}{N_0}=\frac{\rho}{\rho_0} \tag{14-25}$$

式中ρ_0为标准条件下流体的密度。对于一般通风机，我国规定的标准条件为大气压强$p_a=101.325\text{kPa}$，空气温度$t=20℃$，此时空气密度$\rho_0=1.2\text{kg/m}^3$。对于锅炉引风机，标准条件为$p_a=101.325\text{kPa}$，$t=200℃$，此时空气密度$\rho_0=0.745\text{kg/m}^3$。如果实际工作条件与标准条件不同，则风压与功率将发生相应的改变。

（3）同一系列泵或风机性能曲线的换算

已知泵或风机叶轮直径为D_2、转速为n时的性能曲线Ⅰ，可以用相似律换算出同一系列泵或风机叶轮直径为D_2'、转速为n'时的性能曲线Ⅱ。具体换算方法如下，见图14-12。

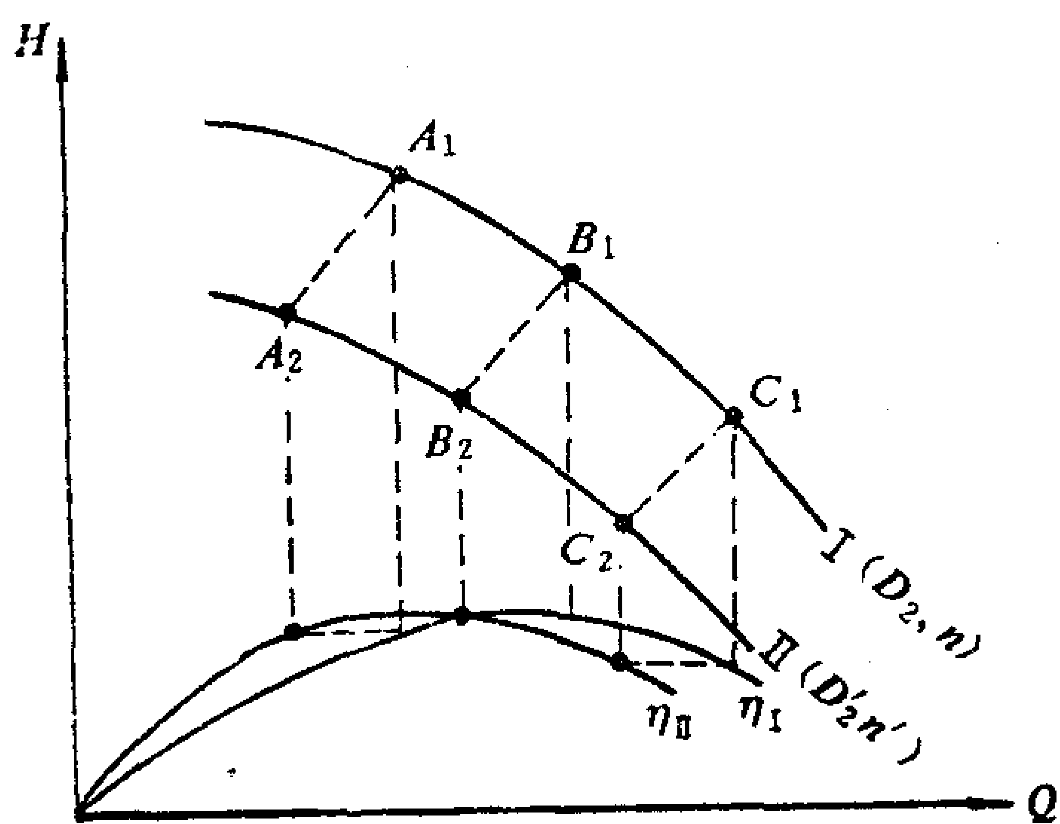


图 14-12 性能曲线换算

在能头曲线Ⅰ上取工况点A_1，查出该工况的流量Q_{A1}和能头H_{A1}。利用相似律式（14-15）及（14-16），求得新条件下（直径D_2'，转速n'）的流量Q_{A2}及能头H_{A2}值。根据此数值，可以在图上标出与A_1对应的相似工况点A_2。用相同的方法，可以由曲线Ⅰ上工况点B_1、C_1，找出与之对应的相似工况点B_2、C_2，等等。最后将A_2、B_2、C_2等工况点用光滑曲线相连，便得到新的性能曲线Ⅱ。

同理，可进行功率曲线的换算。由于相似工况点的效率相等，所以A_1点的效率η_{A1}平移至A_2点，就是A_2点的效率，应用此方法，可以绘出新条件下的效率曲线。

【例 14-1】 有一台锅炉引风机，铭牌上额定流量$Q=12000m^3/h$，额定风压$p=160$ mmH_2O，效率$\eta=75\%$。现将此引风机安装于海拔高程1000m处（该处大气压$p_a=9.2$ mH_2O），输送温度$t=20℃$的空气。求此风机额定工况下的流量、风压及功率。

【解】 引风机的标准条件为：大气压　$p_{a0}=101.325kPa$；空气温度$t_0=200℃$，空气密度$\rho_0=0.745kg/m^3$。

现在工作条件为：大气压$p_a=9.2\times9.807=90.22kPa$；空气温度$t=20℃$。

由完全气体状态方程式$\frac{p}{\rho T}=\frac{p_0}{\rho_0 T_0}$，其中$T$、$T_0$是空气的绝对温度，得空气密度

$$\rho=\rho_0\frac{T_0}{T}\frac{p_a}{p_{a0}}=0.745\times\frac{273+200}{273+20}\times\frac{90.22}{101.325}=1.071kg/m^3$$

空气密度改变，流量不变$Q=Q_0=12000m^3/h$

由相似律$\frac{p}{p_0}=\frac{\rho}{\rho_0}$，

风压$p=p_0\frac{\rho}{\rho_0}=160\times\frac{1.071}{0.745}=230mmH_2O$

功率$N=\frac{pQ}{\eta}=\frac{0.23\times9.807\times12000}{3600\times0.75}=10.02kW$

§ 14-5　风机的无量纲性能曲线

同一系列的风机由于几何相似，它们的性能参数可以根据相似律互相换算，说明它们的性能有共同的特性。因此，我们可以用一套共同的性能曲线代表整个系列大小不同的风机特性。这种同一系列风机共同的性能曲线就是无量纲性能曲线。由于同一系列风机只有一套曲线，从而大大简化了曲线图表。

首先定义三个无量纲性能系数

$$\overline{Q}=\frac{Q}{Fu_2}\text{称为流量系数；}\tag{14-26}$$

$$\overline{p}=\frac{p}{\rho u_2^2}\text{称为全压系数；}\tag{14-27}$$

$$\overline{N}=\frac{N}{\rho F u_2^3}\text{称为功率系数。}\tag{14-28}$$

式中$F=\frac{\pi D_2^2}{4}$是叶轮的面积，$u_2=\frac{\pi D_2 n}{60}$是出口圆周速度。

将F及u_2代入$\overline{Q}$、$\overline{p}$、$\overline{N}$、并参看式（14-19）、（14-21）、（14-22）：

$$\overline{Q}=\frac{Q}{\frac{\pi D_2^2}{4}\ \frac{\pi D_2 n}{60}}=\frac{Q}{D_2^3 n}\ \frac{4\times 60}{\pi^2}\ =\lambda_Q\frac{4\times 60}{\pi^2}$$

$$\overline{p}=\frac{p}{\rho\left(\frac{\pi D_2 n}{60}\right)^2}=\frac{p}{\rho D_2^2 n^2}\ \frac{60}{\pi^2}=\lambda_p\frac{60^2}{\pi^2}$$

$$\overline{N}=\frac{N}{\rho\left(\frac{\pi D_2^2}{4}\right)\left(\frac{\pi D_2 n}{60}\right)^3}=\frac{N}{\rho D_2^5 n^3}\ \frac{4\times 60^3}{\pi^4}\ =\lambda_N\frac{4\times 60^3}{\pi^4}$$

由此可见，$\overline{Q}$、$\overline{p}$、$\overline{N}$与λ_Q、λ_p、λ_N只差常数倍。既然同一系列所有风机在相似工况下，比例常数λ_Q、λ_p、λ_N相等，则同一系列所有风机在相似工况下三个无量纲性能系数$\overline{Q}$、$\overline{p}$、$\overline{N}$也必然相等。因此用$\overline{Q}$、$\overline{p}$、$\overline{N}$做出的性能曲线$\overline{p}=f_1(\overline{Q})$及$\overline{N}=f_2(\overline{Q})$，则是同一系列风机共同的。它们适用于同一系列所有风机。

风机的效率也可用无量纲系数计算

$$\eta=\frac{\overline{Q}\ \overline{p}}{\overline{N}}=\frac{Qp}{N}\qquad(14\text{-}29)$$

制作无量纲性能曲线时，需要用试验方法测一台风机在一定转速下，不同工况的Q、p、N，然后按式（14-26）、（14-27）、（14-28）、（14-29）计算不同工况的$\overline{Q}$、$\overline{p}$、$\overline{N}$及η，就可以绘出无量纲性能曲线。

因为无量纲性能系数除去了转速、叶轮直径、密度等数值，它们并不能直接做为风机的实际性能参数。风机实际的性能参数，需要按风机的转速及叶轮直径计算F及u_2，按下式进行计算：

$$Q=F_2u_2\overline{Q};$$
$$p=\rho u_2^2\overline{p};$$
$$N=\rho F u_2^3\overline{N}。$$

【例 14-2】 已知4-72-11型风机叶轮直径$D_2=600\text{mm}$，转速$n=1250\text{r/min}$，在额定工况下 $Q=8300\text{m}^3/\text{h}$，$p=79\text{mmH}_2\text{O}$，$N=2\text{kW}$。试求该系列风机在额定工况的无量纲性能系数。

【解】 叶轮面积$F=\dfrac{\pi D_2^2}{4}=\dfrac{\pi(0.6)^2}{4}=0.282\text{m}^2$

出口圆周速度$u_2=\dfrac{\pi D_2 n}{60}=\dfrac{\pi\times 0.6\times 1250}{60}=39.27\text{m/s}$

密度$\rho=1.2\text{kg/m}^3$

流量系数$\overline{Q}=\dfrac{Q}{Fu_2}=\dfrac{8300}{3600\times 0.283\times 39.27}=0.208$

全压系数$\overline{p}=\dfrac{p}{\rho u_2^2}=\dfrac{0.079\times 9807}{1.2\times 39.27^2}=0.419$

功率系数$\overline{N}=\dfrac{N}{\rho F u_2^3}=\dfrac{2000}{1.2\times 0.283\times 39.27^2}=0.097$

【例 14-3】 利用上题的无量纲系数，求同一系列风机叶轮$D_2=800\text{mm}$，转速$n=1800\text{r/min}$，在额定工况的性能参数。

【解】 此风机的叶轮面积

$$F_2=\frac{\pi D_2^2}{4}=\frac{\pi(0.8)^2}{4}=0.503\text{m}^2$$

出口圆周速度$u_2=\frac{\pi D_2 n}{60}=\frac{\pi\times0.8\times1800}{60}=75.40\text{m/s}$

该机额定工况的性能参数为

$$Q=\overline{Q}Fu_2=0.208\times0.503\times75.40=7.88\text{m}^3/\text{s}=28382\text{m}^3/\text{h}$$

$$p=\overline{p}\rho u_2=0.419\times1.2\times75.40^2=2858\text{Pa}=292\text{mmH}_2\text{O}$$

$$N=\overline{N}\rho Fu_2^3=0.097\times1.2\times0.503\times75.40^3=25\text{kW}$$

§ 14-6 泵与风机的比转数

以上我们用一套无量纲性能曲线，代表整个系列风机的性能。现在我们进一步用一个“特征数”代表整个系列泵或风机的综合性能，这个反映泵或风机的综合性能的特征数，就是比转数。利用比转数还可以比较不同系列泵或风机的性能特点。

一、定义

对于泵或风机，我们最关心的是最佳工况（效率最高）时的流量与能头，选用该工况的比例常数λ_Q与λ_H做如下运算，目的是消去其中的叶轮直径D_2，使其与机器的具体尺寸无关。

$$\frac{\lambda_Q^{1/2}}{\lambda_H^{3/4}}=\frac{\left(\frac{Q}{D_2^3n}\right)^{1/2}}{\left(\frac{H}{D_2^2n^2}\right)^{3/4}}=\frac{nQ^{1/2}}{H^{3/4}}$$

定义 $n_s=\frac{nQ^{1/2}}{H^{3/4}}$称为比转数。 (14-30)

由于同一系列的泵或风机在最佳工况下，λ_Q和λ_H的数値相等，经过代数运算的n_s值也必定相等。因此，同一系列的泵或风机有相同的比转数，不同系列的泵或风机具有不同的比转数。可见，比转数是代表一个系列泵或风机的“特征数”。又由于比转数中包含了最重要的三个性能参数（流量、能头、转速），所以说比转数是反映一个系列泵或风机的综合性能的特征数。

从理论上说，比转数是相似准数，应该没有单位。但是由于在λ_H中消去了重力加速度g，而g是有单位的，因此比转数也是有单位的。它的数值与所取单位有关。由于比转数只是用来比较泵与风机性能的一个共同标准，本身的单位没有多大用处，一般均略去不写。

我国规定水泵的比转数按下式计算

$$n_s=3.65\frac{nQ^{1/2}}{H^{3/4}} \tag{14-31}$$

式中转速n的单位为r/min，流量Q的单位为m³/s，扬程H的单位为m，3.65是换算系数❶。

❶ 历史上水泵的比转数是按最佳工况时$H_m=1$m，$Q_m=0.075\text{m}^3/\text{s}$模型泵的转速定义的，即

$$n_s=n_m=\frac{1^{3/4}}{(0.075)^{1/2}}\frac{nQ^{1/2}}{H^{3/4}}=3.65\frac{nQ^{1/2}}{H^{3/4}}$$

风机的比转数按下式计算

$$n_s=\frac{nQ^{1/2}}{p_0{}^{3/4}} \tag{14-32}$$

式中转速 n 的单位为r/min，流量Q的单位为m^3/s，p_0是输送空气密度$\rho_0=1.2kg/m^3$时的风压，单位取为mmH_2O❶。

国际上各个国家计算比转数时，由于使用单位不同，其相应的n_s值就不同。日本在JIS标准中，水泵的比转数采用 n（r/min）、Q（m^3/min）、H（m）的单位计算。美国水泵的比转数常用单位是n（r/min）、Q（gal/min）、H（ft）。

由于比转数是以一个单吸、单级的叶轮为标准进行计算的。如果是双吸式，流量应该用泵或风机流量的一半计算。如果是多级的，能头应用$\frac{H}{n}$计算，其中 n 为机器的级数。

二、比转数的意义

比转数不是泵与风机的实际转数，而是由相似律导出的、综合反映泵或风机性能的特征数，下面我们从三方面说明它的意义。

（1）比转数反映泵与风机的性能特点。

由于比转数n_s与$Q^{1/2}$成正比，与$H^{3/4}$成反比。因此当转速一定时，比转数越大，表明其流量大而能头小。反之，比转数较小，表明其流量小而能头大。

（2）比转数反映叶轮的形状特点。

因为比转数大的机器，流量大而能头小，故叶轮进口直径D_0与出口宽度b_2较大，而叶轮直径D_2较小，因此叶轮的形状是厚而小。反之，比转数小的机器，流量小而能头大，叶轮的D_0与b_2较小，D_2较大，故叶轮的形状相对地薄而大。

当比转数由小增大时，叶轮的D_2/D_0不断缩小，b_2/D_2则不断增大。当b_2/D_2增大时，流体经过叶轮前后两侧的路程相差很大，流体在叶轮中获得的能量就不均匀，于是引起二次回流，使流动损失增大。为了使能量分布均匀，当n_s达到某一数值时，须将叶轮出口做成倾斜的，这样流体流出的方向就不是离心的，而是斜向的，机器就从离心式过渡到混流式。当n_s再增大，叶轮愈倾斜，就变为轴流式，流体轴向流入轴向流出，如图14-13所示。

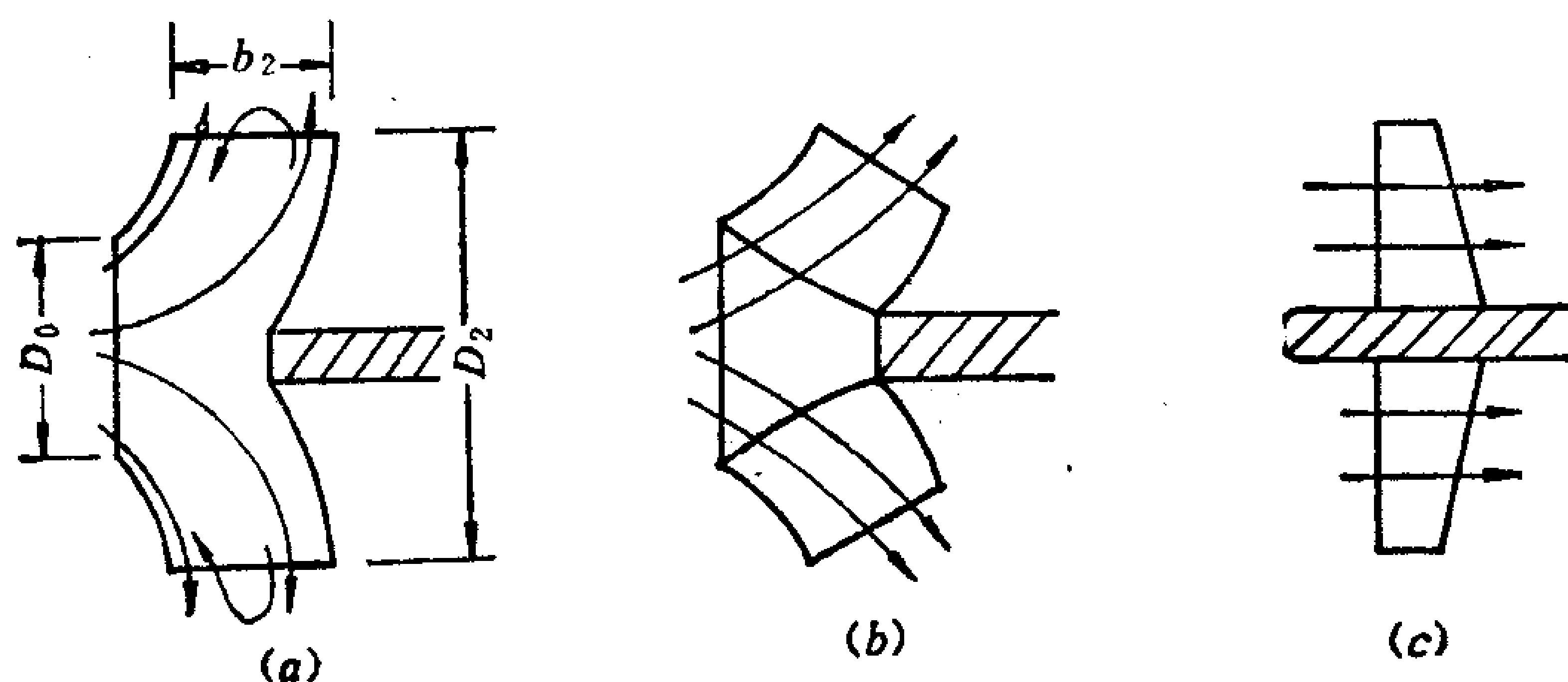


图 14-13 比转数与叶轮流向

(a)离心式；(b)混流式；(c)轴流式

（3）比转数反映泵与风机性能曲线的特点

低比转数的泵或风机为了取得较大的能头，出口安装角β_2较大。反之，高比转数的泵或风机，则出口安装角β_2较小。

❶ 风压p_0的单位如取为Pa，则比转数的数值将小5.54倍($9.807^{3/4}$)。

取两个其他条件相同，仅出口安装角β_2不同的叶轮，当通过的流量增大相同的ΔQ，它们的出口速度图的变化如图14-14所示。

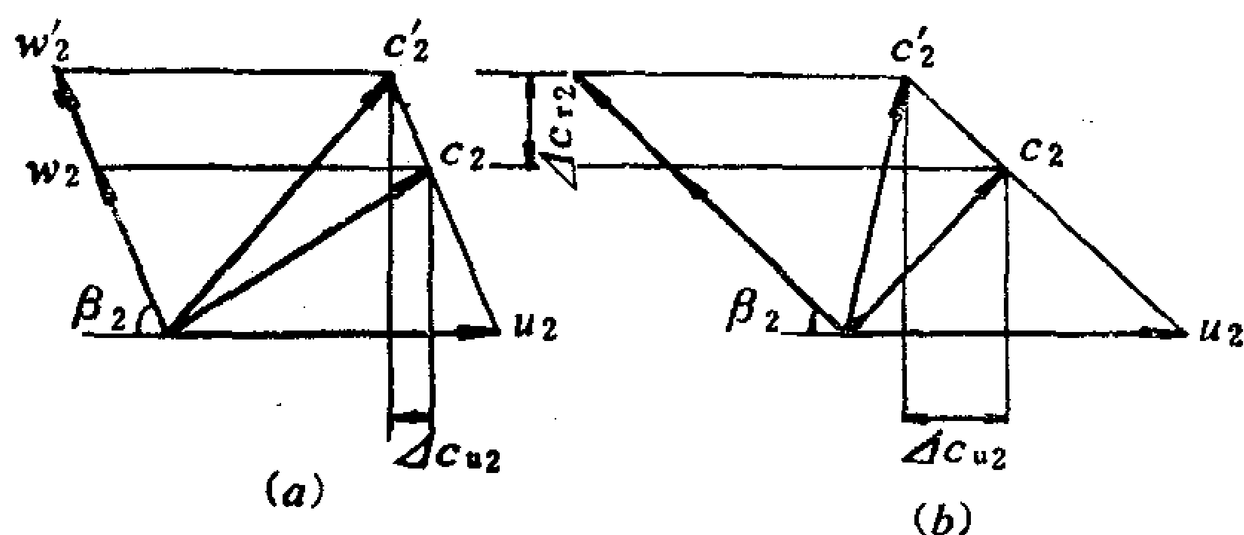


图 14-14　比转数对性能曲线的影响

(a)低比转数；(b)高比转数

显然，n_s较小β_2较大的叶轮，其Δc_{u2}较小，因而能头的减小值ΔH较小，(因 $H_{T\infty}=\frac{u_2c_{u2}}{g}$)。这说明随着流量增加，$n_s$较小的泵或风机，能头下降比较缓慢，也就是$Q$-$H$曲线比较平坦。因能头下降缓慢，它的功率曲线$Q$-$N$曲线上升很快。

反之，n_s较大的叶轮，Q-H曲线较陡，能头下降较快。Q-N曲线上升较缓。比转数越大，上升越缓。当比转数大到一定数值后（轴流式泵或风机），功率曲线不但不随流量加大而上升，甚至随流量加大而下降。

泵的类型	离心泵			混流泵	轴流泵
	低比转数	中比转数	高比转数		
比转数	30～80	80～150	150～300	300～500	500～1000
叶轮形状	D_0 D_2	D_0 D_2	D_0 D_2	D_0 D_2	D_0 D_2
D_2/D_0	≈3	≈2.3	≈1.8～1.4	≈1.2～1.1	≈1
叶片形状	圆柱形	入口处扭曲 出口处圆柱形	扭曲	扭曲	机翼型
性能曲线大致的形状	H N η	H N η	H N η	H N η	H N η

图 14-15　水泵按比转数分类

根据以上分析可以看出，比转数的大小反映了泵或风机的性能特点、叶轮的形状结构及性能曲线的形状，因而泵与风机可以按比转数进行分类。图14-15就是水泵按比转数分类。

§ 14-7　水泵的气蚀性能

一、气蚀现象

由物理学得知，水在一个大气压下，温度达到100℃时，就开始汽化，在高山上由于

气压较低，水在不到100℃时，就开始汽化。如果水的温度不变，压强降低到某一数值，水同样发生汽化，这个压强称为水在该温度下的汽化压强。例如，水温20℃，汽化压强为2.4kPa。

水泵运转时，进口处的压强低于大气压，如降至汽化压强，部分液体开始汽化变为蒸汽，同时原来溶解在水中的某些气体也会逸出，形成许多气泡。这些气泡随同水流从低压区流向高压区，气泡在高压作用下，迅速破裂。在气泡破灭的瞬时，高压水以极高的速度冲向气泡占有的空间，形成巨大的冲击力，且冲击频率很高。此冲击力作用在叶轮表面，表面则被剥蚀，形成蜂窝状或海绵状。此外，由于液体中逸出的氧气等活泼气体，借助气泡凝结时放出的热量，也对金属起化学腐蚀作用。这种在汽化压强下，气泡的形成、发展和破灭，以致材料受到破坏的过程，称为**气蚀现象**。

当气泡不太多，气蚀不严重时，对泵的运行和性能还不致产生明显影响。如气蚀持续发展，气泡大量产生，就会影响液体正常流动，噪声和振动剧增，甚至造成断流。这时泵的扬程、流量和效率都显著下降，最后必将缩短泵的寿命。因此，泵在运行中必须严格防止气蚀的发生。

二、泵的吸上真空高度

水泵运行中压强最低点发生在叶片进口处的背面，如图14-16中的K点附近。当泵内K点压强降至汽化压强，泵内开始发生气蚀。但是K点压强难以测量和控制，我们经常是在泵的进口1-1断面安装真空表，用1-1断面的真空值来控制气蚀的发生。1-1断面的真空高度$H_s=\frac{p_a-p_0}{\gamma}$称为吸上真空高度。

泵内K点发生气蚀时的吸上真空高度，是极限吸上真空高度H_{smax}，是由泵的制造工厂用实验方法确定的。为避免发生气蚀，允许吸上真空高度$[H_s]$留有一定安全值。即

$$[H_s]=H_{smax}-0.3$$

允许吸上真空高度$[H_s]$是水泵抗气蚀性能的指标。$[H_s]$愈大，泵的抗气蚀性能愈好。它随泵的流量而变化，在泵的性能曲线中有一条Q-$[H_s]$曲线。

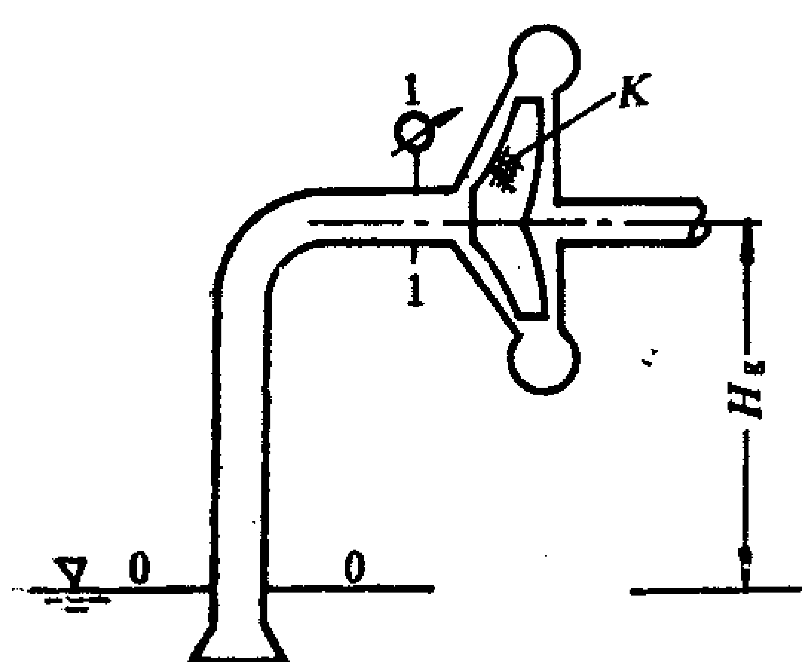


图 14-16 卧式离心泵的安装高度

泵在实际运行中1-1断面的真空值与泵的安装高度有关。卧式离心泵的安装高度H_g是泵的轴线至吸液面的高度，见图14-16。通常希望这个高度越高越好，因为机组安装得较高，可以减少土建工程量，平时便于管理。但是H_g愈高，1-1断面真空高度愈大，当达到允许吸上真空高度时，便是不发生气蚀的极限。因此泵的安装高度受允许吸上真空高度的限制。

对吸水池水面0-0断面和泵的吸入口1-1断面列伯诺里方程，基准面取在0-0断面（见图14-16）

$$\frac{p_0}{\gamma}=H_g+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}+h_w$$

式中h_w为吸水管的水头损失。则有

$$\frac{p_0 - p_1}{\gamma} = H_g + \frac{v_1^2}{2g} + h_w \quad (14\text{-}33)$$

如果吸水池水面压强为大气压，则式（14-33）的左侧恰好是吸上真空高度。为了确保泵不发生气蚀，泵的允许安装高度为：

$$[H_g] = [H_s] - \frac{v_1^2}{2g} - h_w \quad (14\text{-}34)$$

需要说明以下几点。

（1）由于流量增加时，1-1断面到K点的流动能量损失增加，使K点压强降低。故$[H_s]$值随流量增加而减小。因此，用式（14-34）确定安装高度时，应以泵运行中可能的最大流量及相应的$[H_s]$值为准。

（2）为了提高泵的安装高度，应尽量减小$\frac{v_1^2}{2g}$和h_w。为此，可以选用直径稍大的吸水管，使吸水管尽可能短，并尽量减少弯头等增加局部损失的管件。因此，水泵调节流量的阀门一定装在压水管上，而不要装在吸水管上。

（3）允许吸上真空高度$[H_s]$是制造厂在大气压为101.325kPa和温度为20℃清水条件下，实验得到的。当泵的使用条件与上述情况不符时，$[H_s]$值应进行修正。

$$[H_s]' = [H_s] - (10.33 - h_A) + (0.24 - h_v) \quad (14\text{-}35)$$

式中 h_A——当地大气压（mH_2O），见表14-1；

h_v——与水温相应的汽化压强（mH_2O），见表14-2。

不同海拔高度的大气压 **表 14-1**

海拔高度(m)	0	200	400	600	800	1000	1500	2000	3000	4000	5000
大气压(mH_2O)	10.33	10.1	9.8	9.6	9.4	9.2	8.6	8.1	7.2	6.3	5.5

不同水温的汽化压强 **表 14-2**

水温(℃)	5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
汽化压强(mH_2O)	0.07	0.12	0.24	0.43	0.75	1.25	2.02	3.17	4.82	7.14	10.33

三、泵的气蚀余量

如前所述，泵内压强最低点发生在叶轮叶片进口的背面K点附近。这是因为液体进入水泵尚未增压之前，由于流速增大及流动的能量损失，使压强继续降低。当K点压强降至该处温度对应的汽化压强p_v时，就发生气蚀。

将水泵吸入口1-1断面的能量与汽化压强之差，定义为气蚀余量，即

$$\Delta h = \left(\frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g}\right) - \frac{p_v}{\gamma} \quad (14\text{-}36)$$

Δh表示K点达到汽化压强时，泵的吸入口具有的能量余量。

气蚀余量Δh决定于泵的吸入室与叶轮进口的几何形状和流速，由泵的结构决定。Δh的数值无法精确计算，通常由制造厂通过实验确定。开始发生气蚀的气蚀余量称为临界气

蚀余量Δh_{min}。为确保安全运行，需留有一定安全值，规定必须气蚀余量$[\Delta h]$为

$$[\Delta h]=\Delta h_{min}+0.3\text{m}$$

与允许吸上真空高度$[H_s]$相同，必须气蚀余量$[\Delta h]$也是水泵抗气蚀性能的指标。$[\Delta h]$愈小，抗气蚀性能愈好。对于同一台水泵，$[\Delta h]$随流量而变化，在泵的性能曲线中绘有$Q-[\Delta h]$曲线。当流量增大时，$[\Delta h]$将急剧上升。

泵的安装高度H_g，也可以用气蚀余量确定。由式（14-33）得

$$H_g=\frac{p_0}{\gamma}-\frac{p_1}{\gamma}-\frac{v_1^2}{2g}-h_w \tag{14-37}$$

根据气蚀余量的定义，有

$$\frac{p_1}{\gamma}+\frac{v_1^2}{2g}=\Delta h+\frac{p_v}{\gamma}$$

代入式（14-37），并考虑防止发生气蚀，采用必须气蚀余量，则泵的允许安装高度为

$$[H_g]=\frac{p_0-p_v}{\gamma}-[\Delta h]-h_w \tag{14-38}$$

式中 p_0——吸液池液面压强；

p_v——汽化压强；

h_w——吸水管的水头损失。

必须气蚀余量$[\Delta h]$和允许吸上真空高度$[H_s]$都是水泵抗气蚀的性能参数。有的制造厂给出$[H_s]$，有的给出$[\Delta h]$，可以分别用式（14-34）及式（14-38）确定泵的安装高度。不同的是，$[H_s]$值是在标准大气压及20℃水温下的数值，如果泵的使用条件与此不符，需进行修正。应用$[\Delta h]$则不需修正，只要把使用条件的p_0及p_v直接代入公式计算即可。

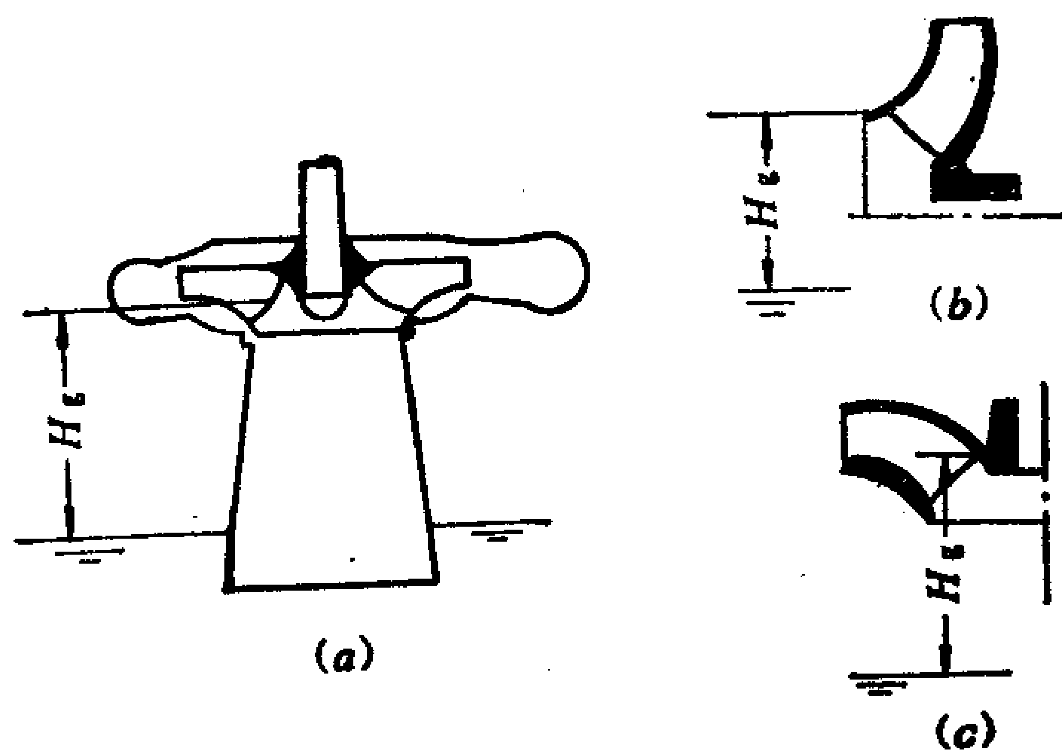


图 14-17 立式离心泵及大型泵的安装高度
（a）立式离心泵；（b）大型卧式泵；（c）大型立式泵

以上水泵的安装高度，系对中小型卧式离心泵而言，如图14-16。立式离心泵的安装高度是指第一级叶轮进口处的中心线至吸水池液面的垂直距离，见图14-17(a)。对于大型泵，则应按叶轮入口边最高点至吸水池液面的高度计算，见图14-17(b)(c)。

【例 14-4】 有一台离心泵，安装在海拔高程800m的地区，当地夏季水温40℃。已知泵的流量$Q=120\text{L/s}$，吸入口直径$d=300\text{mm}$，吸水管水头损失$h_w=0.75\text{m}$，允许吸上真空高度$[H_s]=6.2\text{m}$，为了不发生气蚀，问水泵的安装高度不得超过多少？

【解】 由表14-1查得当地大气压强$h_A=9.4\text{m}$。由表14-2查得40℃水的汽化压强$h_v=0.75\text{m}$。

由式（14-35）

$$[H_s]'=[H_s]-(10.33-h_A)+(0.24-h_v)$$
$$=6.2-(10.33-9.4)+(0.24-0.75)=4.76\text{m}$$

$$v_1=\frac{4Q}{\pi d^2}=\frac{4\times0.120}{\pi\times(0.3)^2}=1.7\text{m/s}$$

最大安装高度

$$H_g]=[H_s]'-\frac{v_1^2}{2g}-h_w=4.76-\frac{1.7^2}{2\times9.807}-0.75$$

$$=3.86\text{m}$$

【例 14-5】 如水泵性能曲线给出必须气蚀余量$[\varDelta h]=4.04$m，其它条件与上题相同，试求泵的最大安装高度。

【解】

$$[H_g]=\frac{p_0-p_v}{\gamma}-[\varDelta h]-h_w$$

其中

$$\frac{p_0}{\gamma}=h_A=9.4\text{m}$$

$$\frac{p_v}{\gamma}=h_v=0.75\text{m}$$

代入上式

$$[H_g]=9.4-0.75-4.04-0.75=3.86\text{m}$$

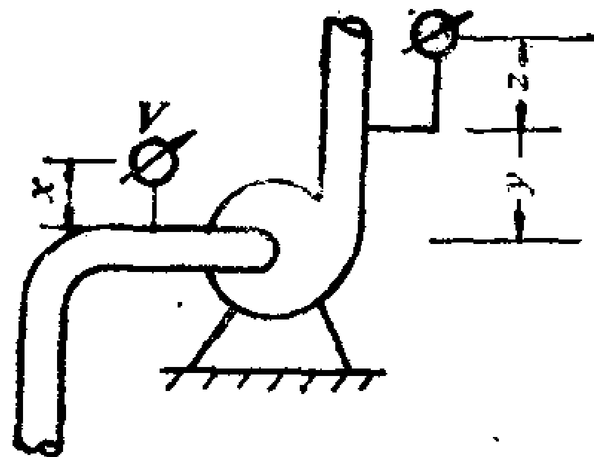
习　题

14-1　已知离心泵叶轮外径$D_2=280$mm，出口有效宽度$b_2=40$mm，出口安装角$\beta_2=30°$，转速$n=1450$r/min，试绘制该泵的理论性能曲线Q_T-H_T及Q_T-N_T。

14-2　试绘制13-4题中离心式风机的理论性能曲线Q_T-p_T及Q_T-N_T。

14-3　有离心式通风机，全压$p=250$mmH_2O，风量$Q=10000\text{m}^3/\text{h}$,已知水力效率$\eta_H=0.95$，容积效率$\eta_v=0.93$，机械损失功率$\varDelta N_m=0.5$kW。试求该风机的有效功率、轴功率及机械效率。

14-4　水泵装置如图。已知水泵出口处压力表读值$M=196.14$kPa，水泵入口处真空表读值$V=210$mmHg，吸水管与压水管直径相同，并测得$x=10$cm，$y=35$cm，$z=15$cm，流量$Q=80$L/s，轴功率$N=20.5$kW。试求水泵的扬程H及泵的效率η。



题 14-4图

14-5　通风机的铭牌参数为$n=1250$r/min，$Q=8300\text{m}^3/\text{h}$，$p=79mmH_2O$，$N=2$kW，$\eta=89\%$。现将此风机装在海拔3000m的地区使用，当地夏季气温40°C，转速不变，试求该机在最高效率点的运行参数Q'、p'、N'及比转数n_s。

14-6　某系列No.4风机（$D_2=0.4$m）在最佳工况下$Q=2882\text{m}^3/\text{h}$，全压$p=47.2mmH_2O$，$n=1450$r/min，现若改用该系列No.6风机，问当$n=1250$r/min时，最佳工况的性能参数$Q'$、$p'$是多少？比转数$n_s=$？

14-7　某离心泵原用电机皮带拖动，转速$n=1400$r/min，最高效率$\eta_{max}=0.75$时，流量$Q=72$L/s，扬程$H=15.5$m。今改为电机直联，转速增大为1450r/min，试求最高效率时的流量及扬程；如电机功率为17kW，问转速提高后功率是否够？

14-8　根据附录F，4-72-11型通风机的无量纲性能曲线绘出No.10风机在$n=1800$r/min的性能曲线Q-p、Q-N、Q-η。

14-9 写出上题中该风机的铭牌参数，并计算该机的比转数n_s值。

14-10 写出附录D中两种离心泵的铭牌参数，并计算其比转数。其中BA型为单级单吸泵，SA型为单级双吸泵。

14-11 有一台美国离心泵，已知$n_s=1800$，又一台日本离心泵$n_s=230$，分别相当于我国比转数是多少？

14-12 12SA-10型离心泵（附录D），安装在海拔高程1000m处，输送20°C清水，流量$Q=240$L/s，吸水管直径$d=380$mm，水头损失$h_w=7\cdot\frac{v^2}{2g}$。试计算泵的最大安装高度。

14-13 上题中水泵如采取安装高度为3m，今该泵改为输送50°C热水，问能否正常运行？

14-14 有一冷凝水泵，工厂提供的必须气蚀余量$[\Delta h]=2.4$m，输送水温80°C，冷凝水箱内液面压强即汽化压强，吸水管水头损失$h_w=0.6mH_2O$。试求水泵的安装高度。

14-15 试分析为什么必须气蚀余量$[\Delta h]$随Q增大而增大，而允许吸上真空高度$[H_s]$随Q增大而减小？

第十五章　泵与风机的运行与调节

§15-1　管路性能曲线与工况点

泵与风机是装置在管路系统中，与管路共同工作的。因此泵与风机运行时的流量与能头，不仅取决于泵与风机本身的性能，而且与管路性能有关。

一、管路性能曲线

管路性能曲线是管路中通过的流量与所需能头之间的关系曲线。管路及泵的装置见图15-1，对吸入容器液面1-1及压出容器液面2-2列伯诺里方程式

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+H=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+h_w$$

则
$$H=\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)-\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)+h_w=H_{st}+h_w$$

式中　H——管路所需能头；

$H_{st}=\left(z_2+\frac{p_2}{\gamma}\right)-\left(z_1+\frac{p_1}{\gamma}\right)$，称为静能头；

h_w——吸水管及压水管的水头损失。

管路所需能头由两部分组成。一部分是静能头H_{st}，即压出容器测压管水头与吸入容器测压管水头之差，静能头与流量无关。另一部分是水头损失h_w，由第八章得知$h_w=SQ^2$，其中S是管路阻抗。对管路布置已定，且流动处于阻力平方区，S是常数。

管路所需能头与流量的关系，用公式表示为

$$H=H_{st}+SQ^2 \tag{15-1}$$

将式（15-1）用曲线表示，就是管路性能曲线。管路性能曲线是二次抛物线，当$Q=0$时，$H=H_{st}$。见图15-2。

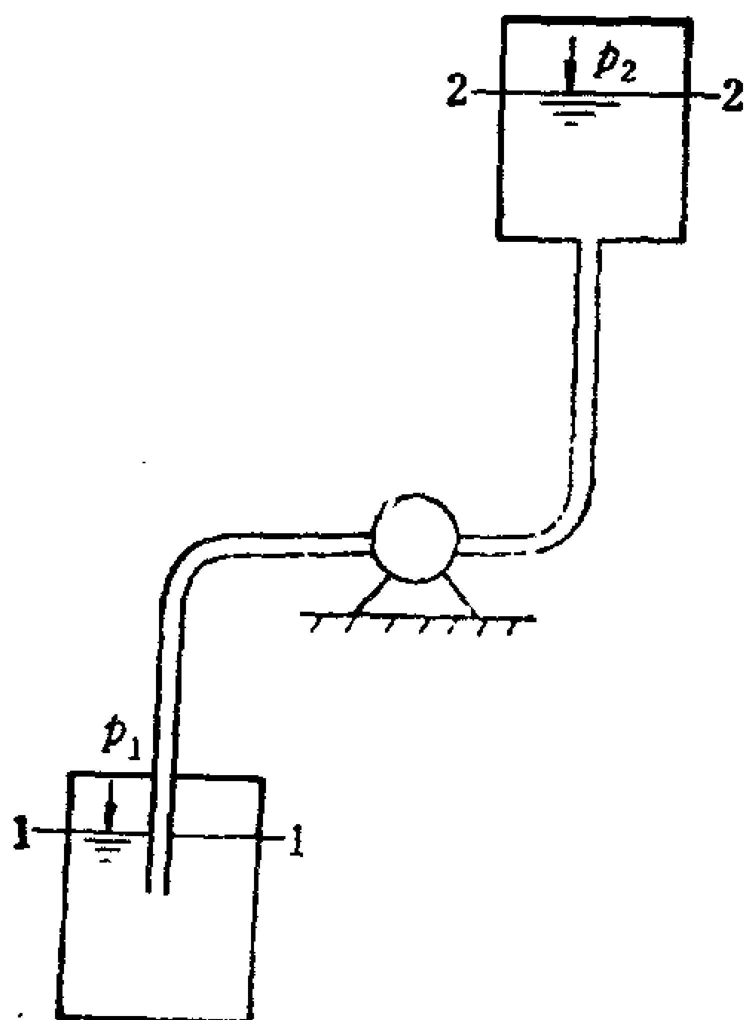


图 15-1　泵与管路装置



图 15-2　管路性能曲线

如果水泵的吸入容器液面压强及压出容器液面压强皆为大气压，$p_1=p_2=p_a$，则$H_{st}=z_2-z_1$，静能头等于几何高差。

对于风机，因气体重度很小，气柱重量可以忽略不计，则$H_{st}=\frac{p_2-p_1}{\gamma}$。静能头为压气容器与吸气容器的压头差。如风机从大气中吸气，放气到大气之中，即$p_2=p_1=p_a$，则$H_{st}=0$。管路性能曲线从原点开始。

二、泵与风机的工况点

将泵与风机的性能曲线与管路性能曲线用相同的比尺绘在一张图上。两条曲线的交点A就是泵与风机的工况点。A点的流量Q_A，表明泵或风机的流量与管路的流量相等。A点的能头表明泵或风机提供的能头，等于管路所需要的能头，见图15-3。

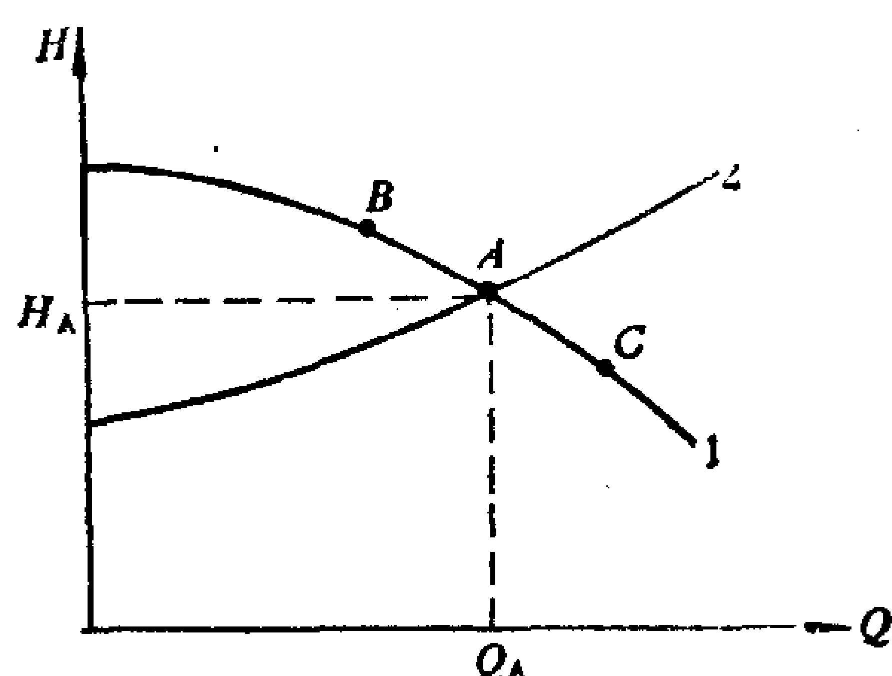


图 15-3 泵（风机）的工况点

1—泵（风机）性能曲线；2—管路性能曲线

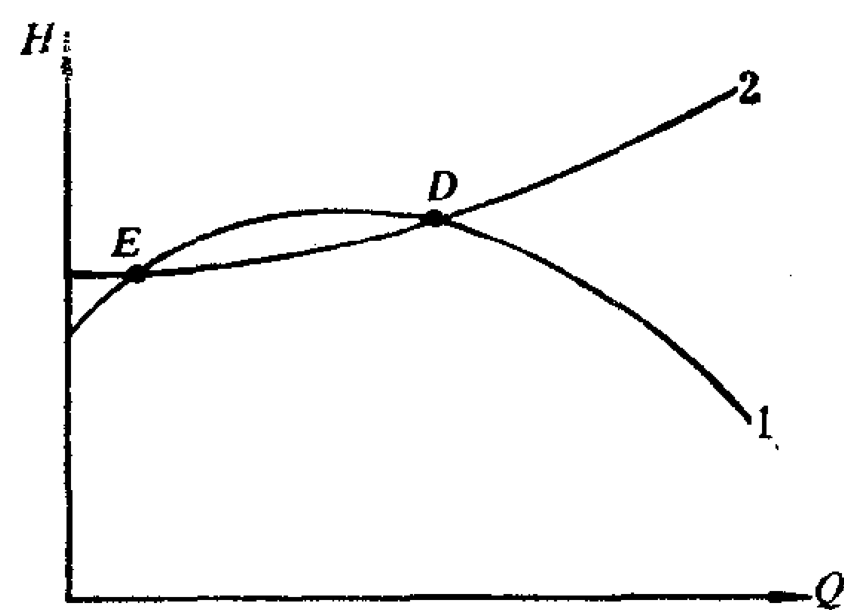


图 15-4 泵（风机）的不稳定工况

1—泵（风机）性能曲线；2—管路性能曲线

大多数泵或风机的Q-H性能曲线是平缓下降的曲线，这种情况下运行工况是稳定的。如泵或风机的流量Q_B小于管路的流量Q_A时，机器的能头H_B大于管路的能头H_A。多余的能量将使流体加速，流量加大，工况点将自动由B移向A。反之，如机器在C点工作，流量大于管路流量，机器的能头小于管路需要的能头，则流体减速，流量减小，工况点将自动由C移向A。可见A点是稳定工况点。

有些低比转数泵或风机的Q-H性能曲线呈驼峰形，如图15-4。这样的机器性能曲线有可能与管路性能曲线有两个交点D和E。D点在机器性能曲线的下降段，如上所述是稳定工况。而E点是不稳定工况点。

当机器稍有干扰（如电压波动），流量向E点增大方向偏离时，机器的能头大于管道所需要的能头，管路中流速加大，流量增加，工况点继续向流量增大方向移动，直至D点为止。当机器向流量减小方向偏离时，工况点就继续向流量减小方向移动，直至流量等于零为止。因此机器一遇干扰，工况点就向右或向左移动，再也不能回到原来位置E点。故E点称为不稳定工况点。

泵或风机具有驼峰形性能曲线是产生不稳定运行的原因。对于这一类泵或风机应使工况点保持在Q-H曲线的下降段，以保证运行的稳定性。

§ 15-2 泵或风机的联合运行

两台或两台以上的泵或风机在同一管路系统中工作，称为联合运行。联合运行分为并

联和串联两种情况。目的在于增加流量或增加能头。下面分别进行讨论。

一、泵或风机的并联工作

多台水泵在同一吸水池吸水，向同一压水管路供水，称为并联，如图15-5(*a*)。图15-5(*b*)是两台风机的并联情况。

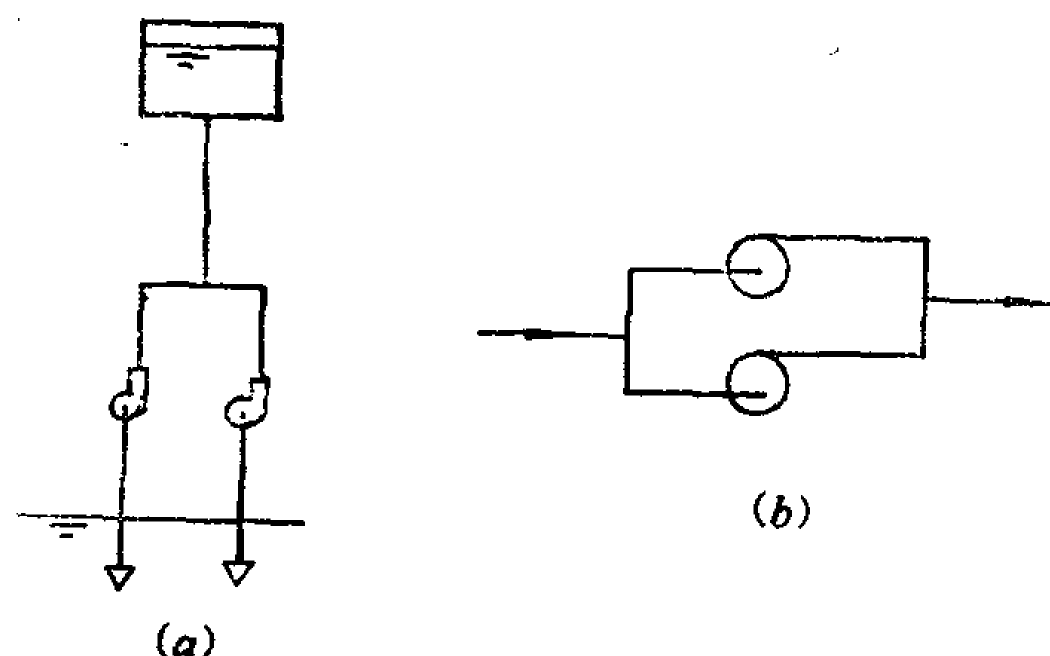


图 15-5 并联运行
(*a*)两台泵的并联；(*b*)两台风机的并联

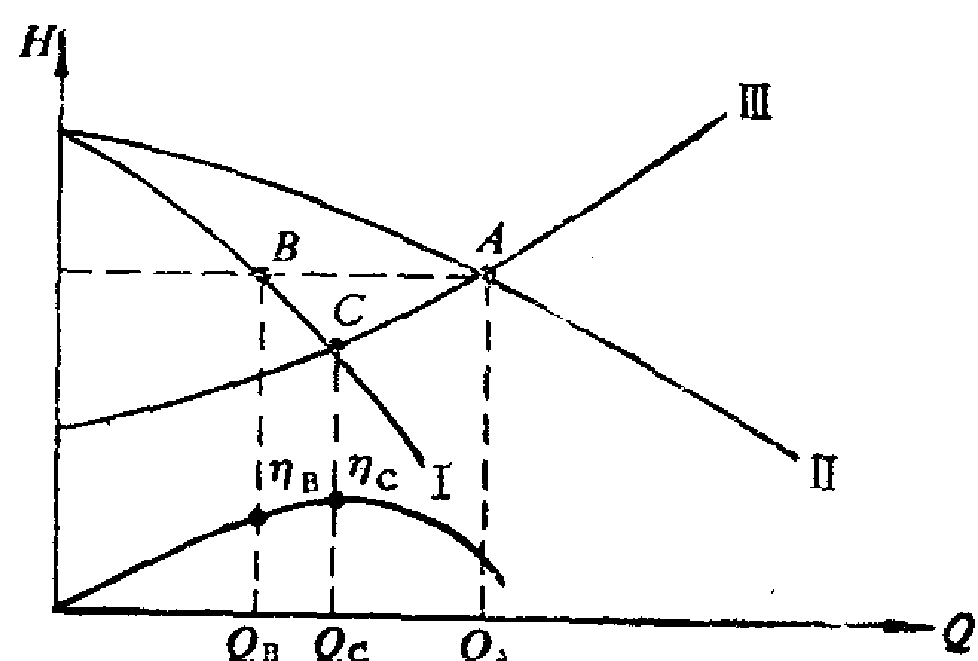


图 15-6 并联运行的工况分析

并联工作的特点是各台机器的能头相同，而总流量等于各台机器流量之和。并联一般应用于以下情况：1）当用户需要流量大，而大流量的泵或风机制造困难或造价太高时；2）流量需求变化幅度较大，通过停开机器台数以调节流量时；3）当有一台机器损坏，仍需保证供水（气），做为检修及事故备用时。

（1）两台相同的泵或风机的并联

已知一台泵或风机的性能曲线Ⅰ，在相同的能头下使流量加倍，便得到并联机组的性能曲线Ⅱ。与管路性能曲线Ⅲ交于A点。A点就是并联机组的工况点。Q_A是并联后的流量，H_A是并联后的能头，见图15-6。

过A点作水平线与单机的性能曲线交于B点，B点是并联机组中一台机器的工况点。能头$H_B=H_A$，流量$Q_B=\frac{1}{2}Q_A$。B点对应效率曲线上的η_B，就是并联工作时机器的效率。

管路性能曲线与单机性能曲线的交点C，是只开一台机器时的工况点。C点对应的流量Q_C是只开一台机器时的流量。而$Q_C>Q_B$，可见只开一台机器时流量大于并联机组中一台机器的流量。这是因为并联后，管路内总流量加大，水头损失增加，所需能头加大，而泵与风机的性能是能头加大流量减小，所以并联后单台机器的流量减小了。

管路中总流量$Q_A>Q_C$，并联后总流量比并联前增加了。增加的流量$\Delta Q=Q_A-Q_C<Q_C$，增加的流量小于系统中一台机器时的流量。也就是说，流量没有增加一倍。

并联机组增加的流量ΔQ与管路性能曲线形状有关。管路性能曲线越平坦（即阻抗S越小），并联增加的流量越大。因此管路性能曲线很陡时，不宜于采用并联工作。

并联机组增加的流量ΔQ还与泵与风机的性能曲线有关。泵与风机性能曲线越陡（即比转数较大），并联增加的流量越大，因而越适于并联工作。

（2）多台相同泵或风机的并联

多台相同机器并联工作时，工况分析如图15-7。Ⅰ是单机的性能曲线，Ⅱ是两台机器

并联时的性能曲线，Ⅲ是三台机器并联时的性能曲线，Ⅳ是管路性能曲线。A、B、C分别是单机、两台并联及三台并联时的工况点。由图可见，随着并联台数增多，每并联上一台机器所增加的流量愈小，因而效果愈差。

（3）不同性能的泵或风机的并联

图15-8为两台不同性能机器并联工作时的工况分析。图中曲线Ⅰ、Ⅱ分别是两台机器的性能曲线，Ⅰ+Ⅱ是并联机组的性能曲线。Ⅲ是管路性能曲线。并联机组性能曲线的画法是在相同能头下，将$Q_Ⅰ$与$Q_Ⅱ$相加而得。管路性能曲线与并联机组性能曲线交于A点，A点是并联工作的工况点，其流量为Q_A，能头为H_A。

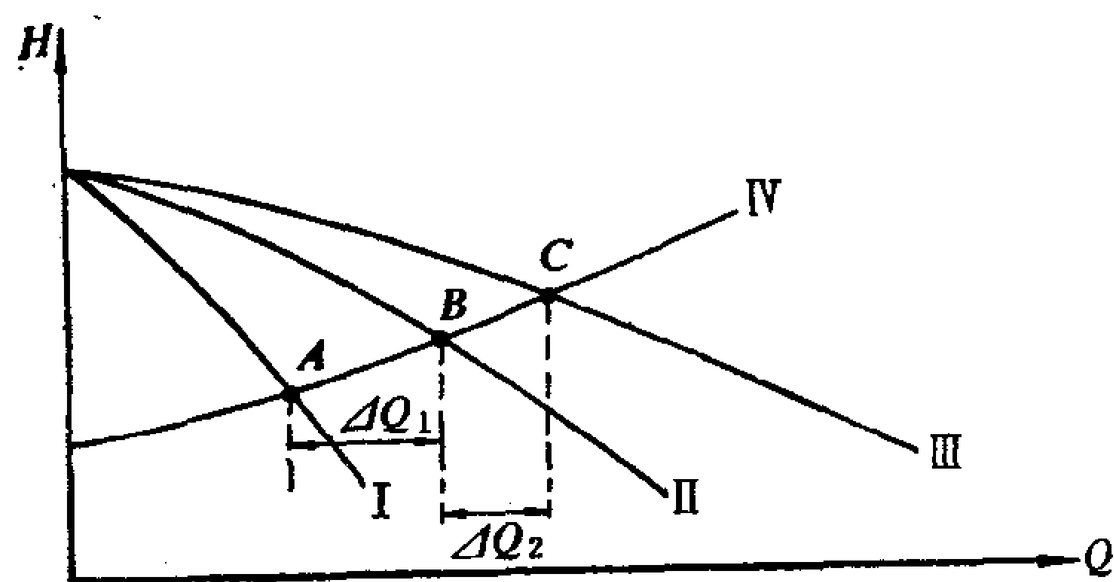


图 15-7 多台机器并联运行

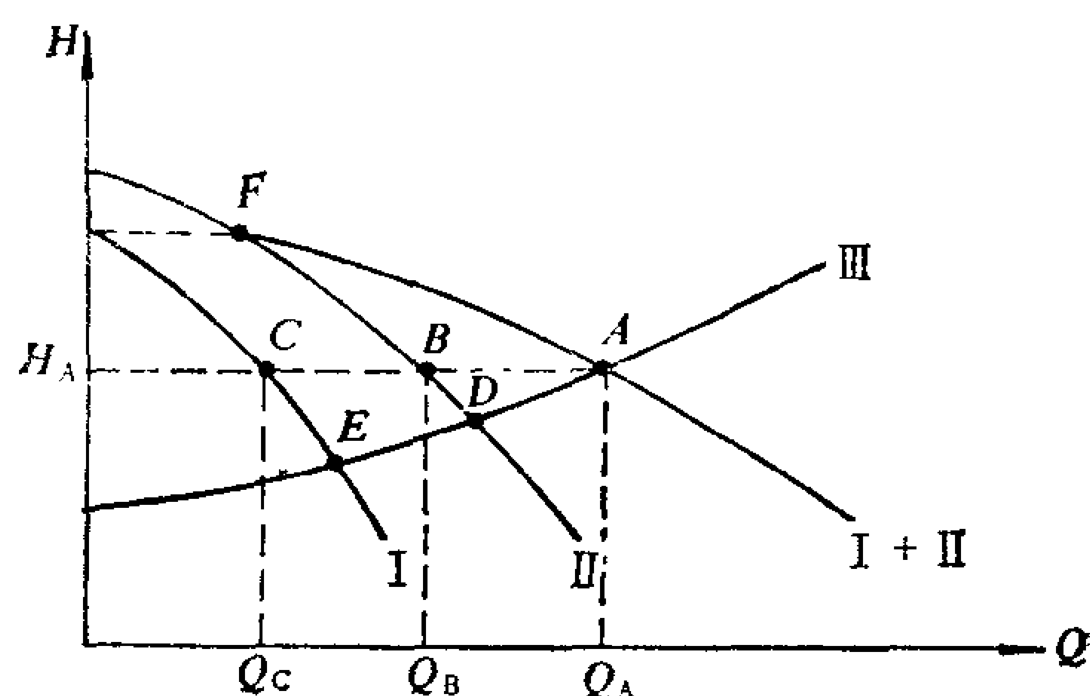


图 15-8 不同性能机器并联的工况分析

由A点作水平线交两台机器的性能曲线于B、C两点，B、C就是并联工作时两台机器各自的工况点。流量为Q_B、Q_C，能头相等，即$H_B=H_C=H_A$。总流量为各台机器的流量之和，即$Q_A=Q_B+Q_C$。

并联前每台机器各自的工况点是D和E。由图看出：$Q_A<Q_D+Q_E$；$H_A>H_D$；$H_A>H_E$。这表明，两台不同性能的机器并联工作的总流量小于并联前各机单独工作的流量之和。其减少的程度与管路性能曲线形状有关，管路性能曲线越陡，总流量越小。

两台性能不同的机器并联时，能头小的机器输出的流量很少。当并联工况点移至F点时，由于机器Ⅰ的能头不能大于H_F，因而不能输出流量，此时应停开机器Ⅰ。

二、泵或风机的串联工作

串联工作时，第一台机器的压出口与第二台机器的吸入口相连接。图15-9（a）是两台泵的串联，（b）是两台风机的串联。

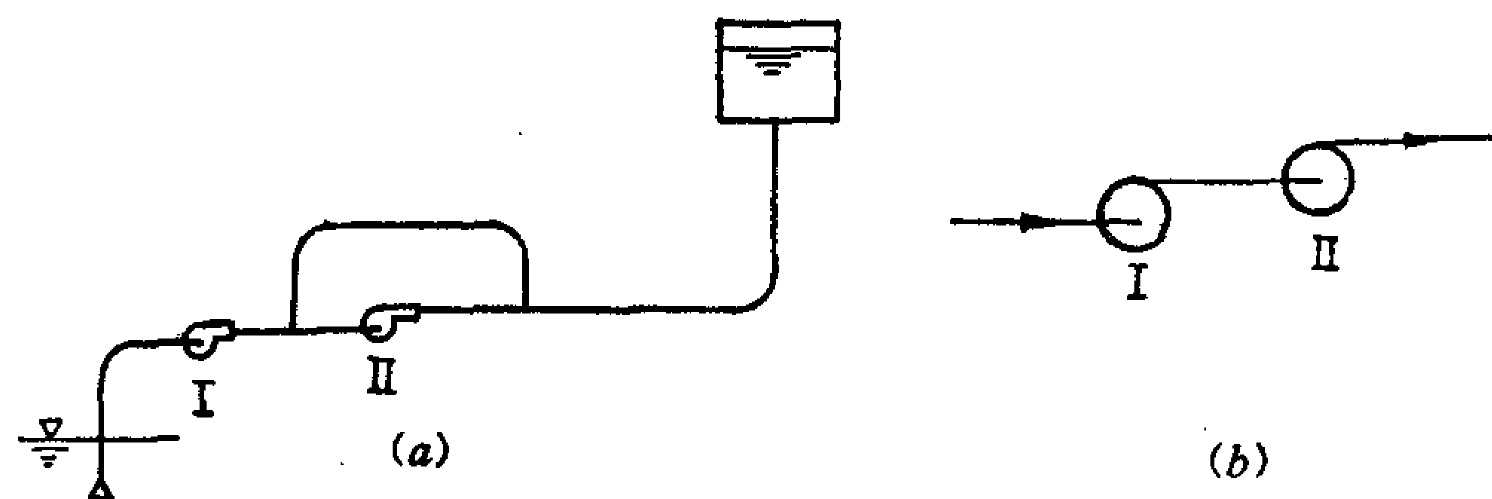


图 15-9 泵与风机的串联工作

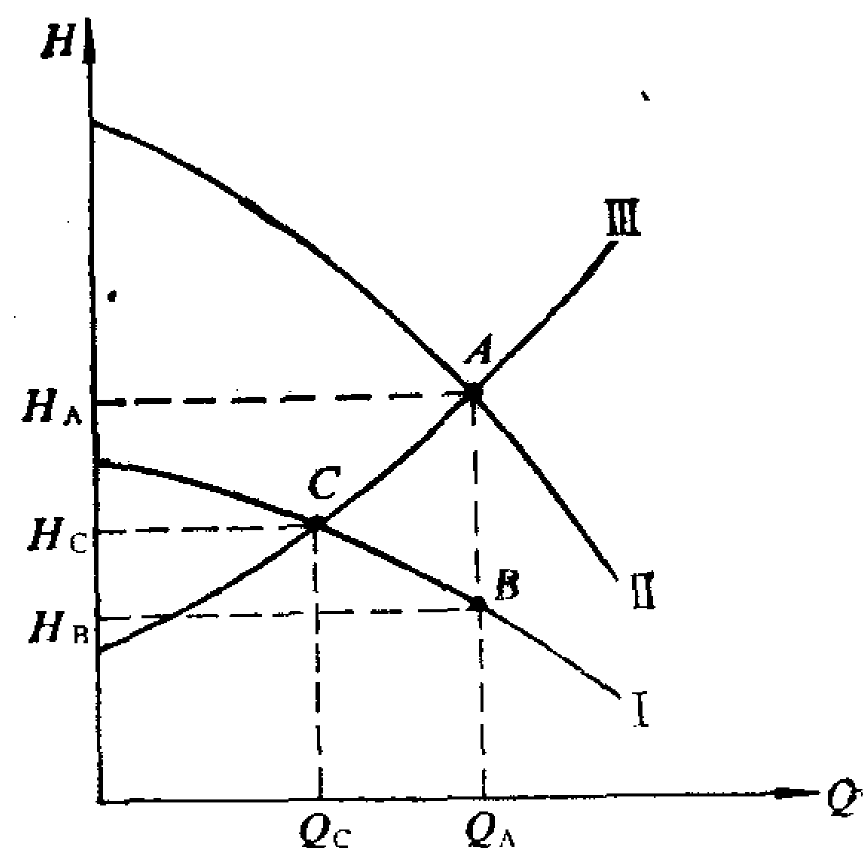


图 15-10 串联机组的工况分析

泵或风机串联工作的特点是通过各台机器的流量相同，而总能头为各台机器能头的总

和。串联工作常用于以下情况：1）一台高压的泵或风机制造困难或造价太高时；2）在改建或扩建时，管道阻力加大，需要能头提高时。

两台相同的泵或风机串联工作时，工况分析如图15-10。图中Ⅰ是一台机器的性能曲线。根据相同流量下能头相加的原理，得到曲线Ⅱ为两台机器串联工作的性能曲线。曲线Ⅲ是管路性能曲线，与串联机组性能曲线交于A点。A点就是串联工作的工况点，流量为Q_A，能头为H_A。

由A点做垂直线与单机性能曲线交于B点。B点是串联机组中一台机器的工况点，流量$Q_B=Q_A$，能头$H_B=\frac{1}{2}H_A$。

单机性能曲线Ⅰ与管路性能曲线Ⅲ的交点C是系统中只有一台机器工作时的工况点。由图可见：

$$Q_A>Q_C;$$
$$H_A>H_C>H_B。$$

以上表明，两台机器串联工作时能头增加了，但是没有增加到两倍。增加的能头为$\Delta H=H_A-H_C$。同时串联后的流量也增加了，这是因为能头加大，使管路中流体速度加大，流量随之增加。泵或风机的性能曲线愈平坦（比转数较小），串联后增加的能头和流量愈大，愈适于串联工作。

性能不同的泵或风机的串联工作，其分析方法与上述情况类似，就不再讨论了。应指出的是，两台泵串联时，后一台泵承受的压力较高，选泵时要注意结构强度。风机串联的特性与泵相同，但因操作上可靠性较差，一般不推荐采用。

§15-3 泵与风机的工况调节

如前所述，泵与风机运行时其工况点的工作参数是由泵与风机的性能曲线与管路性能曲线所决定的。但是用户需要的流量经常变化，为了满足这种要求，必须进行调节。工况调节就是用一定方法改变泵或风机性能曲线或管路性能曲线，来满足用户流量变化的要求。常用的工况调节方法有以下几种。

一、阀门调节

改变管路性能曲线最常用的方法是改变阀门的开度，从而改变管路的阻抗S，使管路性能曲线变陡或变缓，达到调节流量的目的。这种调节方法十分简单，应用甚广。但是由于增加了阀门阻力，故额外增加了水头损失，是不经济的。这种方法常用于频繁的、临时性的调节。

图15-11中曲线Ⅰ是原来的管路性能曲线。阀门关小，阻力增大，管路性能曲线变陡为曲线Ⅱ。曲线Ⅲ是泵或风机的性能曲线不变。工况点由A移到B，相应地流量由Q_A减至Q_B。

由于阀门关小额外增加的水头损失为$\Delta H=H_B-H_C$。因为原来管路中流量为Q_B时需要的能头是H_C。相应多消耗的功率为$\Delta N=\frac{\gamma Q_B\Delta H}{\eta_B}$。

此外应注意，水泵的调节阀门通常只能装在压水管上。这是因为吸入管上设置调节

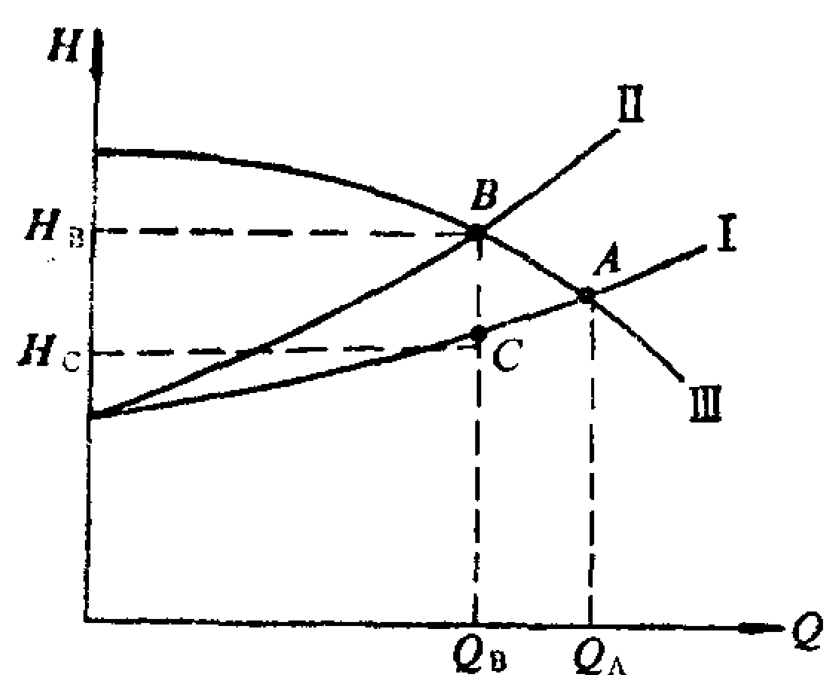


图 15-11 阀门调节的工况分析

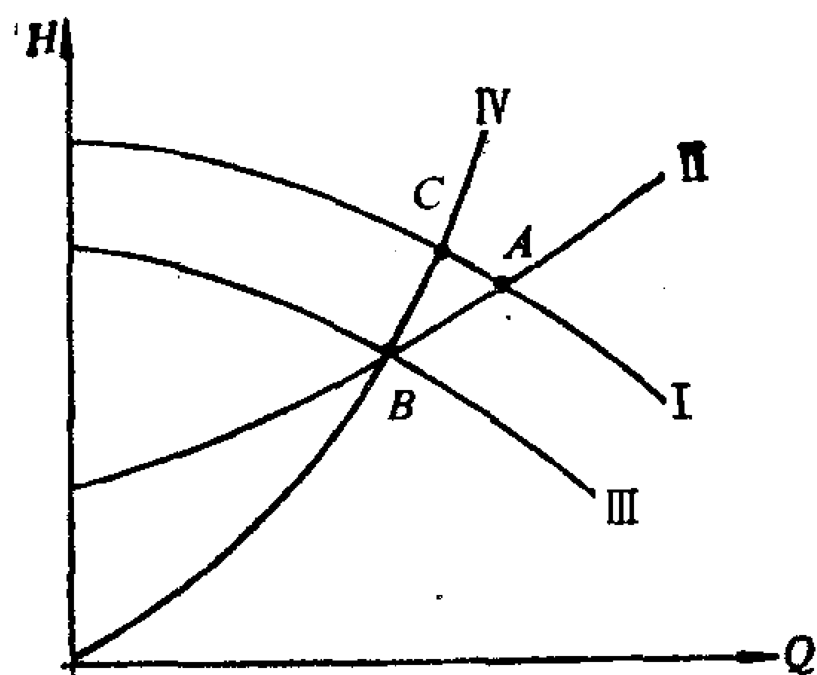


图 15-12 变速调节工况分析

阀，增加吸入口的真空值，可能引起水泵气蚀。

二、变速调节

由相似律可知，改变泵或风机的转速，可以改变泵或风机的性能曲线，从而使工况点移动，流量随之改变。转速改变时泵与风机的性能参数变化如下：

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{n}{n'} \qquad \frac{H}{H'}=\left(\frac{n}{n'}\right)^2$$

$$\frac{p}{p'}=\left(\frac{n}{n'}\right)^2 \qquad \frac{N}{N'}=\left(\frac{n}{n'}\right)^3 \qquad (14\text{-}22)$$

变速调节的工况分析如图15-12。图中曲线Ⅰ为转速n时泵或风机的性能曲线。曲线Ⅱ为管路性能曲线。两线交点A就是工况点。

今欲将工况点调节至管路性能曲线上B点。通过B点的泵或风机性能曲线Ⅲ，转速为n'。转速比$\frac{n}{n'}\neq\frac{Q_A}{Q_B}$。因为式（14-22）是相似律，应满足运动相似条件，而A、B两点不是相似工况点，不满足运动相似条件。

由式（14-22）相似工况点应满足以下关系：

$$\frac{H}{H'}=\frac{Q^2}{Q'^2} \qquad 或 \qquad \frac{H}{Q^2}=\frac{H'}{Q'^2}=K$$

得相似工况曲线方程为

$$H=KQ^2 \qquad (15\text{-}2)$$

将Q_B及H_B代入，得$K=\frac{H_B}{Q_B^2}$。则可以绘出通过B点的相似工况曲线Ⅳ。与转速n的性能曲线Ⅰ交于C点。B点与C点是相似工况点，C点又在转速为n的性能曲线上。因此有$\frac{n}{n'}=\frac{Q_C}{Q_B}$。

改变泵或风机转速的方法有以下几种。

（1）改变电机转速

用电机拖动的泵或风机，可以在电机的转子电路中串接变阻器来改变电机的转速。这种方法的缺点是必须增加附属设备，且在变速时增加额外的电能消耗。也可以采用可变极数的电机，但这种电机较贵，调速是跳跃式的，调速范围有限，一般只有两种转速。

（2）调换皮带轮

改变风机或电机的皮带轮的大小，可以在一定范围内调节转速。这种办法的优点是不

增加额外的能量损失，缺点是调速范围有限，并且要停机换轮。

（3）采用液力联轴器

液力联轴器是安装在电机与泵或风机之间的传动设备。它和一般联轴器不同之处在于通过液体（如油）来传递转矩。改变联轴器的进油量，就可以改变传递的转矩，从而在电机转速恒定的情况下，改变泵或风机的转速。

在理论上可以用增加转速的办法来提高流量，但是转速增加后，使叶轮圆周速度增大，因而可能增大振动和噪声，且可能发生机械强度和电机超载等问题，所以一般不采用增速方法来调节工况。

三、进口导流器调节

离心式通风机常采用进口导流器进行调节。常用的导流器有轴向导流器与径向导流器，如图15-13。

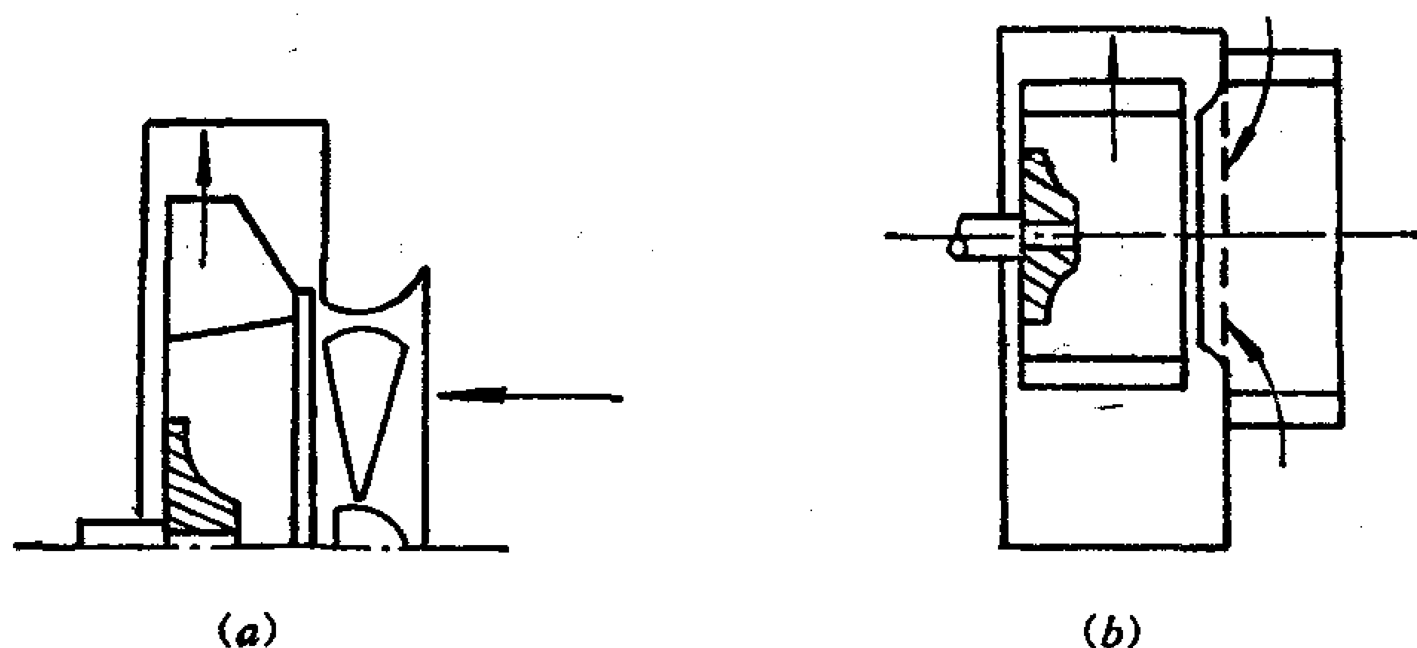


图 15-13　进口导流器简图

(a)轴向导流器；(b)径向导流器

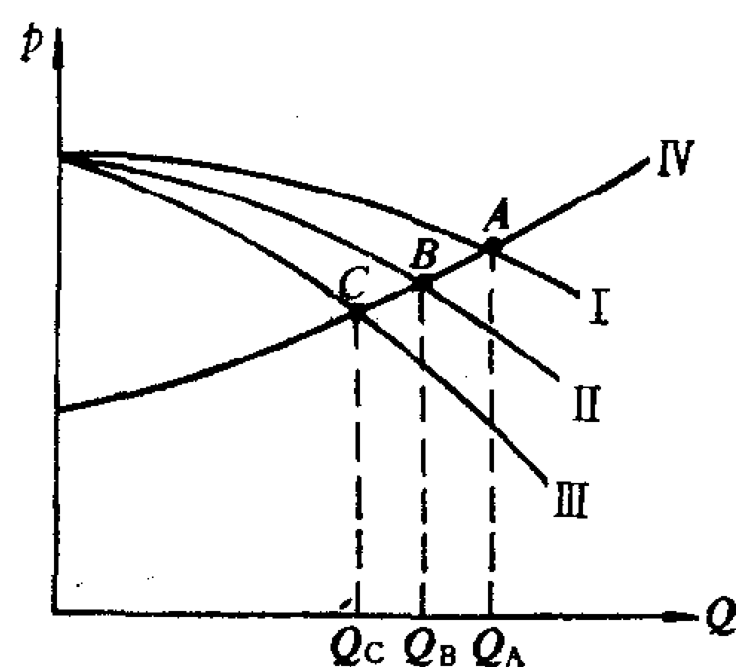


图 15-14　进口导流器调节

导流器的作用是使气流进入叶轮之前产生预旋。由欧拉方程式得知，$p=\rho(u_2c_{u2}-u_1c_{u1})$。当导流器全开时，气流无旋进入叶轮，此时$c_{u1}=0$，所得风压最大。向旋转方向转动导流器叶片，气流产生预旋，使切向分速c_{u1}加大，从而风压降低。导流器叶片转动角度越大，产生预旋越强烈，风压p越低。

图15-14是采用导流器调节方法的工况分析图。导流叶片角度为0°、30°、60°，风机的性能曲线为Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，与管路性能曲线Ⅳ交于A、B、C三点，是三种情况下的工况点，流量分别为Q_A、Q_B、Q_C。

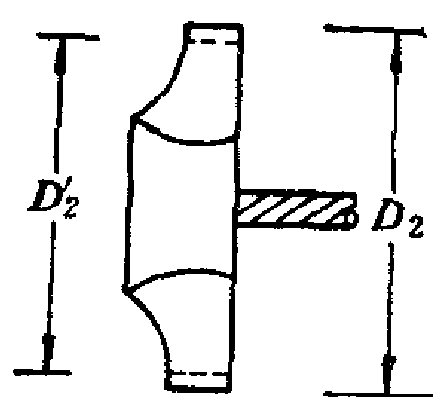
采用导流器的调节方法，增加了进口的撞击损失，从节能角度看，不如变速调节，但比阀门调节消耗功率小，也是一种比较经济的调节方法。此外，导流器结构比较简单，可用装在外壳上的操作手柄进行调节，可以在不停机的情况下进行，操作方便灵活，这是比变速调节优越之处。

四、切削叶轮调节

泵或风机的叶轮经过切削，外径改变，其性能随之改变。泵或风机的性能曲线改变，则工况点移动，系统的流量和能头改变，达到调节的目的。

叶轮经过切削与原来叶轮不符合几何相似条件，切削前后性能参数的关系不符合相似律需重新推导切削律。由于切削量不大，近似认为切削前后的出口安装角β_2不变。叶轮直径D_2变为D_2'，圆周速度u_2变为u_2'。由于β_2不变，速度图相似，满足运动相似条件，见图15-15。

叶轮切削前后的速度比为



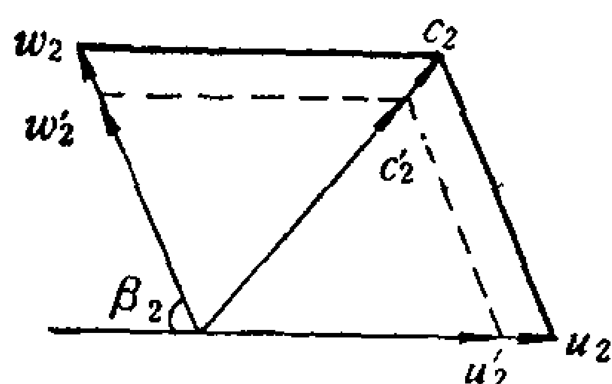


图 15-15 切削叶轮及速度图

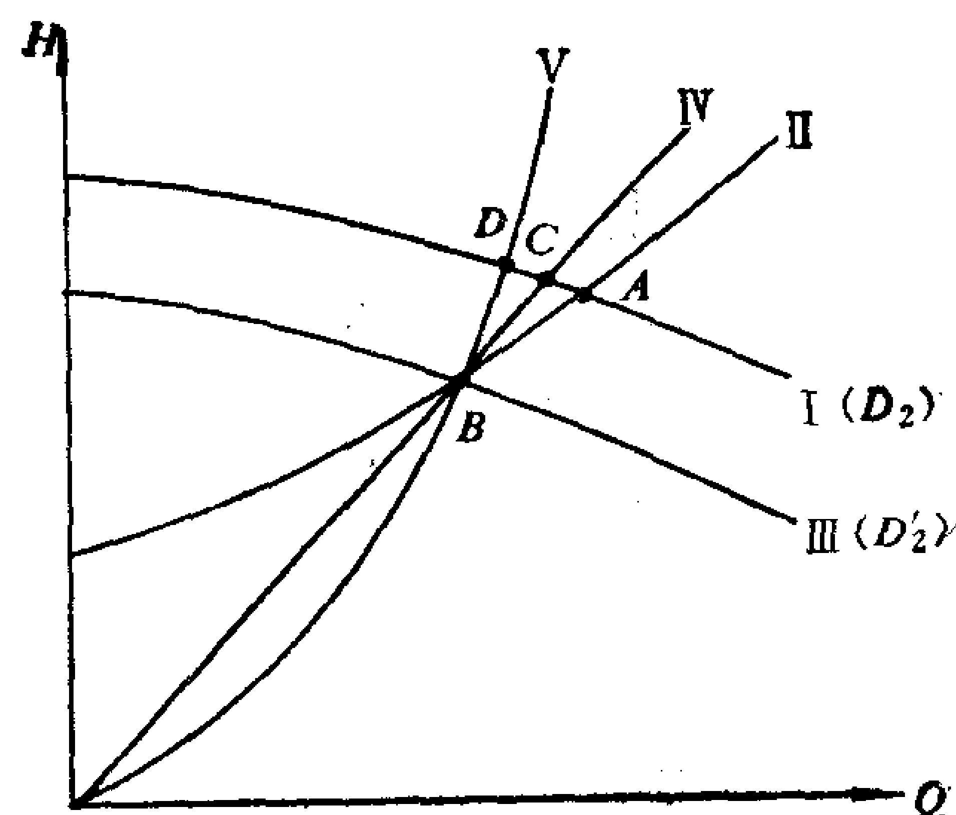


图 15-16 切削叶轮调节的工况分析

$$\frac{u_2}{u_2'}=\frac{c_{u2}}{c_{u2}'}=\frac{c_{r2}}{c_{r2}'}=\frac{D_2}{D_2'}$$

叶轮切削前后的性能参数之间关系如下，近似认为容积效率相等$\eta_V \approx \eta_V'$，排挤系数相等$\varepsilon \approx \varepsilon'$，水力效率相等$\eta_H \approx \eta_H'$，涡流系数相等$K \approx K'$，则有

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{\eta_V e \pi D_2 b_2 c_{r2}}{\eta_V' e' \pi D_2' b_2' c_{r2}'}=\left(\frac{D_2}{D_2'}\right)^2\left(\frac{b_2}{b_2'}\right)$$

$$\frac{H}{H'}=\frac{\eta_H K \dfrac{u_2 c_{u2}}{g}}{\eta_H' K' \dfrac{u_2' c_{u2}'}{g}}=\left(\frac{D_2}{D_2'}\right)^2$$

对于低比转数的泵与风机，叶轮切削后出口宽度变化不大，可以近似认为不变，$b_2 \approx b_2'$，则上述关系为

$$\frac{Q}{Q'}=\left(\frac{D_2}{D_2'}\right)^2 \qquad \frac{H}{H'}=\left(\frac{D_2}{D_2'}\right)^2 \qquad \frac{N}{N'}=\left(\frac{D_2}{D_2'}\right)^4 \qquad (15\text{-}3)$$

称为**第一切削定律**。

对于中高比转数的泵与风机，叶轮切削后可以认为出口面积不变，$\pi D_2 b_2 \approx \pi D_2' b_2'$，则性能参数关系为

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{D_2}{D_2'} \qquad \frac{H}{H'}=\left(\frac{D_2}{D_2'}\right)^2 \qquad \frac{N}{N'}=\left(\frac{D_2}{D_2'}\right)^3 \qquad (15\text{-}4)$$

称为**第二切削定律**。

切削叶轮进行调节的工况分析见图15-16。图中曲线Ⅰ是叶轮直径为D_2的泵与风机性能曲线，曲线Ⅱ是管路性能曲线，交点A是工况点。

欲将工况点调至管路性能曲线B点，通过B点的泵与风机的性能曲线Ⅲ，叶轮直径为D_2'。为了求出D_2'，需要找出曲线Ⅰ上与B点运动相似的工况点，因为切削定律是由运动相似推导出来的。为此需画出运动相似的切削曲线，由于有两个切削定律，切削曲线也有两条。

对于低比转数的泵与风机，由式（15-3），有

$$\frac{Q}{Q'}=\frac{H}{H'}$$

则
$$H=\left(\frac{H'}{Q'}\right)Q=\left(\frac{H_B}{Q_B}\right)Q \qquad (15\text{-}5)$$

将B点的H_B、Q_B代入计算，得切削曲线是一条直线，见图15-16中曲线Ⅳ，与叶轮切削前的性能曲线Ⅰ交于C点，C点与B点满足运动相似条件。应用第一切削定律，得

$$\frac{D_2}{D_2'}=\sqrt{\frac{Q_C}{Q_B}} \qquad (15\text{-}6)$$

对于中高比转数的泵与风机，由式（15-4），有

$$\frac{H}{H'}=\frac{Q^2}{Q'^2}$$

则
$$H=\left(\frac{H'}{Q'^2}\right)Q^2=\left(\frac{H_B}{Q_B^2}\right)Q^2 \qquad (15\text{-}7)$$

将H_B、Q_B代入计算，得切削曲线是一条二次抛物线，见图15-16中曲线Ⅴ，与叶轮切削前的性能曲线Ⅰ交于D点。D点与B点满足运动相似条件 应用第二切削定律，得

$$\frac{D_2}{D_2'}=\frac{Q_D}{Q_B} \qquad (15\text{-}8)$$

切削叶轮的调节方法，其切削量不能太大，否则效率明显下降。水泵的最大切削量与比转数n_s有关，如表15-1。

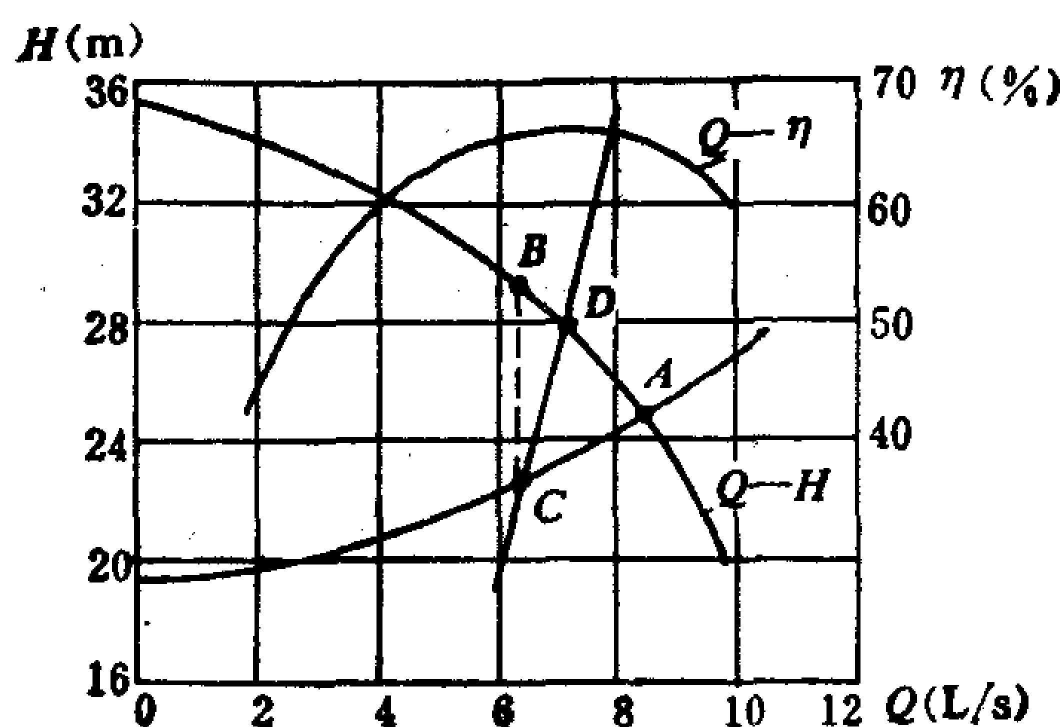
叶 轮 最 大 切 削 量　　　　表 15-1

泵的比转数 n_s	60	120	200	300	350	350以上
允许最大切削量	20%	15%	11%	9%	7%	0
效率下降值	每切10%下降1%		每切4%下降1%			

对于水泵，制造厂通常对同一型号的泵，除标准叶轮外，还提供几种经过切削的叶轮供用户选用。如2BA-6型泵，标准叶轮直径为163mm。切削一次2BA-6A型，叶轮直径为148mm。切削两次2BA-6B型，叶轮直径为132mm 切削后的叶轮仍装于原机壳内，调节时只需换用叶轮即可。

切削叶轮的调节方法，不增加额外的能量损失，机器效率下降很少，是一种节能的调节方法。缺点是需要停机换装叶轮，常用于水泵的季节性调节。

【例 15-1】 已知水泵性能曲线如下图。管路阻抗$S=76000\text{s}^2/\text{m}^5$，静扬程$H_{st}=19$ m，转速$n=2900\text{r/min}$。试求：



例 15-1 图

1）水泵的流量Q、扬程H、效率η及轴功率N；

2）用阀门调节方法使流量减少25%，求此时水泵的流量、扬程、轴功率和阀门消耗的功率；

3）用变速调节方法使流量减少25%，转速应调至多少？

【解】 1）管路性能曲线 $H=19+76000Q^2$

计算得

Q（L/s）	0	2	4	6	8	10
H （m）	19	19.30	20.22	21.74	23.86	26.60

管路性能曲线与泵的Q-H曲线交于A点。

$$Q_A=8.5\text{L/s} \quad H_A=24.5\text{m} \quad \eta_A=65\%$$

$$N_A=\frac{\gamma Q_A H_A}{\eta_A}=\frac{9.807\times0.0085\times24.5}{0.65}=3.14\text{kW}$$

2）阀门调节

$$Q_B=(1-0.25)Q_A=0.75\times8.5=6.38\text{L/s}$$

在泵的Q-H曲线上查得B点，$H_B=28.8\text{m}$，$\eta_B=65\%$

$$N_B=\frac{\gamma Q_B H_B}{\eta_B}=\frac{9.807\times0.00638\times28.8}{0.65}=2.77\text{kW}$$

由B点做垂直线与管路性能曲线交于C点

$$H_C=19+76000\times(0.00638)^2=22.09\text{m}$$

阀门增加的水头损失

$$\Delta H=H_B-H_C=28.8-22.09=6.71\text{m}$$

阀门消耗的功率

$$\Delta N=\frac{\gamma Q_B\Delta H}{\eta_B}=\frac{9.807\times0.00638\times6.71}{0.65}=0.65\text{kW}$$

3）变速调节 将工况点调至C点

相似工况曲线 $H=KQ^2$

$$K=\frac{H_C}{Q_C^2}=\frac{22.09}{6.38^2}=0.543$$

Q（L/s）	6	6.38	7	8
H （m）	19.55	22.09	26.61	34.75

相似工况曲线与泵的Q-H曲线交于D点

$$Q_D=7.2\text{L/s}, \qquad \frac{n}{n'}=\frac{Q_D}{Q_C}$$

$$n'=n\frac{Q_C}{Q_D}=2900\times\frac{6.38}{7.2}=2570\text{r/min}$$

【例 15-2】 上题中的水泵直径$D_2=200$mm，如采用切削叶轮方法使流量减少25%，问应切削多少？

【解】 首先计算水泵的比转数，效率最高点F，$Q_F=7$L/s，$H_F=28$m

$$n_s=3.65\frac{nQ^{1/2}}{H^{3/4}}=3.65\times\frac{2900\times0.007^{1/2}}{28^{3/4}}=73$$

属于低比转数水泵，采用第一切削定律，切削曲线是直线。

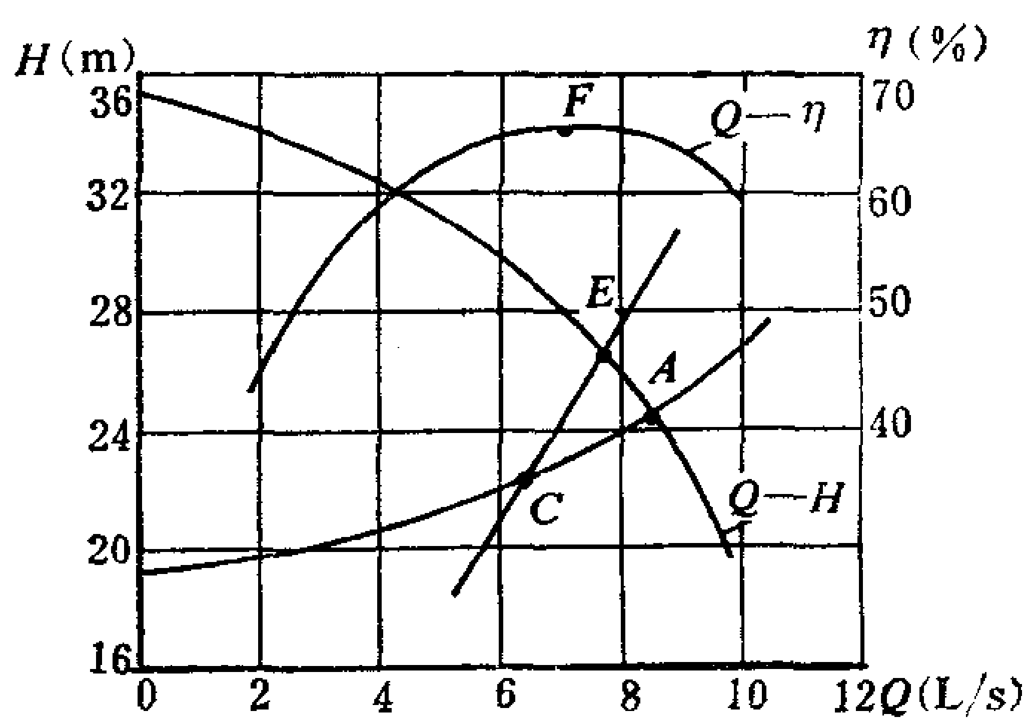
$$H=\frac{H_C}{Q_C}Q=\frac{22.09}{6.38}Q=3.46Q$$

当$Q=8$L/s时，$H=27.68$m。两点则可画出切削曲线，与泵的Q-H曲线交于E点，$Q_E=7.7$L/s

$$\frac{D_2}{D_2'}=\sqrt{\frac{Q_E}{Q_C}}=\sqrt{\frac{7.7}{6.38}}=1.10$$

$$D_2'=\frac{D_2}{1.10}=\frac{200}{1.10}=182\text{mm}$$

切削率$\Delta=\frac{D_2-D_2'}{D_2}=\frac{200-182}{200}=9\%$，在允许范围内。



例 15-2图

§15-4 离心泵的选择

一、常用离心泵介绍

（1）单级单吸式离心泵

这种泵种类很多，应用广泛。泵轴多与地面平行，称为卧式。流量一般为5.5～300 m³/h，扬程为8～150m，有B型、BA型、BZ型等。其型号意义以4BA-12A为例说明之：

4——吸入口直径为4in（100mm）

BA——单级单吸悬臂式离心清水泵

12——比转数为120左右

A——叶轮切削一次

（2）单级双吸式离心泵

这是应用十分广泛的一种泵。流量为90～20000m³/h，扬程为10～100m。有Sh型、SA型、S型等。

双吸泵的叶轮形状如图15-17（a）所示，相当于两个单吸叶轮并联组成。两面进水，因此流量较大。

（3）多级分段泵

这种泵是将几个叶轮同时安装在一根轴上串联工作。液体由导流器导向，顺序由前一个叶轮进入后一个叶轮，经过多次加压，所以具有较高的扬程，见图15-17（b）。目前这种泵的扬程可达100～650m，流量为5～720m³/h。型号意义以4DA-8×8为例：

4——吸入口直径为4in

DA——单吸多级分段式离心清水泵



图 15-17　双吸泵与多级泵示意图

(a)双吸泵；(b)多级泵

8 ——叶轮比转数为80左右

8 ——叶轮级数为8级

以上清水泵皆输送水温80℃以下的清水。

（ 4 ）锅炉给水泵

锅炉给水泵的作用是向锅炉连续供给具有足够压力和相当高温度的水，按工作压力分为：低压（小于5MPa）；中压（5～10MPa）和高压（10MPa以上）三种。低压和中压锅炉给水泵的水温不超过105～110℃。锅炉给水泵大部分是单吸多级分段卧式离心泵。由于工作压力和温度较高，在构造上需采取一些特殊措施，如轴封装置比较完善，轴承除润滑外还需循环水冷却等。如GC型锅炉给水泵，扬程为46～576m,流量为6～55m³/h,最高水温为110℃。

（ 5 ）凝结水泵

DN、SN型泵是输送200℃以下清水的多级泵，D表示单侧进水，S表示双侧进水，N表示凝结水泵。因为凝结水泵抽吸的介质常处于液汽两相的汽化状态，很容易产生气蚀，故对凝结水泵的气蚀性能应予特别注意。

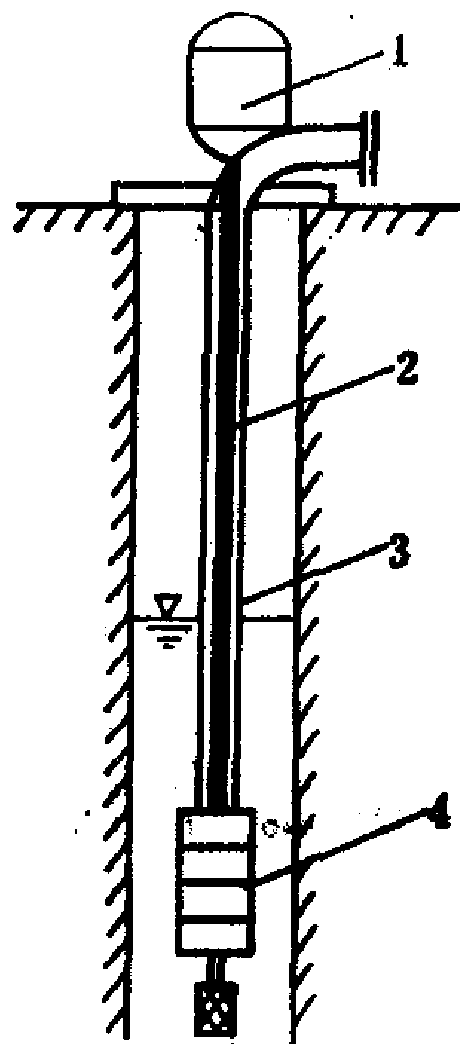


图 15-18　深井泵

1—电机；2—轴；3—压水管；4—泵体

（ 6 ）深井泵与潜水泵

这两种泵是用来抽升深井地下水的。实际是一种立式单吸多级分段式离心泵。泵体在井下，电机在井上，通过一根很长的轴传动，叫做深井泵（图15-18）。电机和泵连成一体置于井下的叫做潜水泵。

（ 7 ）污水泵与杂质泵

国产PW型污水泵是卧式单级悬臂式离心泵。它与清水泵不同之处是叶轮的叶片少，流道宽敞，便于输送污水。杂质泵是输送含有杂质的液体如泥浆泵、灰渣泵、砂浆泵等。其特点是叶轮泵体等过流部分采用耐磨材料，泵壳通常有清扫孔，便于检查拆洗。

二、泵的综合性能图

水泵的综合性能图是将同一型号，不同规格的泵的性能曲线，在高效区（$\eta \geqslant 0.9\eta_{max}$）的部分，绘在一张图上，以供选泵之用。

附录D是Sh型泵的综合性能图。图中一个方框是一种规格泵的高效工作区。其上边是标准叶轮高效区的Q-H曲线，中边及下边是切削一次及切削两次的高效区Q-H曲线（或只有切削一次的下边）。两侧边是等效率线。因此方框内的工况点都是高效工况。

三、泵的选择

选择水泵大致有以下几个步骤。

（1）首先确定用户需要的最大流量，并进行管路水力计算求出需要的最大扬程。选泵时一般考虑一定的安全值。

$$Q=(1.05\sim1.10)Q_{max}$$
$$H=(1.10\sim1.15)H_{max} \qquad (15\text{-}9)$$

（2）分析水泵的工作条件，如液体的杂质情况、温度、腐蚀性等，及需要的流量和扬程，确定水泵的种类及型式。

（3）利用该种泵的综合性能图，进行初选。确定泵的型号、尺寸及转速。

（4）用该泵的性能曲线，并绘制管路性能曲线，做出工况点，进行校核。并定出泵的效率及功率。

（5*）选用电机及其他附属设备。

（6）查明允许吸上真空高度或必须气蚀余量，核算水泵的安装高度。

§15-5 离心式风机的选择

一、常用离心式风机介绍

（1）一般离心式通风机

流量一般为500～22000m³/h，风压为18～400mmH_2O。广泛应用于一般厂房通风。

型号以4-72-11No.10C右90°为例，说明其意义：

4——风压系数$\overline{p}=0.4$

72——比转数$n_s=72$

1——单侧进风（0为双侧进风）

1——第一次设计

No.10——机号，叶轮直径$D_2=1000$mm

C——传动方式，见附录H

右90°——风机出口方向，见附录I

（2）高压离心式通风机

流量一般为600～50000m³/h，风压为350～1700mmH_2O，可用于一般锻冶炉及强制通风。如8-18-101型。

以上通风机输送清洁空气，温度80℃以下。

（3）排尘离心式通风机

输送含尘量较大的空气，如7-40-11型风机。输送含木屑、纤维和尘土的空气混合物，如6-46-11型风机。

（4）防爆离心式风机

如B4-72-11型风机可用于产生易燃挥发性气体的厂房通风。

（5）锅炉引风机

如Y4-73-11可用于2～670T/h蒸汽锅炉的烟道排风。排送烟气温度为200°C。

二、通风机的噪音

通风机运行时产生噪声，噪声被流体通过风管传到室内，使工作条件恶化。因此在选择通风机时，除了要满足系统的风量、风压要求之外，还要防止过大的噪声。

噪声产生的原因有两方面。一是空气动力噪声，由气流中的漩涡冲击引起的噪声，又叫涡流噪声。一是机械噪声，由轴承、转子不平衡引起的噪声。实践表明，通风机的噪声主要是空气动力噪声。

噪声的强度用声功率级（单位为分贝）表示，其大小一般与圆周速度u_2，叶片纵向尺寸及气流在叶轮中的阻力成正比。因此在选用风机时，规定圆周速度不得超过以下范围。

通风机最大圆周速度　　表 15-2

建筑性质	居住建筑	公共建筑	工业建筑Ⅰ	工业建筑Ⅱ
u_2(m/s)	20～25	25～30	30～35	35～45

注：工业建筑Ⅰ指工作条件较安静的车间；
工业建筑Ⅱ指工作条件有其它噪声源的车间。

三、风机的选择性能曲线

将同一型号风机不同机号（叶轮直径不同）、不同转速下高效区的Q-p性能曲线的一部分绘在一张图上，供选择风机之用，称为选择性能曲线。附录F是8-23-11型风机的选择性能曲线。由于采用对数坐标，等效率线是直线，各机号风机不同转速的最高效率点成直线。图中并绘有等功率线及等转速线。

有些风机样本将选择性能曲线上高效区的Q-p曲线，均匀地选取6～8个工况点，将这些点的数据编成风机性能表（如附录G是4-72-11型风机性能表的一部分），可供选择之用。

四、风机的选择

选择风机的步骤大致如下。

（1）分析风机的工作条件，包括气体含尘、含纤维或其他杂质、可燃易爆、温度等情况，确定风机的种类及型号。

（2）确定用户需要的风量Q_{max}，由管路水力计算得到需要的风压p_{max}。按式（15-9）考虑一定的安全值，确定风机的风量及风压。如当地工作条件与标准条件（标准大气压及温度20℃）不符，应换算为标准条件下的风压。

（3）由风量及风压确定风机的机号及转速，可以利用选择性能曲线图，或风机性能表，或无量纲性能曲线。

（4）校核圆周速度u_2是否符合噪声规定。

（5）根据风机的功率，选用电机。

（6）选择传动方式及出风口位置，见附录H及I。

【例 15-3】 有一工业厂房，当地海拔高程为500m，夏季温度40℃，通风需要风量为2.4m^3/s，风压为86mmH_2O，试选用一台风机。

【解】 该厂房为一般工业厂房，无特殊要求，故选用一般离心式通风机4-72-11型。

风机的风量与风压，考虑一定安全值为

$$Q = 1.05 \times 2.4 = 2.52\text{m}^3/\text{s} = 9072\text{m}^3/\text{h}$$

$$p = 1.10 \times 86 = 94.6\text{mmH}_2\text{O} = 928\text{Pa}$$

由于当地大气压及温度与标准条件（标准大气压及20℃）不符，风压需进行换算。由表14-1，海拔高程500m的当地大气压为9.7mH_2O，

$$p_a = 9.7 \times 9.807 = 95.13\text{kPa}$$

标准条件的风压

$$p_0 = 928 \times \frac{101.325}{95.13} \times \frac{273+40}{273+20} = 928 \times 1.138 = 1056\text{Pa}$$

由附录G中查得4-72-11型No.6A风机，转速$n = 1450$r/min时，第4工况点风压为1060Pa，风量为9360m³/h。可满足此厂房通风需要。

核算圆周速度

$$u_2 = \frac{\pi D_2 n}{60} = \frac{\pi \times 0.6 \times 1450}{60} = 45.53\text{m/s}$$

对于Ⅱ类工业建筑，则符合噪声规定。

传动方式A型，由附录H知道该风机叶轮直接装在电机轴上。电机为Y112M-4型，功率4kW。

【例 15-4】 上题中试用无量纲性能曲线确定风机尺寸及转速。

【解】 由附录E查得4-72型通风机最高效率时无量纲性能参数$\bar{Q} = 0.220$，$\bar{p} = 0.420$

由式（14-27）

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho u_2^2}$$

则

$$u_2 = \sqrt{\frac{p}{\rho \bar{p}}} = \sqrt{\frac{1056}{1.2 \times 0.42}} = 45.77\text{m/s}$$

风机转速定为1450r/min，叶轮直径为

$$D_2 = 60 \times \frac{u_2}{\pi n} = 60 \times \frac{45.77}{\pi \times 1450} = 0.60\text{m}$$

由式（14-26）

$$\bar{Q} = \frac{Q}{F u_2}$$

$$Q = \bar{Q} F u_2 = 0.22 \times \frac{\pi (0.6)^2}{4} \times 45.77 = 2.85\text{m}^3/\text{s}$$

满足风量要求。

习　题

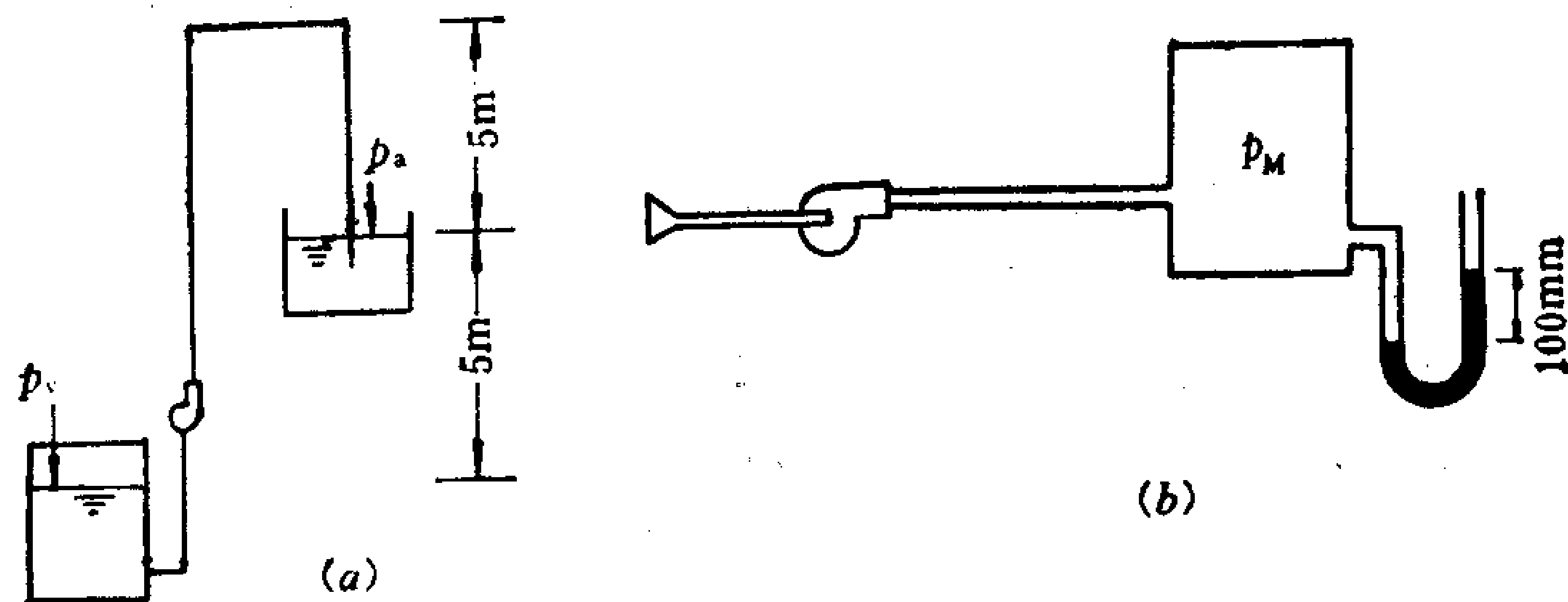
15-1 试决定下列情况下泵的扬程及风机所需的风压，设管路能量损失$h_w = 6$m流体柱。

（a）水泵从真空度$p_v = 0.3$大气压的密闭水箱中抽水，压水管从高层又下降5m（管中不漏气）；

（b）通风机在海拔2100米处（当地大气压为8mH_2O），由大气送风到100mmH_2O的压力箱。

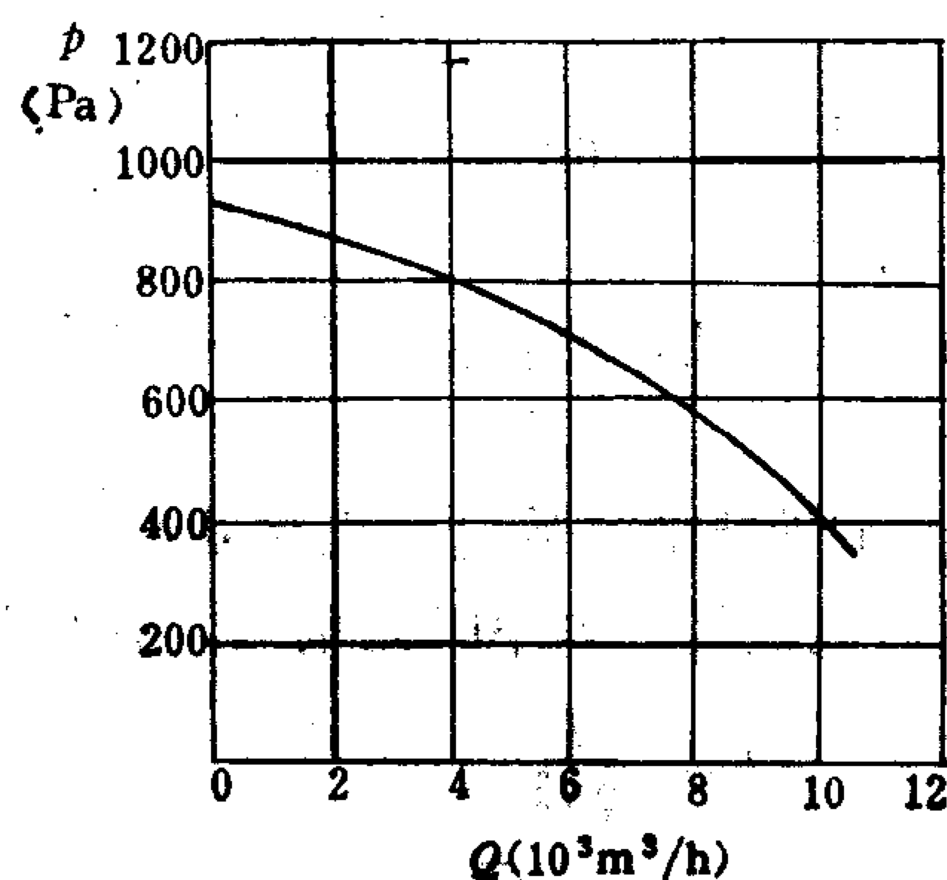
15-2 $1^1/_2$BA-6型泵叶轮直径$D = 128$mm，性能曲线见附录G，该泵在管路中工作，管路阻抗$S = 0.408 \times 10^6 \text{s}^2/\text{m}^5$，几何扬程$H_{st} = 12$m，试求水泵的供水量、扬程、效率及功率。

15-3 如采用切削叶轮方法调节流量，切削一次叶轮直径$D = 115$mm，管路系统不变，问此时泵的流量、扬程、效率及轴功率为多少？



题 15-1图

15-4 离心式风机的性能曲线如图所示。管路性能曲线$p=p_{st}+\gamma SQ^2$，已知静压$p_{st}=500$Pa，气体重度$\gamma=11.77\text{N/m}^3$，管路阻抗$S=3.45\text{s}^2/\text{m}^5$。试求两台相同的风机并联及串联工作的流量及风压，并与单机工作时的流量及风压进行比较。



题 15-4图

15-5 15-2题中水泵及管路系统不变，为了使流量减少20%，试求：

1）如采用阀门调节，问泵的流量、扬程、轴功率是多少?阀门消耗的水头是多少?

2）如采用变速调节，转速应调至多少?流量、扬程及轴功率是多少?（原转速$n=2900\text{r/min}$）

15-6 12SA-10型泵（性能曲线见附录C）安装在管路系统中，管路性能曲线$H=H_{st}+SQ^2$，已知$H_{st}=15\text{m}$，$S=226\text{s}^2/\text{m}^5$。试求：

1）泵的流量、扬程是多少?

2）冬季流量减少20%，叶轮应切削多少?

15-7 某工厂通风系统要求风量$Q=21800\text{m}^3/\text{h}$，风压$p=90\text{mmH}_2\text{O}$，如采用4-72-11型风机，试分别利用附录E的无量纲性能曲线及附录G的风机性能表，确定风机的叶轮直径及转速。

15-8 试估算8-23-11型No.4风机在转速$n=2500\text{r/min}$时的额定参数。

15-9 如厂房通风要求风量$Q=2000\text{m}^3/\text{h}$，风压$p=300\text{mmH}_2\text{O}$，试用附录F选择一台8-23-11型风机。

15-10 工厂给水需要流量$Q=380\text{L/s}$，经过管路计算，需扬程$H=32\text{m}$，试从附录D中选用一台合适的水泵；如考虑流量调节的需要，拟采用两台泵并联工作，试选用两台满足以上要求的水泵。

第十六章　其它常用泵与风机

§ 16-1　轴流式泵与风机

如前所述，轴流式泵与风机与离心式相同，都是通过高速旋转的叶轮对流体作功，使流体获得能量。它的特点是流体轴向流入，轴向流出，没有沿径向的运动，在理论能头式（13-11）中$\frac{u_2^2-u_1^2}{2g}$项为零。因此，它所产生的能头远低于离心式。轴流式泵与风机适用于大流量小能头的情况，属于高比转数范围。

一、工作原理

轴流式泵与风机的主要构造见图16-1。叶轮由叶片与轮毂组成。叶片以一定的安装角固定在轮毂上，轮毂固定在转轴上。由轴带动在机壳内高速旋转。

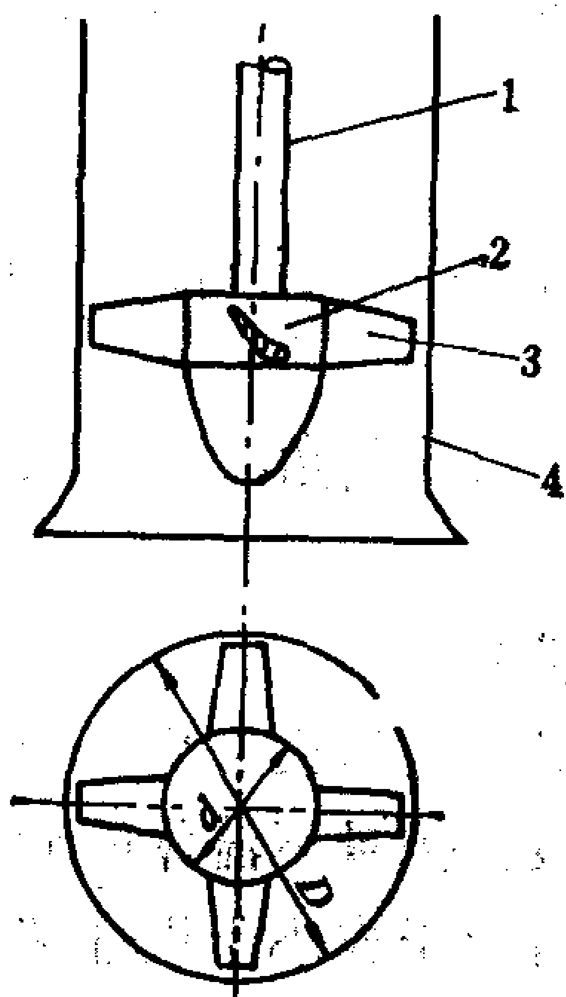


图 16-1　轴流式泵与风机示意图

1—轴；2—轮毂；3—叶片；4—机壳

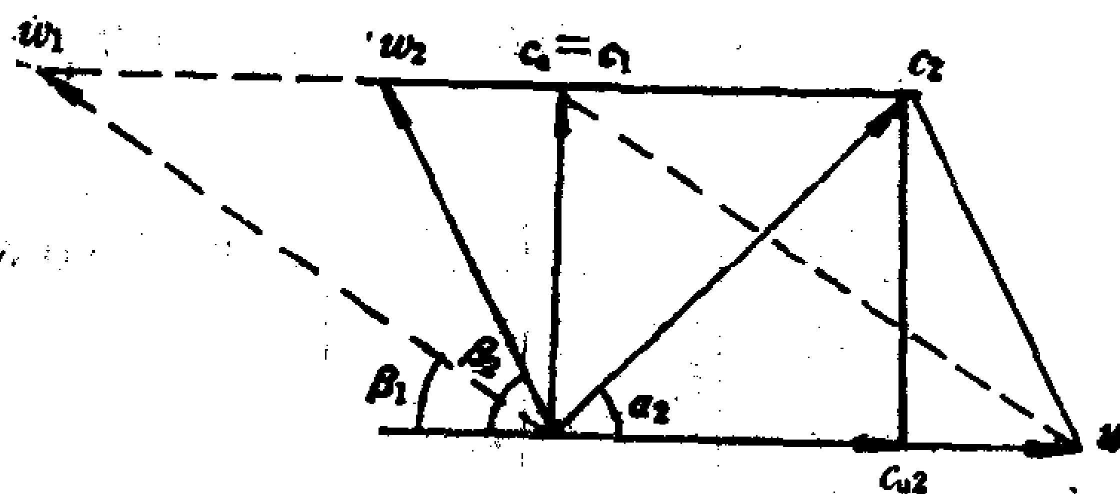


图 16-2　进口与出口速度图

流体质点轴向流入叶轮，随叶轮旋转做圆周运动，圆周速度$\vec{u}$。同时沿叶片做相对运动，相对速度$\vec{w}$，并沿轴向流出叶轮。圆周运动与相对运动合成为绝对运动，绝对速度$\vec{c}=\vec{u}+\vec{w}$。由于流体没有沿径向的运动，因此它的绝对速度$\vec{c}$可以分解为：沿圆周切线方向的切向分速度c_u及沿轴线方向的轴向分速度c_a，见图16-2。

因为流体质点从叶轮进口到出口始终在同一半径的圆周上运动，故进口圆周速度与出口圆周速度相等，即

$$u_1=u_2=\frac{2\pi rn}{60}=u \tag{16-1}$$

式中r为流体质点所在的半径。

叶轮的进口过流面积与出口过流面积相等，如不考虑叶片厚度的影响，过流面积为

$$A_1 = A_2 = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \tag{16-2}$$

式中D为叶轮外径，d为轮毂直径。

叶轮进口轴向分速度c_{a1}与出口轴向分速度c_{a2}相等，即

$$c_{a1} = c_{a2} = \frac{Q_T}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)} = c_a \tag{16-3}$$

式中Q_T为理论流量。

因$u_1 = u_2 = u$，$c_{a1} = c_{a2} = c_a$，则进口速度图与出口速度图可以画在一起，见图16-2。

轴流式泵与风机的理论能头与离心式相同，可用欧拉方程式表示，即

$$H_{T\infty} = \frac{1}{g}(u_2 c_{u2} - u_1 c_{u1}) = \frac{1}{g}u(c_{u2} - c_{u1}) \tag{16-4}$$

为了得到最大的能头，选择进口安装角β_1，使$c_{u1} = 0$。因此，在设计工况下有

$$H_{T\infty} = \frac{1}{g}uc_{u2} \tag{16-5}$$

轴流式叶轮不同半径处的圆周速度不同（见式16-1），流体获得的能量不相等。r较大的地方，u较大，产生的能头也较大。能量分布的不均匀，增加了能量损失，降低了效率。为了避免这种情况，使不同半径处能头大致相等，需要在不同半径处，采用不同的出口安装角β_2。由于

$$c_{u2} = u - c_a \cot\beta_2 \tag{16-6}$$

在半径大的地方采用较小的β_2，使uc_{u2}大致保持常数，于是整个叶轮出口断面上的能头基本保持均匀分布。

轴流式泵与风机的叶片，由于不同半径处采用不同的出口安装角，经常做成扭曲的形状。

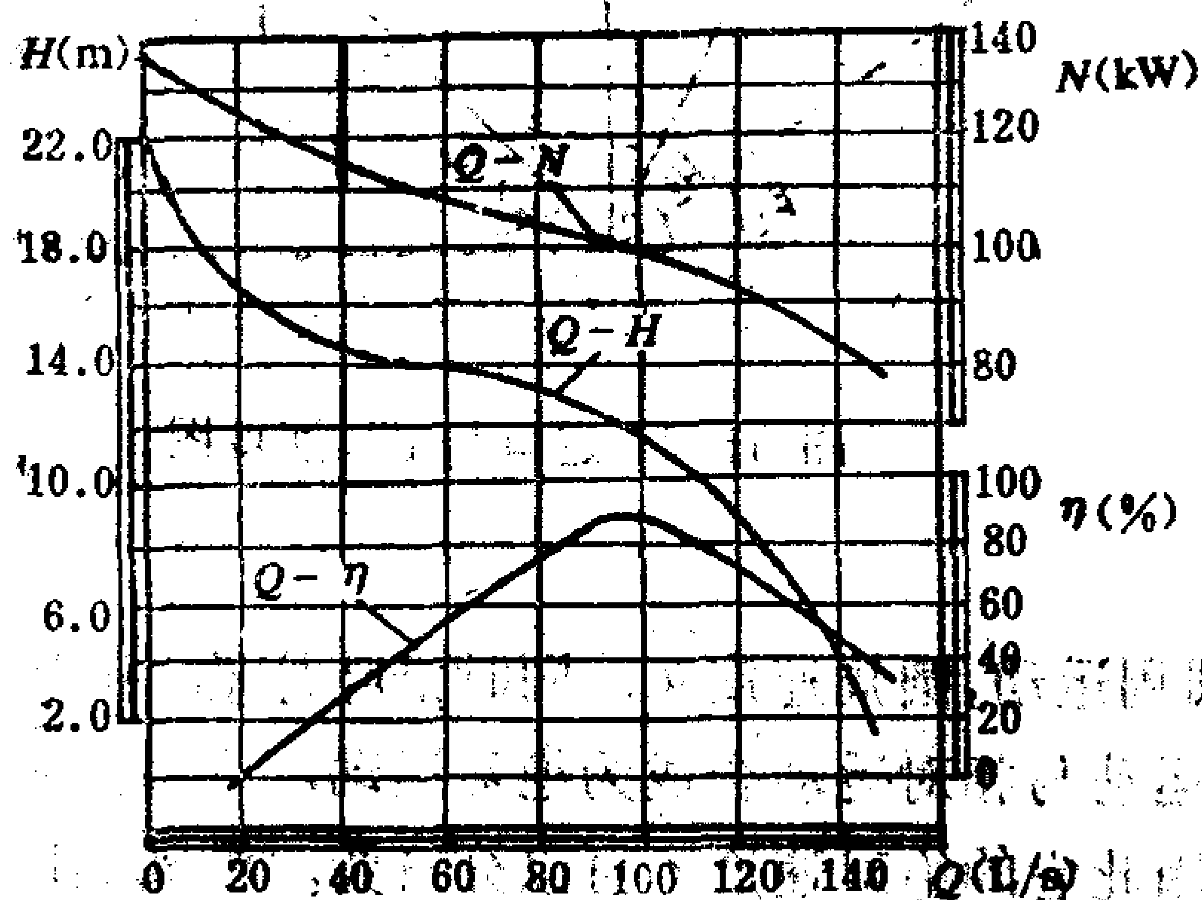


图 16-3 轴流泵的性能曲线

二、性能曲线

轴流式泵与风机采用扭曲形叶片，只能保证在设计流量下流体的能量分布均匀。当流量大于或小于设计流量时，能量仍然是不均匀的，从而增加了能量损失，效率下降。特别是小流量时，由叶轮流出的流体，一部分又回到叶轮二次加压，发生二次回流现象。因此，轴流式泵与风机的性能曲线具有以下特点，见图16-3。

（1）Q-H曲线陡降，并有转折点。二次回流的发生使小流量时能头急剧增大，一般轴流泵的空载扬程约为设计工况的1.5～2倍。

（2）Q-N曲线随流量增加而下降。由于$N = \frac{\gamma QH}{\eta}$，当流量增加时，能头下降很快，致使功率不但没有增加，反而减小。在$Q = 0$时，轴功率最大。因而轴流式泵与风机不能空载启动，应在阀门全开的情况下启动。

（3）Q-η曲线呈驼峰形。高效率工作的范围很小，流量在偏离设计工况不远处，效

率很快下降。轴流式泵与风机的这一特点，使阀门调节非常不利，因而不能采用。

（4）轴流泵的吸水性能一般用气蚀余量表示。轴流泵的气蚀余量较大，亦即允许吸上真空高度较小。有时叶轮需要浸没在水中一定深度，即安装高度为负值。

三、轴流式泵与风机的调节

轴流式泵与风机一般不采用阀门调节，因为关小阀门使功率增大，效率降低，容易引起电机超载。

轴流式泵与风机通常采用变速调节或改变叶片安装角的调节方法。变速调节与离心式泵与风机相同。轴流式泵与风机叶片的安装角有几种角度，可以根据流量大小，选择不同安装角。安装角不同时，机器的性能曲线改变，图16-4是30E-11型轴流风机的性能曲线，是按四种不同安装角绘制的。

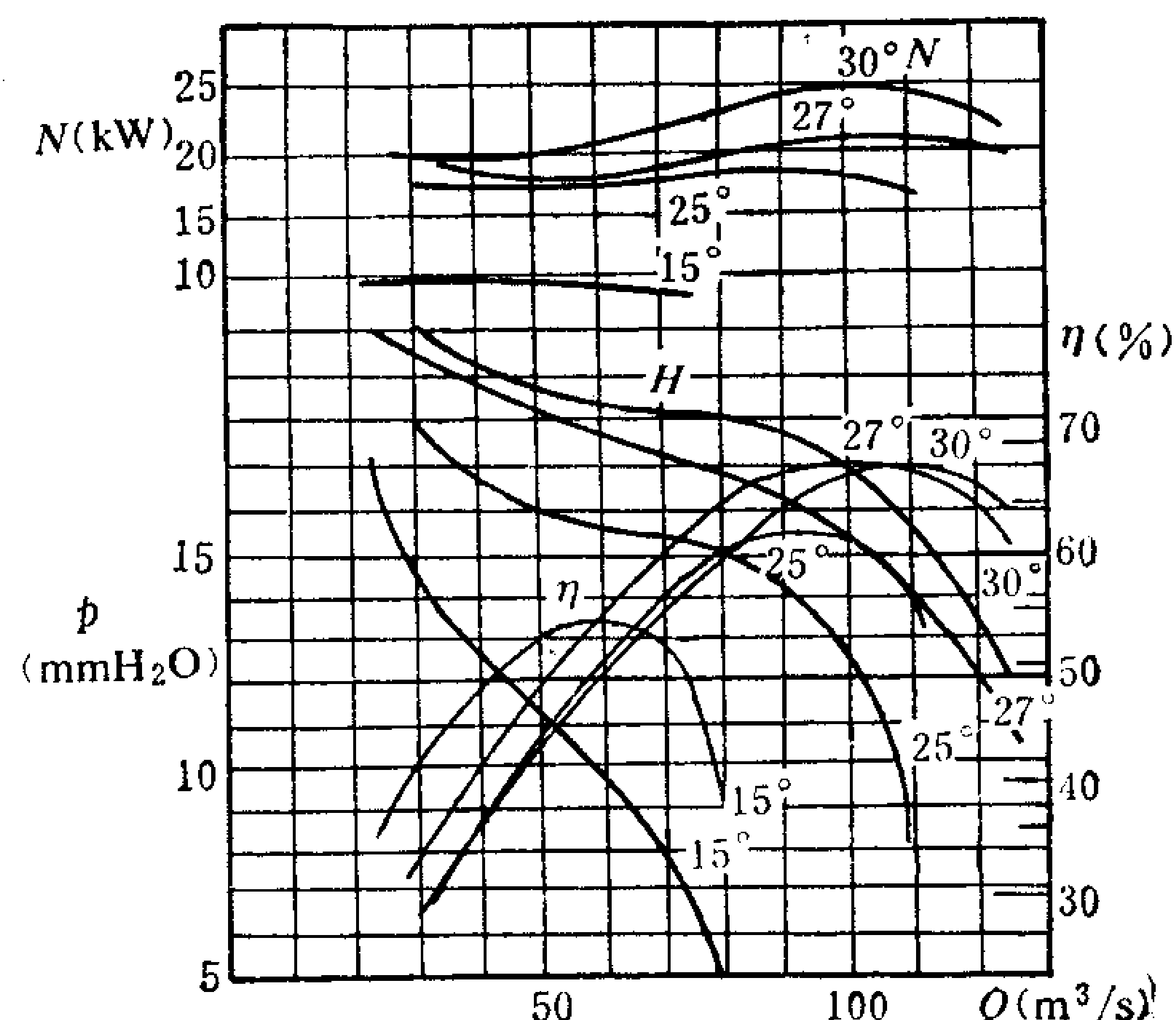


图 16-4 轴流风机的性能曲线

改变叶片安装角的方法有半调式与全调式两种。半调式的叶片用螺母栓紧在轮毂上，轮毂上刻有几个安装角的位置线，调节时将螺母松开，转动叶片，然后拧紧即可。全调式可以在停机或不停机的情况下，通过一套液压调节机构改变叶片安装角，调节机构比较复杂，一般应用于大型轴流泵与轴流风机。

四、常用轴流式泵与风机介绍

轴流式泵与风机具有构造简单，可输送含有杂质的流体，占地面积小，效率高等优点，在采暖、通风、给排水、农田灌溉等工程中得到广泛应用。

（1）轴流泵

我国生产的轴流泵有卧式轴流泵（半调式）ZWB型，立式轴流泵（半调式）ZLB型及立式轴流泵（全调式）ZLQ型。流量一般为480～36000m³/h，扬程为3～15mH₂O。

（2）轴流通风机

我国生产的轴流通风机种类很多，有一般通风机、防爆通风机、矿井通风机等。轴流通风机的叶片型式很多，见附录J。如一般轴流通风机30K_4-11型，风压为2.5～49mm·H_2O，风量为500～49500m³/h。叶片安装角有10°、15°、20°、25°、30°五种。其型号意义以30K_4-11No.3A为例，说明如下：

30—毂比(0.3)100倍后的整数；

K—该风机的叶型为等厚板型的扭曲叶片；

4—该型叶片第4次设计；

1—该型风机叶轮为1级；

1—该风机为第一次设计结构；

No3—风机机号，叶轮直径为300mm；

A—传动方式为电机直联式。

§ 16-2 活 塞 泵

活塞泵是靠活塞在泵缸内往复运动，改变工作室容积，从而对流体作功使流体获得能量，是一种容积式泵。

一、工作原理

图16-5是活塞泵的工作示意图。曲柄连杆机构带动活塞在泵缸内往复运动 当活塞自左向右运动时，泵缸内造成低压，上端压水阀关闭，下端吸水阀被泵外大气压作用下的水压力推开，水由吸水管进入泵缸，完成吸水过程。当活塞自右向左运动时，泵缸内形成高压，吸水阀关闭，压水阀受压而开启，将水由压水管排出，完成压水过程。活塞不断往复运动，水就不断被吸入和排出。

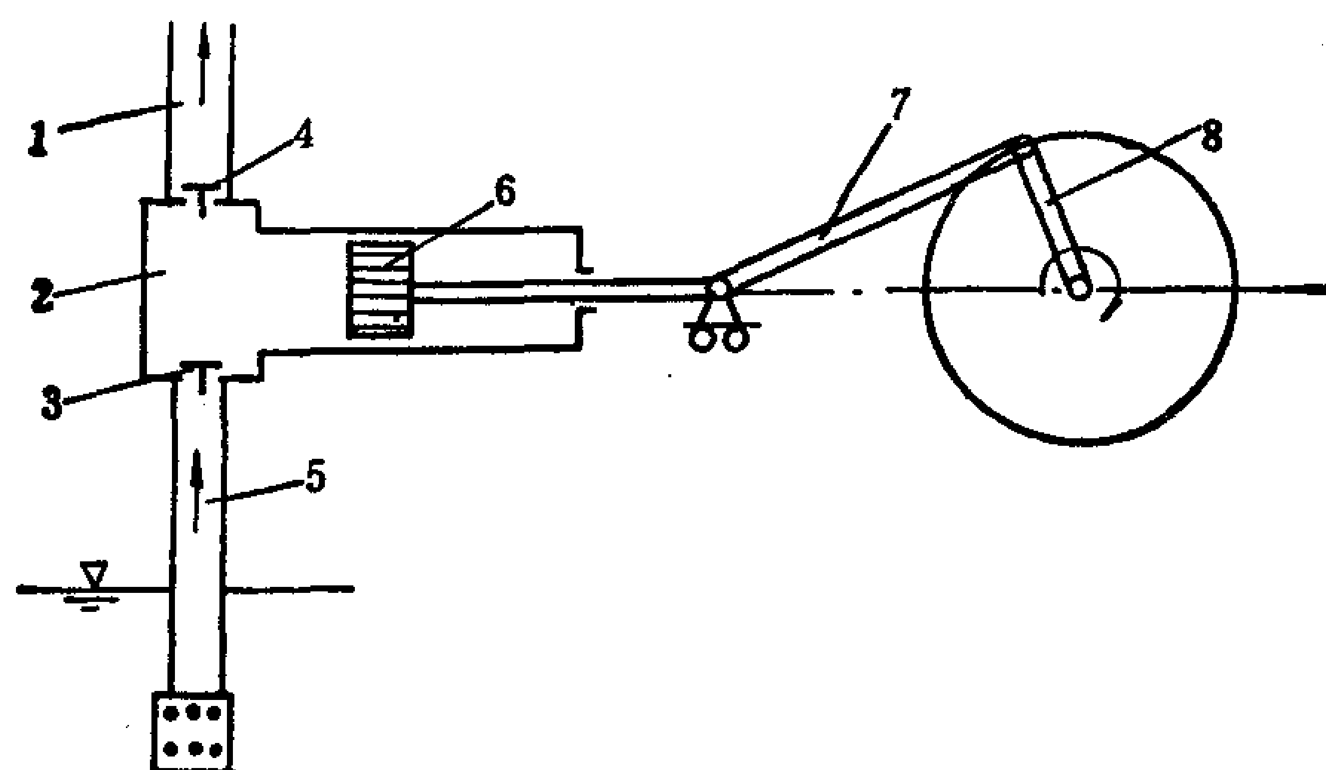


图 16-5 活塞泵工作示意图

1—压水管；2—泵缸；3—吸水阀；4—压水阀；5—吸水管；6—活塞；7—连杆；8—曲柄

活塞泵在泵缸内从一个顶端运动至另一顶端，两顶端之间的距离S称为活塞的冲程。活塞往复一次（两个冲程），吸入和排出一次水，称为单动活塞泵。单动活塞泵的理论流量为

$$Q_T = FSn \tag{16-7}$$

式中，F—活塞断面积；S—冲程；n—活塞每分钟往复次数。

实际上由于吸水阀和压水阀的开关均有延迟，以及活塞与泵体的联接不紧密，都会使一部分水由压水端漏回吸水端。因此实际流量小于理论流量，可用容积效率η_v表示

$$Q = \eta_v Q_T = \eta_v FSn \tag{16-8}$$

构造良好的大型活塞泵η_v较高，小型活塞泵η_v较低，一般约为85～99%之间。

按式（16-7）计算的流量是活塞泵的平均流量，即假设活塞泵连续均匀供水的流量。实际上活塞泵吸水时不供水，压水时流量也是不均匀的。活塞泵多采用曲柄连杆机构作传动机构，当曲柄作等角速度旋转时，活塞的速度变化为正弦曲线。因活塞面积F是常数，活塞泵的瞬时流量随时间变化与活塞速度变化规律相同，也是正弦曲线。如图16-6（a）所示。

由图可见，单动活塞泵的供水是很不均匀的。为了改善这种情况，可采用双动泵。双动泵是活塞往复一次吸入和排出各两次，其工作示意图见图16-7。当活塞自左向右运动时，左泵缸吸水，右泵缸压水；活塞自右向左运动时，右泵缸吸水，左泵缸压水，从而改

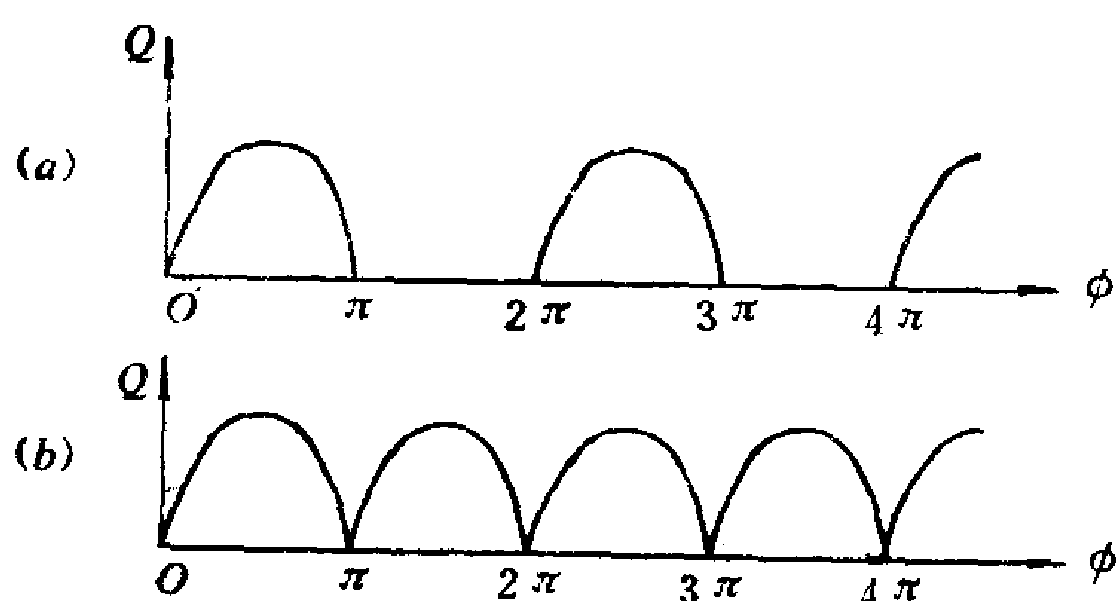


图 16-6 活塞泵流量变化曲线
(a)单动泵；(b)双动泵

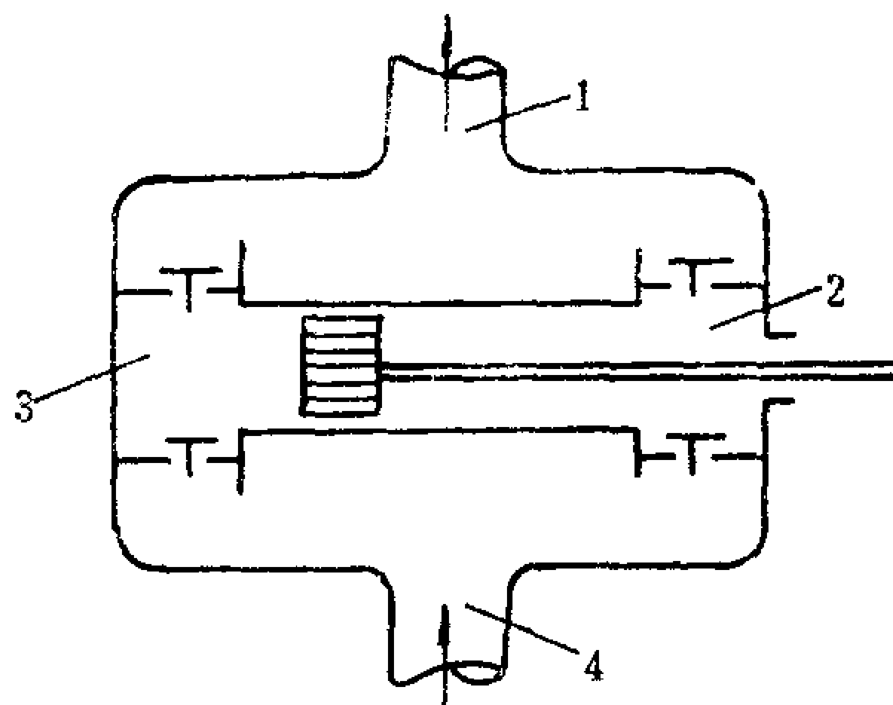


图 16-7 双动活塞泵示意图
1—压水管；2—右泵缸；3—左泵缸；4—吸水管

善了供水的均匀性。其流量变化见图16-6（ b ）。还可以做三动、四动活塞泵，使供水更加均匀化，就不一一叙述了。

双动泵的理论流量为

$$Q_T=(2F-f)Sn \tag{16-9}$$

式中 f 为活塞杆的截面积，其它符号同前。

为了使活塞泵供水均匀，同时减少管路内由于流速变化引起附加的惯性水头损失，一般常在压水及吸水管路上设置密闭的空气室。借助空气的压缩和膨胀作用，达到缓冲调节的效果。

二、性能曲线

（ 1 ）扬程曲线　活塞泵的扬程是靠往复运动的活塞，将机械能以静压的形式直接传给液体，因此活塞泵的扬程与流量无关。这是活塞泵与叶轮式泵根本不同的地方。理论上扬程可以无限大，实际上扬程不能无限增大，它受两个因素限制，一是泵的零件的强度，一是电机的功率。活塞泵的工作扬程取决于管路系统的阻力，即

$$H=H_{st}+\Sigma h_w \tag{16-10}$$

式中，H_{st}为静扬程；Σh_w为吸水管与压水管的水头损失之和。

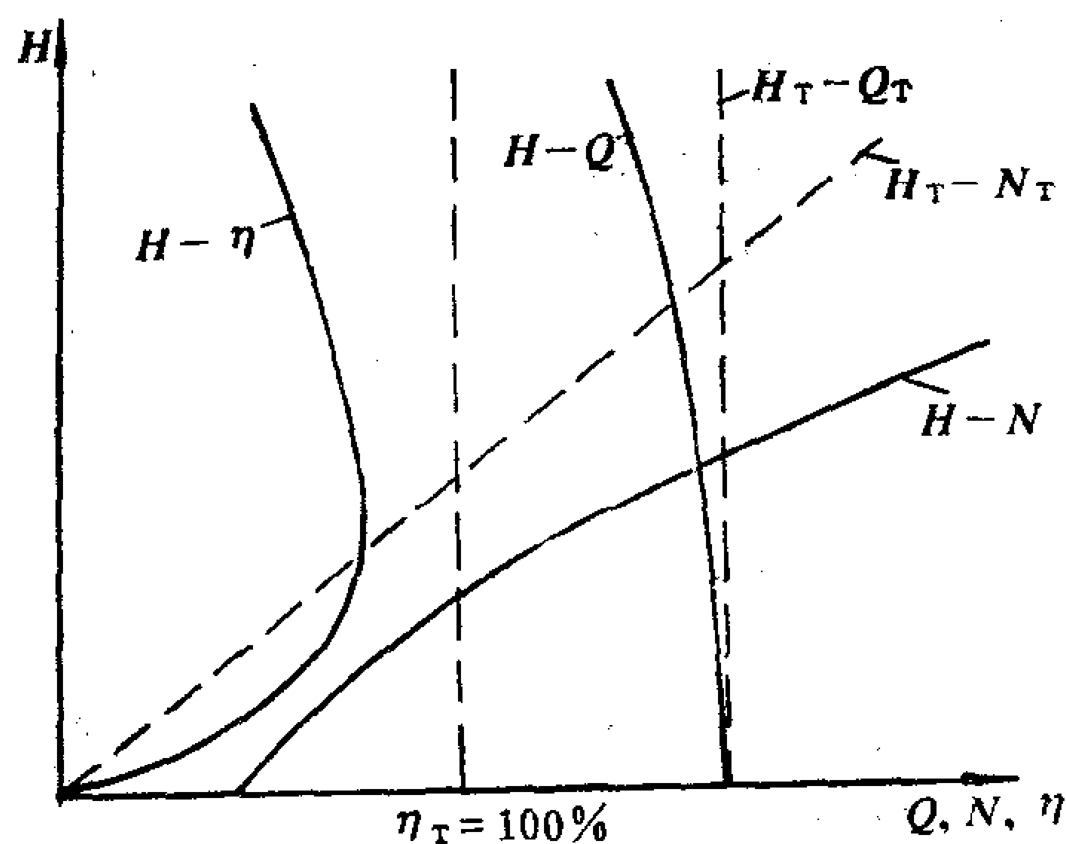


图 16-8 活塞泵的性能曲线

活塞泵的理论扬程曲线 H_T-Q_T 是一条垂直线，见图16-8，表明理论扬程与流量无关。但实际上活塞泵有漏水损失，随着扬程增大，漏水损失增加，所以实际的 H-Q 曲线随H增大，流量略有降低。

（ 2 ）功率曲线　活塞泵因流量变化很小，所以功率曲线用功率随扬程的变化曲线表示。

因功率$N=\dfrac{\gamma QH}{\eta}$，在理想情况下$\eta_T=100\%$，$Q_T$是常数，因此理论功率曲线$H_T$-$N_T$是一根通过原点的直线。实际上，$H=0$时功率不为零，$H$增大时，流量减小效率改变，所以实际功率曲线$H$-$N$不通过原点，并稍有弯曲。

（3）效率曲线　理论效率曲线是$\eta_T = 100\%$的虚线。由于扬程增大时，漏水损失增大，实际效率下降。扬程很小时，有效功率很小，而机械损失基本不变，因而实际效率很快下降。实际效率曲线H-η见图16-8。注意图中纵坐标是扬程H，横坐标是流量Q、功率N及效率η。

三、活塞泵的调节与应用

（1）活塞泵的调节

从流量公式（16-7）看出，活塞泵的流量只与活塞面积F、冲程s和曲柄转速n有关，其中F是不能改变的，因此调节流量有两种方法。一种方法是改变曲柄的半径R，即改变连杆和曲柄连接的位置，以改变活塞的冲程。第二种方法是改变曲柄的转速，以改变活塞每分钟往复的次数。

活塞泵不允许用阀门进行调节。因为关小阀门只增加管道的阻力，使活塞泵的扬程加大，而流量变化不大，白白消耗了能量，且容易引起电机超载。因此，管路上的阀门只作检修时隔离之用，平时须常年开阀运行。

（2）蒸汽活塞泵　用蒸汽作为动力，推动活塞往复运动叫做蒸汽活塞泵。在采暖供热系统的锅炉房中，利用锅炉本身产生的蒸汽来带动活塞泵，做为停电时保证锅炉补给水的备用水泵，是非常合适的。这种活塞泵的流量调节，是通过配气装置改变配气量，从而改变活塞往复次数进行的。我国生产的2QS系列蒸汽活塞泵的流量范围为0.5～120m^3/h，输送温度低于105℃的介质。

（3）活塞泵的优缺点

与离心式泵比较，活塞泵具有以下优点：①效率比离心泵高；②扬程变化时流量几乎不变，适宜于输送粘度较大的液体；③不需要启动设备。

活塞泵的缺点是：①流量较小且不均匀；②流量不易调节；③结构复杂，零件多，操作管理不方便；④体积大，重量大，造价高。

尽管活塞泵是人类最早利用的提升液体的设备，但由于本身的缺点，已逐渐被离心泵所代替。由于它的特点适用于小流量、高扬程，输送高粘液体，至今仍应用于机械装置中润滑设备，以及锅炉房中用蒸汽活塞泵做为锅炉补给水泵等。

§16-3　水环式真空泵

真空泵是将容器中的气体抽出，形成真空的装置。常用的是水环式真空泵。

一、工作原理

水环式真空泵的工作示意图见图16-9。（a）是静止情况，带有六个叶片的叶轮，偏心地装在泵壳内，泵内注入一定量的水。（b）是叶轮旋转的情况。叶轮旋转时，由于惯性作用，水在泵壳四周形成水环，水环与叶轮之间被叶片分为六个分别封闭的空间。又由于叶轮是偏心装置的，这六个空间大小不等，1、6最小，3、4最大（见图16-9(b)）。当空间1转至2、3位置时，容积加大，气体压强减小，在2、3接入吸气管，可将容器内的气体吸入。当转至4、5、6时，空间容积愈来愈小，气体逐渐被压缩，压强增大，从排气管排出。

叶轮每转一周，吸气一次，排气一次。连续不断地旋转，就可将容器内的气体抽出，

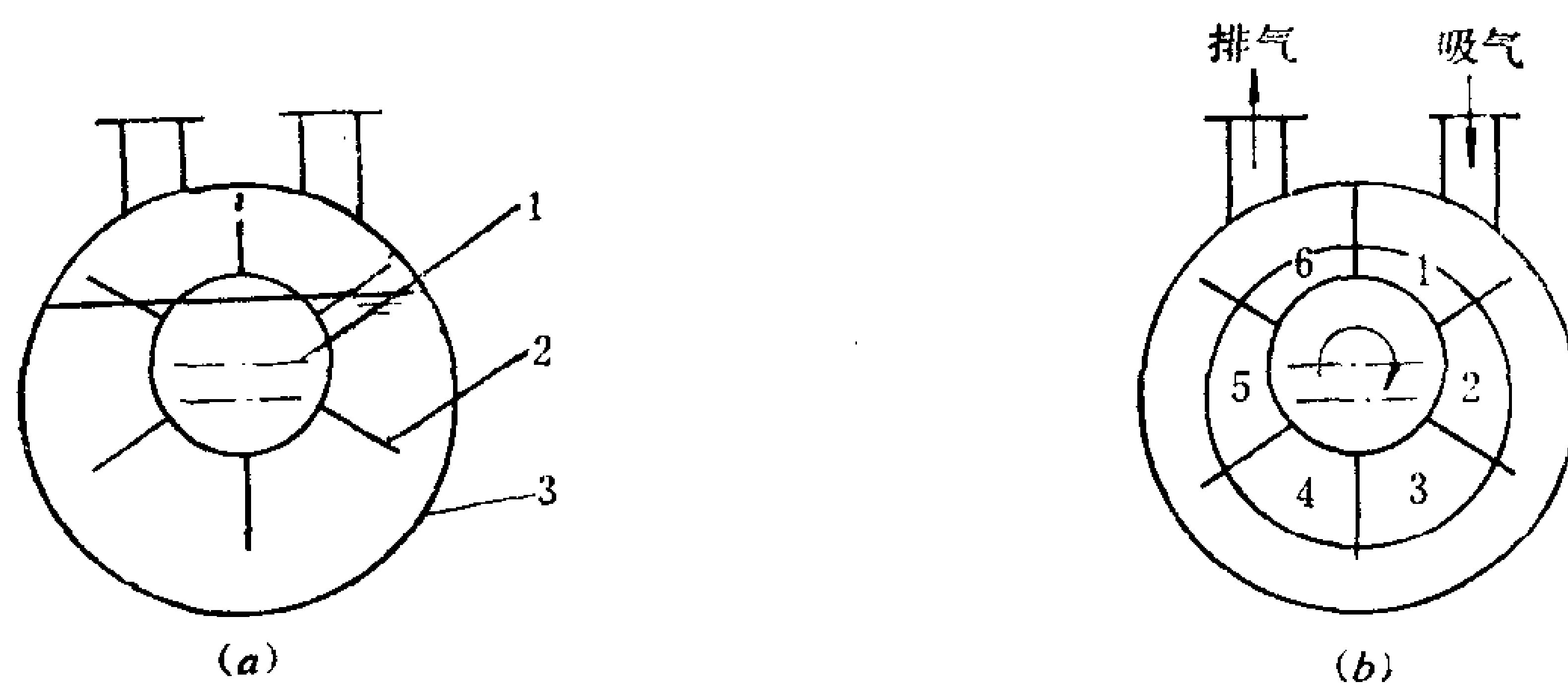


图 16-9 水环式真空泵示意图

(a)静止时；(b)叶轮旋转时

1—叶轮；2—叶片；3—泵壳

形成真空。

二、应用

水环式真空泵常用来为大型离心泵启动前抽气充水。我国生产的水环式真空泵有SZ型和SZB型。如SZ-1型真空泵的极限压强为122mmHg，SZ-4型真空泵的极限压强为53mmHg（均为绝对压强）。

真空泵工作时，应不断补充水，以保证水环的形成和带走摩擦产生的热量。

习 题

16-1 已知轴流泵叶轮直径$D=650$mm，轮毂直径$d=350$mm，理论流量$Q_T=1.25m^3/s$，转速$n=580r/min$，叶轮进口沿轴向流入，最大半径处$\beta_2=20°$，试求此时的理论扬程。

16-2 有一轴流风机，已知转速$n=1450r/min$，空气沿轴向流入速度为18m/s，在叶轮半径$r=35$cm处，出口$\beta_2=22°$，空气密度$\rho=1.2kg/m^3$，试求理论全压p_T。

附　　录

附录A　应力和变形速率的关系

第五章中在建立流体运动微分方程时曾给出下列关系：

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\\ \tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\\ \tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\}\tag{5-10}$$

$$\left.\begin{aligned}p_{xx}=p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}-2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}\\ p_{yy}=p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}-2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}\\ p_{zz}=p+\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}-2\mu\frac{\partial uz}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{5-11}$$

现在来证明这些关系。

一、切应力与角变形速率的关系

由§2-3中牛顿内摩擦定律得知，在平面均匀流中切应力与角变形速率成正比，即

$$\tau=\mu\frac{d\theta}{dt}\tag{2-21}$$

这个结论可以推广到三元流动中。

在流体中取一微元平行六面体，它在xoy平面上的投影如图A-1a所示。由于各点的流速不等，经时间dt后各直将发生角变形（见图b）。CD边对AB边有相对运动，产生切应力τ_{yx}，直角总的变形为$d\theta=d\alpha+d\beta$（见图c），直角的变形速率为

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\alpha+d\beta}{2}=\frac{\frac{\partial u_y}{\partial x}\,\frac{dxdt}{dx}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\,\frac{dydt}{dy}}{dt}=\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}$$

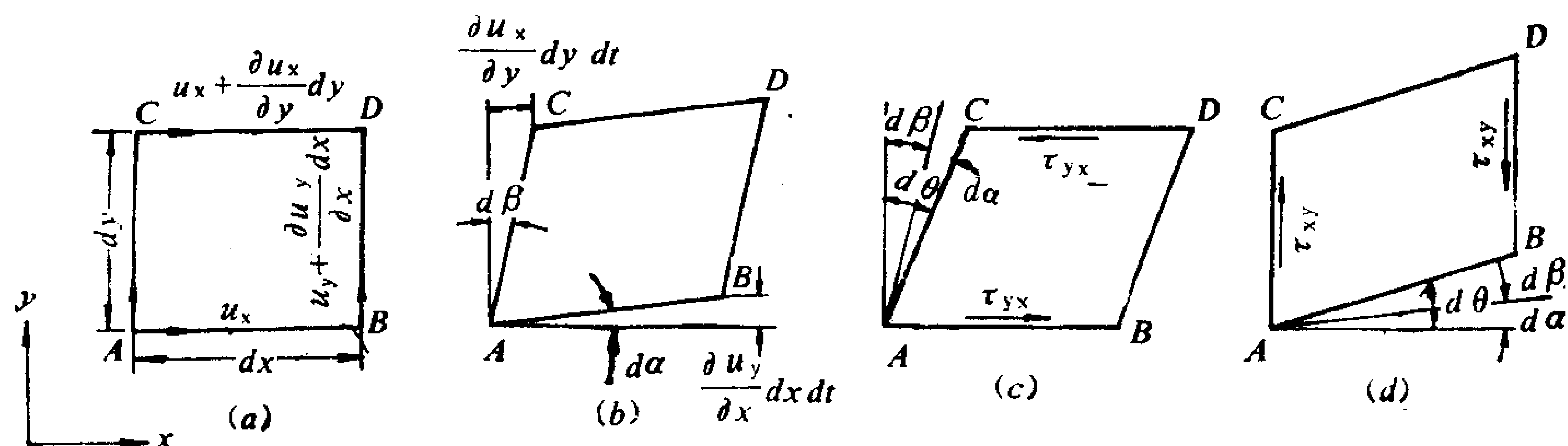


图 A-1　切应力与角变形速率

所以
$$\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

BD边与AC边也有相对运动，产生切应力τ_{xy}（见图d），其直角变形率也是

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\alpha+d\beta}{dt}=\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)=\frac{\tau_{xy}}{\mu}$$

所以

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)$$

在其它两个坐标平面上，用同样方法可得

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial z}\right)$$

$$\tau_{zx}=\tau_{xz}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)$$

因此，作用在两个相互垂直微元面上且与其交线正交的切应力都是相等的。

二、法向应力与线变形速率的关系

牛顿粘性流体和弹性材料类似，也存在着变形主轴和主应力。在粘性流体内部任一点上，总会有三个互相垂直的平面，其应力是垂直于作用面的，切应力等于零。具有这一特点的平面叫主平面，它们的法线方向就是变形主轴方向，相应的法向应力就是主应力。

在粘性流体中取一边长为ds的微元立方体，它的六个面是主平面。取坐标轴方向与变形主轴一致。该立方体在xoy平面上的投影如图A-2a中的$ABCD$所示。作用在它四个面上只有法向应力，没有切应力。故而该四方体只有线变形，没有角变形。经dt时间，该四方体变为矩形$AB'C'D'$。现沿对角线CB截取等腰三角形ABC来讨论（图A-2b）。变形后直角$\angle CAB$虽然没有变化，但$\angle CBA$却有变化，这只能是法向应力p_{xx}和p_{yy}在斜边CB上产生切应力τ'_{xy}因而引起的角变形。所以粘性流体中法向应力也会产生剪切变形。

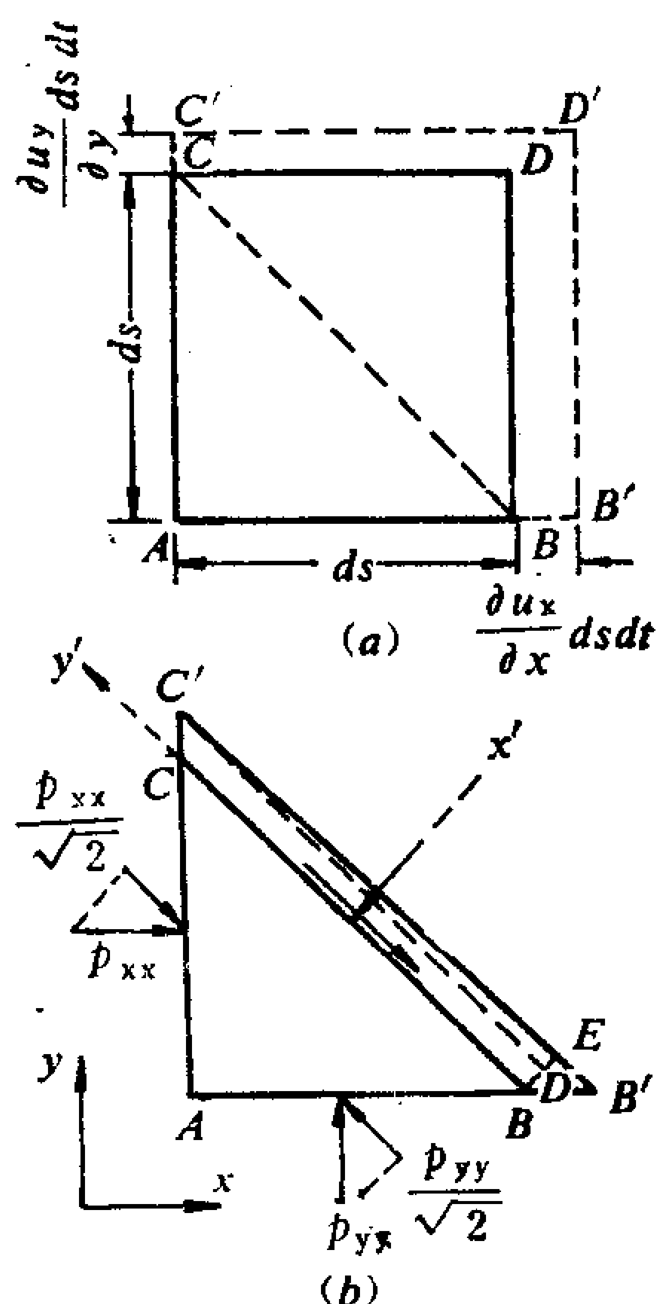


图 A-2　法向应力与变形速率

为了求出$\angle CBA$的改变量，在B点作CB的垂线，它与过C'点与CB平行的线相交于D，与$C'B'$线相交于E。由于

$$BE=\frac{BB'}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u_x}{\partial x}dsdt$$

$$BD=\frac{CC'}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u_y}{\partial y}dsdt$$

$$C'D=\sqrt{2}ds+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial u_y}{\partial y}dsdt$$

因此
$$\angle DC'E\approx\frac{BE-BD}{C'D}=\frac{\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)dt}{2+\frac{\partial u_y}{\partial y}dt}$$

$\angle DC'E$是45°角的改变量，而角变形速率$\frac{dv}{dt}$是指直角的变化速度。故

$$\frac{d\theta}{dt} = 2\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\angle DC'E}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$\tau'_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right)$$

再由$\triangle ABC$上力的平衡条件可得

$$\tau'_{xy}(\sqrt{2}\,ds) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}p_{yy}\right)ds + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}p_{xx}\right)ds = 0$$

质量力是高阶无穷小量，予以忽略，于是

同理

$$\left.\begin{aligned} p_{yy} - p_{xx} &= 2\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y}\right) \\ p_{zz} - p_{yy} &= 2\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \\ p_{xx} - p_{zz} &= 2\mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{\partial u_x}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

由第五章已知，粘性流体中动压强p的定义为

$$p = \frac{1}{3}(p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) \qquad (b)$$

将（b）式中的p_{yy}和p_{zz}分别用（a）式代换掉，即得

$$p_{xx} = p + \frac{2}{3}\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) - 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x} = p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u} - 2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}$$

同理可得

$$p_{yy} = p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u} - 2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}$$

$$p_{zz} = p + \frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u} - 2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}$$

由上式可知，粘性流体中同一点在不同方向的法向应力不相等，是由于各方向的线变形速率不等因而出现切应力造成的。

附录B 比摩阻计算表

1.钢板圆形通风管道比摩阻计算表（部分）

100mm		140mm		200mm		220mm	
Q (m³/h)	P_m (Pa/m)	Q (m³/h)	P_m (Pa/m)	Q (m³/h)	P_m (Pa/m)	Q (m³/h)	P_m Pa/m)
524	50.869	508	8.524	481	1.280	472	0.779
527	51.392	514	8.699	493	1.366	486	0.820
529	51.917	519	8.816	504	1.393	499	0.863
532	52.445	524	9.055	515	1.451	513	0.906
535	52.976	530	9.235	526	1.510	526	0.951
538	53.509	535	9.417	537	1.571	540	0.997
540	54.045	541	9.601	549	1.632	553	1.043
543	54.584	546	9.786	660	1.695	567	1.091

本表用于钢板制圆形通风管道，当量粗糙$\Delta=0.15$mm，标准状态空气，沿程阻力系数按$\frac{1}{\sqrt{\lambda}}=-2\lg\left(\frac{\Delta}{3.7d}+\frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$计算制表。

2.铸铁管的比摩阻计算表（部分）

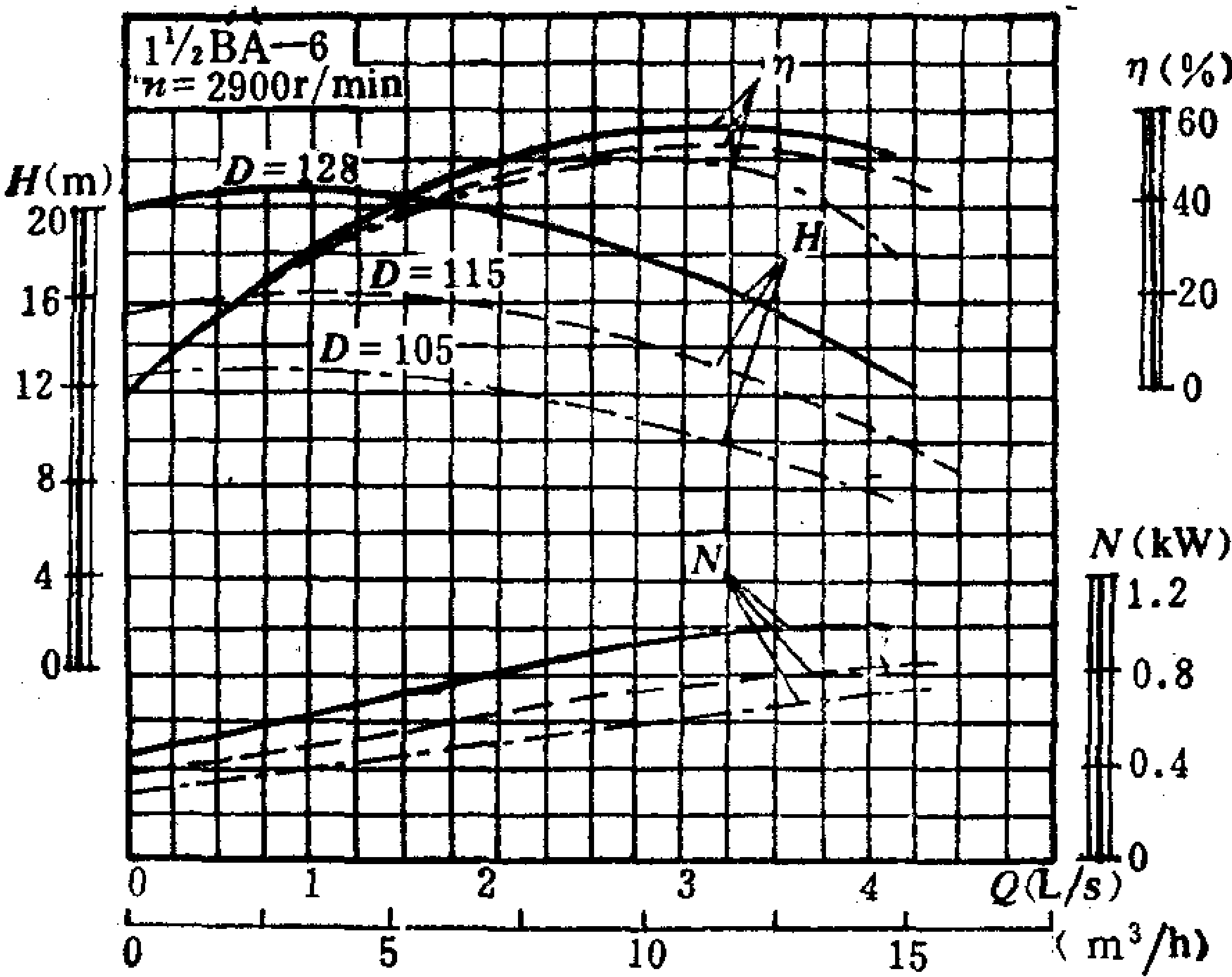
100mm		150mm		200mm		250mm	
v (m/s)	1000J	v (m/s)	1000J	v (m/s)	1000J	v (m/s)	1000J
1.27	34.7	0.56	4.49	0.66	4.16	0.42	1.38
1.30	36.5	0.57	4.69	0.67	4.34	0.43	1.44
1.46	46.2	0.64	5.82	0.69	4.53	0.48	1.77
1.82	71.6	0.80	8.71	0.76	5.35	0.49	1.83
1.85	74.2	0.82	8.99	0.77	5.56	0.50	1.90
1.88	76.8	0.83	9.30	0.79	5.77	0.51	1.97
1.92	79.5	0.85	9.59	0.80	5.98	0.52	2.05
1.95	82.2	0.86	9.88	0.82	6.21	0.53	2.12

本表用于铸铁管，水温10℃，沿程阻力系数按〈室外给水设计规范〉（TJ13-74）采用公式

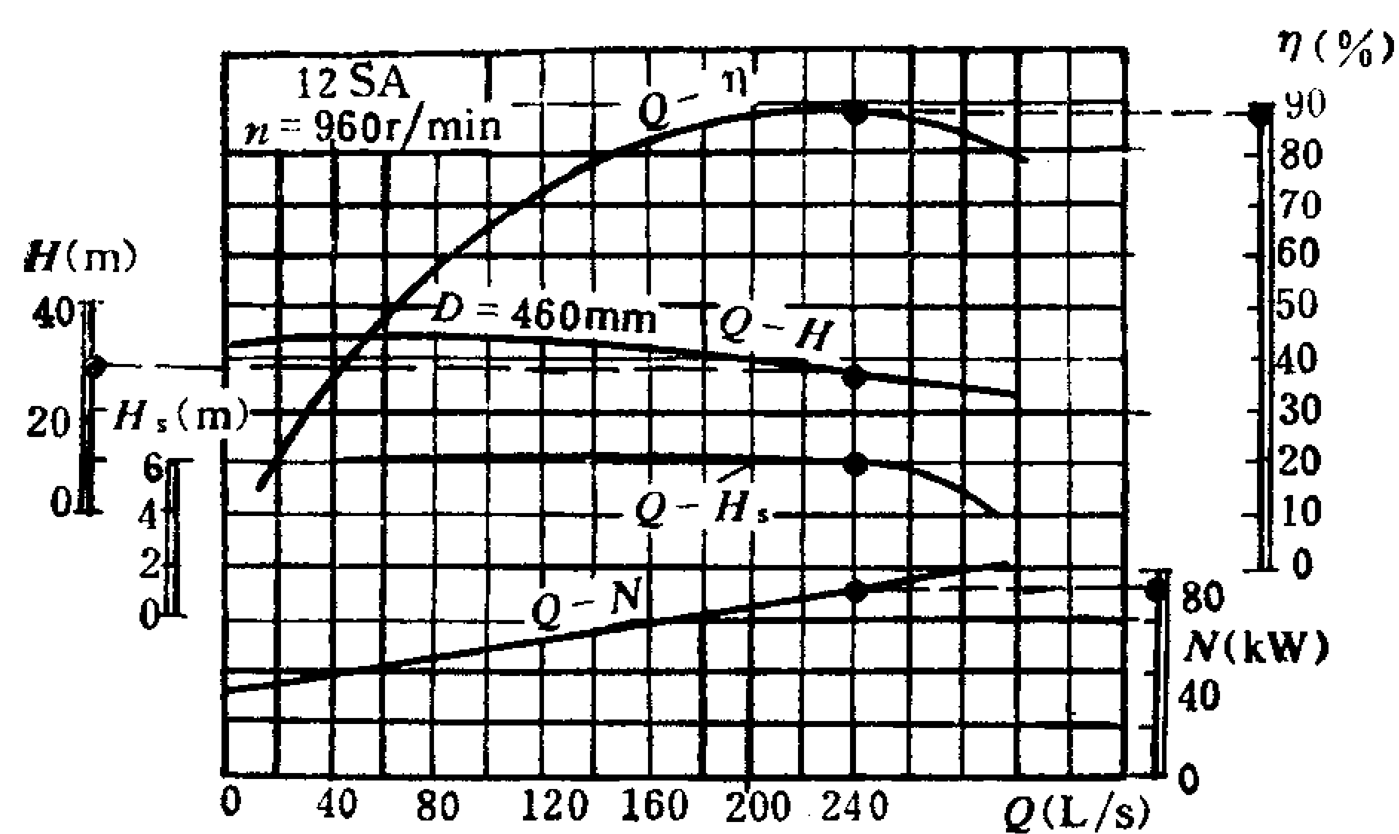
$$\left.\begin{aligned} v<1.2\text{m/s} \qquad & \lambda=\frac{0.0179}{d^{0.3}}\left(1+\frac{0.867}{v}\right)^{0.3} \\ v>1.2\text{m/s} \qquad & \lambda=\frac{0.021}{d^{0.3}} \end{aligned}\right\}$$

计算制表。

附录C　离心泵性能曲线

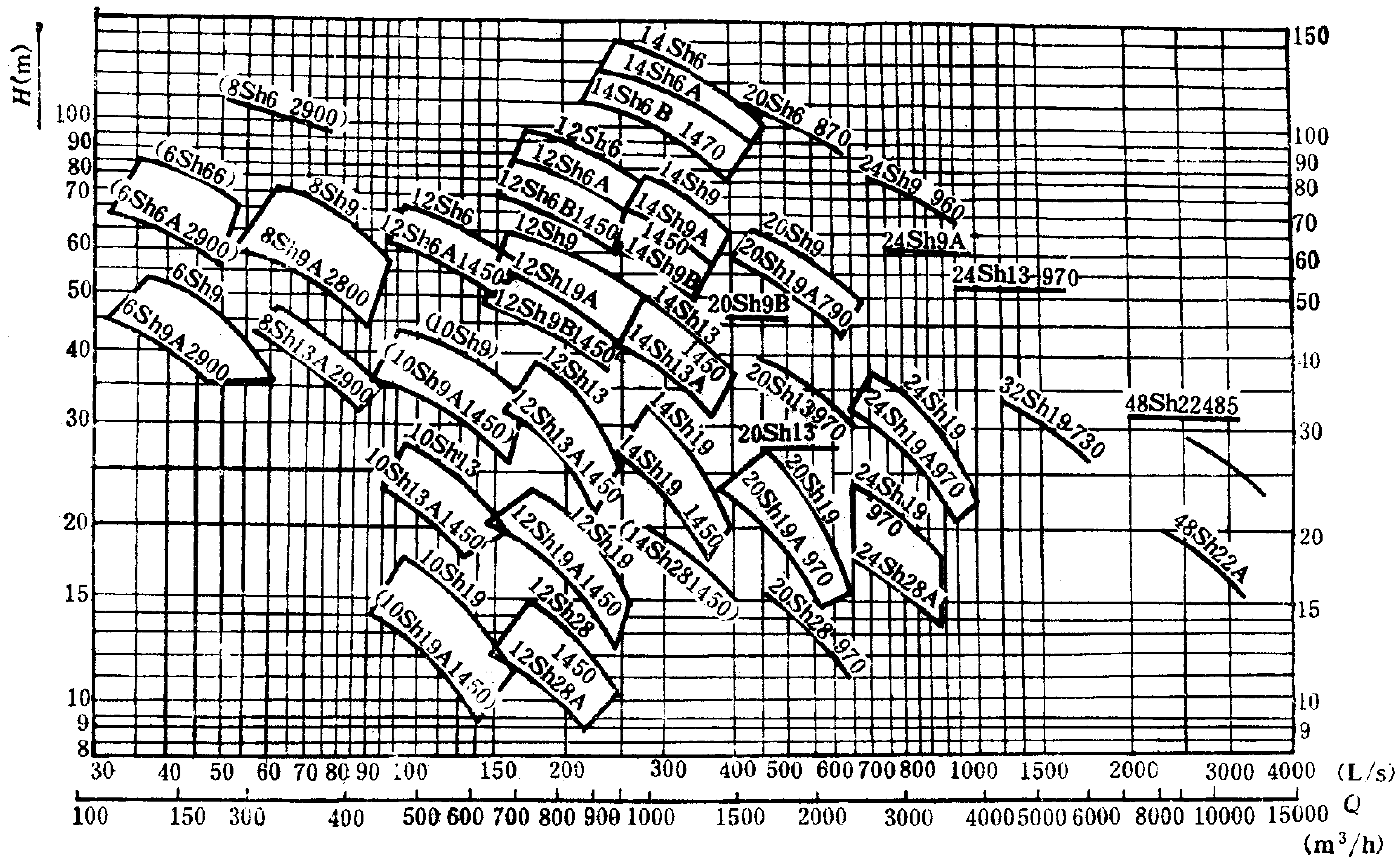


图附 C-1　$1^1/_2$BA-6型泵性能曲线



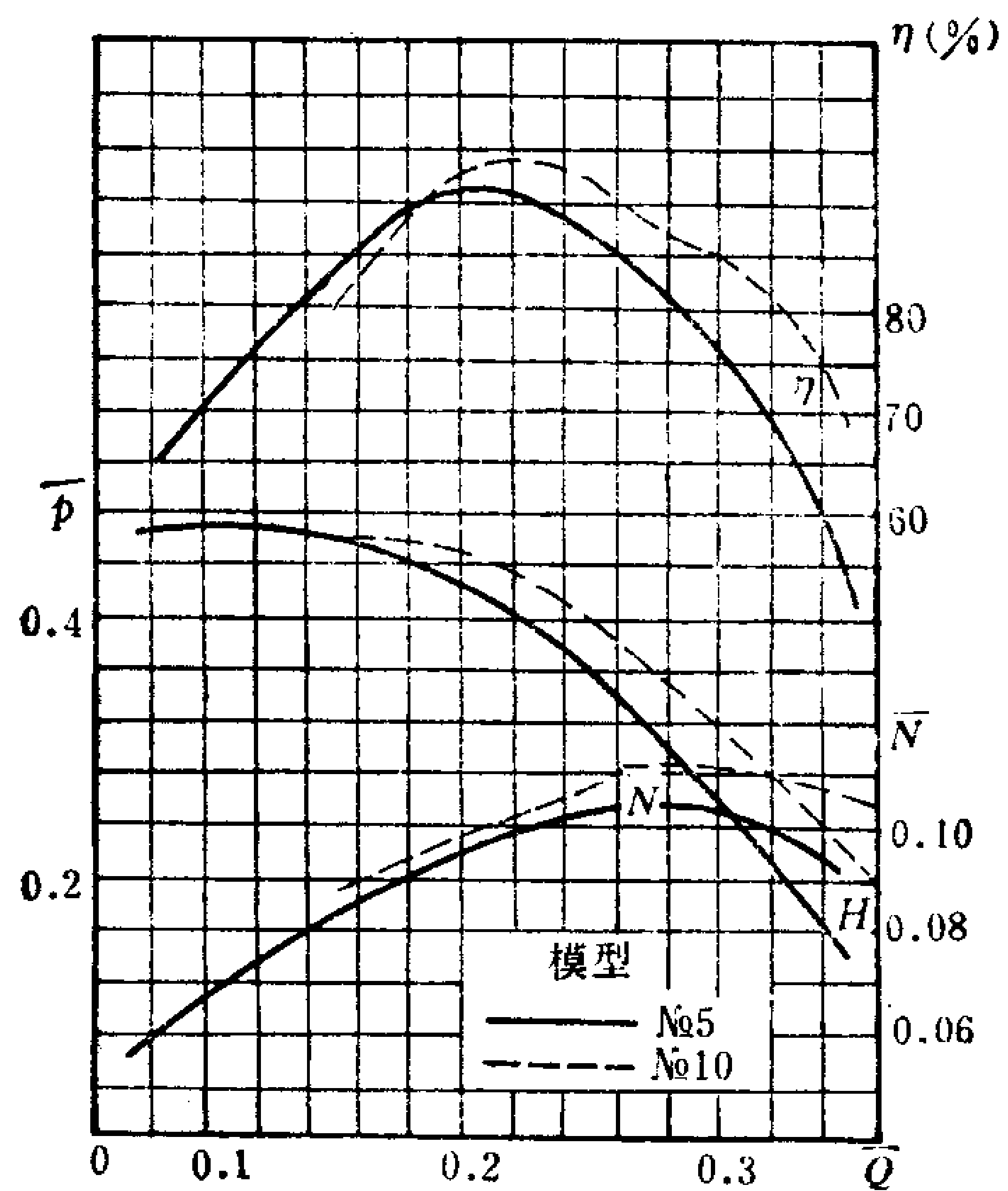
图附 C-2 12SA型泵性能曲线

附录D 离心泵综合性能图



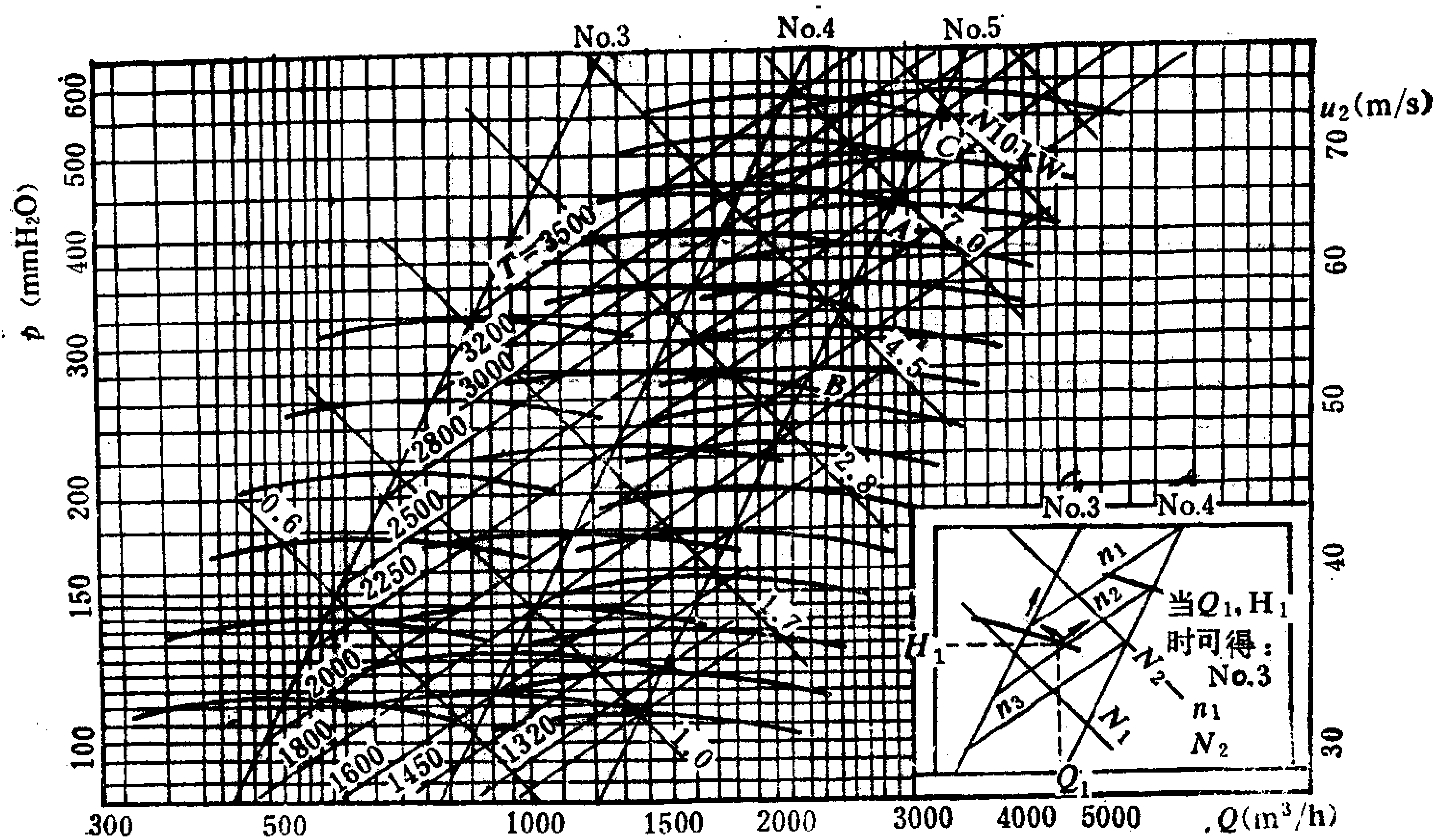
图附D Sh型泵综合性能图

附录E 风机的无量纲性能曲线



图附E　4-72-11型通风机无量纲性能曲线

附录F 风机的选择性能曲线



图附F　8-23-11型通风机选择性能曲线

附录G　4-72-11型风机性能表（摘录）

表 附-1

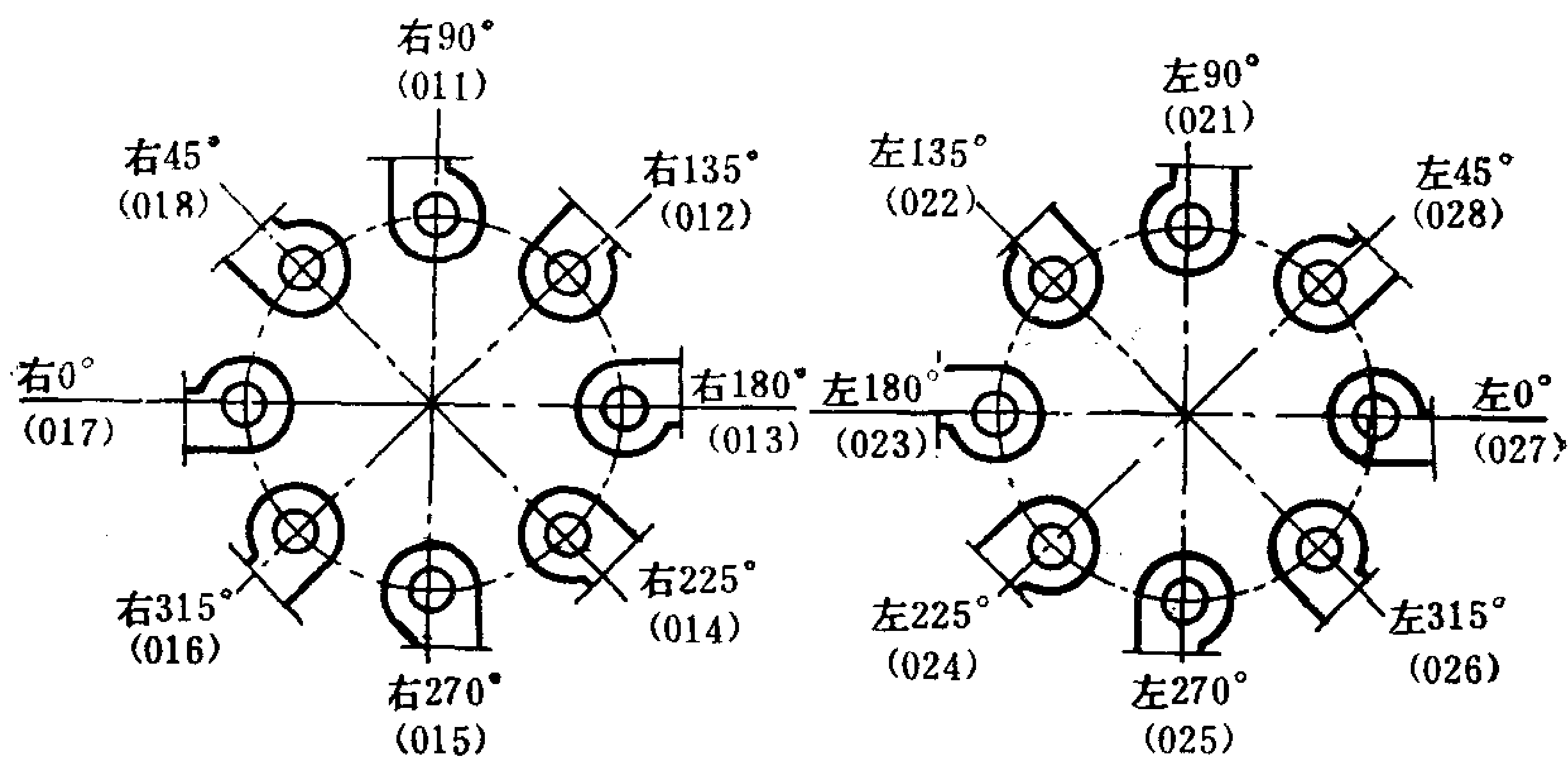
型号	转速 (r/min)	序号	全压 (Pa)	流量 (m^3/h)	电动机 型号	电动机 功率 (kW)
№6A	1450	1	1150	6860	Y112M-4	4
		2	1120	7660		
		3	1090	8550		
		4	1060	9360		
		5	990	10200		
		6	940	10900		
		7	840	11840		
		8	720	12620		
	960	1	500	4540	Y100L-6	1.5
		2	490	5070		
		3	480	5630		
		4	460	6220		
		5	430	6760		
		6	410	7220		
		7	370	7840		
		8	320	8360		
№10C	1300	1	2460	34800	Y225S-4	37
		2	2400	37850		
		3	2260	41300		
		4	2150	44050		
		5	1980	47100		
		6	1810	50150		
	830	1	1010	22150	Y160L-4	11
		2	980	24140		
		3	920	26130		
		4	880	28120		
		5	810	30110		
		6	740	32100		

附录H　风机的传动方式

型式	A 型	B 型	C 型	D 型	E 型	F 型
结构						
特点	叶轮装在电机轴上	叶轮悬臂，皮带轮在两轴承中间	叶轮悬臂，皮带轮悬臂	叶轮悬臂，联轴器直联传动	叶轮在两轴承中间，皮带轮悬臂传动	叶轮在两轴承中间，联轴器直联传动

图附H　风机传动方式

附录I 风机出风口位置



图附I 出风口位置

"右"表示从主轴槽轮或电动机位置看叶轮顺时针方向旋转

"左"表示从主轴槽轮或电动机位置看叶轮逆时针方向旋转

附录J 轴流式风机的机翼型代号

表 附-2

代 号	机 翼 型 式	代 号	机 翼 型 式
A	机翼型扭曲叶片	*G*	对称半机翼型扭曲叶片
B	机翼型非扭曲叶片	*H*	对称半机翼型非扭曲叶片
C	对称机翼型扭曲叶片	*K*	等厚板型扭曲叶片
D	对称机翼型非扭曲叶片	*L*	等厚板型非扭曲叶片
E	半机翼型扭曲叶片	*M*	对称等厚板型扭曲叶片
F	半机翼型非扭曲叶片	*N*	对称等厚板型非扭曲叶片

附录K 习 题 答 案

2-1 $13590kg/m^3$, $133277N/m^3$, 13.59

2-3 360L

2-5 $1061kg/m^3$

2-7 $5.882\times10^{-6}m^2/s$

2-9 1) $5.49\times10^{-4}N/m^2$, 2) $4.31\times10^{-5}N/m$

2-13 5mm, 2.5mm

3-1 $130746N/m^2$, $29421N/m^2$

3-3 0.5m

3-5 1) $2700N/m^2$, $-37980N/m^2$

3-7 1) $2942N/m^2$, 2) $2042N/m^2$

3-9 123.7kN/m^2, 927mmHg

3-11 1961.4N/m^2

3-13 $\gamma_1=\frac{a-h}{a}\gamma$, $\gamma_2=\frac{b+h}{b}\gamma$

3-15 $-2.96mH_2O$

3-17 5.285N/m^3

3-19 2) 235mm

3-21 1) $a=\frac{2g}{3l}(h_2-h_1)$, 2) 6.54m/s

3-23 $\omega=\frac{2}{R}\sqrt{gh}$

3-25 1) 88.26kN, 2) 离底1.5m

3-27 $\frac{\gamma}{3}h^2b$, $\frac{\gamma}{8}b^2h^2$

3-29 离底0.444m

3-31 23.47kN, 19.84°

3-33 40.85kN

3-37 9.92kN, 1.28kN

3-39 4545.8kN

3-41 69.51%, 30.49%

4-1 12.17, 9.46°

4-3 1) 340.9

4-5 $v=\frac{2}{3}u_{max}$

4-7 2.13m/s

4-9 18.05m/s, 22.25m/s

4-11 $y_0=0.24r_0$

4-13 256400J/s

4-15 10.9L/s

4-17 3.85m/s

4-19 22.82m^3/s

4-21 30L/s, 50L/s

4-23 $h_1=h_2$

4-25 11.9kN/m^2

4-27 1) 6.38m/s↑, 2.72m/s↓

4-29 67.8mm

4-31 -66.32kN/m^2

4-33 $\alpha=1.54$, 1.058; $\alpha_0=1.2$, 1.021

4-35 -30.45kN, 21.41kN

4-37 -5.11kN, 0.65kN, 14.97kN·m

4-39 81.75kN

4-41 1) 152.96N·m, 2) 160.59N·m

4-43 104.6N, 44.1N, 60.5N

4-45 78.3m/s

5-3 $u_z = -2xy - 2x + f(y)$

5-7 $\nabla p = -(3\vec{i} + 9\vec{j})$kN/m^3

5-13 $\frac{\omega}{u} = k\sqrt{\phi(z) - 2k^2(x^2 + y^2)}$

5-15 $x = y + c_1$, $y = z + c_2$; $dJ = 1.73 \times 10^{-4}$m^2/s

5-17 4m/s

5-19 1) $\Gamma = 2\pi K$, 2) $\Gamma = 0$

5-23 1) $\vec{\omega} = -\frac{B}{2}(y^3 + 3x^2 y)\vec{k}$

6-1 $S = Kgt^2$

6-7 $Q = F_1\left(\frac{\rho H^{3/2} g^{1/2}}{\mu}, \frac{b}{H}\right)\sqrt{g}H^{5/2} = F\left(\frac{b}{H}\right)\sqrt{2g}\,H^{5/2}$

6-9 2.8m/s

6-11 2.26m^3/s

6-13 74.67N/m^2, −35.56N/m^2

6-15 8320kN

6-17 950.87m/s, 8.82P_p

6-19 11.9°C

6-21 $\lambda_F = 1$

7-1 2

7-3 6.16l/s

7-5 19.2cm^3/s

7-7 8.56×10^{-6}m^2/s, 7.71×10^{-3}Pa·s

7-9 $0.707r_0$

7-11 0.018, 过渡区

7-13 161.82N/m^2, 164.64N/m^2

7-15 0.59m/s

7-17 9.86m

7-19 1.06

7-21 6.4

7-23 $v_2 = \frac{v_1}{2}$, $d_2 = \sqrt{2}\,d_1$; $h_{max} = \frac{v_1^2}{4g}$

7-25 3.12L/s, 101.12N/m^2

7-27 43.93m

7-29 2.39L/s

8-1 0.496, 0.817

8-3 5.06m

8-5 0.835m

8-7 43.21m

8-9 7.29min

8-11 58L/s

8-13 51L/s

8-15 4.45L/s, 20.55L/s, 6.29m

8-17 Q减小，Q_1减小，Q_2增大

8-19 5.656

8-21 539.96 N/m^2

8-23 233kPa

8-25 1612kPa, 1497.4kPa

9-1 1）无旋；2）无旋；3）有旋

9-3 $\psi = -\frac{2y}{x^2 - y^2}$

9-5 $\psi = r^{\frac{1}{2}} \sin\frac{\theta}{2}$, $u_r = \frac{1}{2\sqrt{r}}\cos\frac{\theta}{2}$, $u_\theta = -\frac{1}{2\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}$

9-7 $\theta = 0$, $p = -\frac{\rho a^2}{2\alpha^2}\pi^2 r^{\frac{2\pi-\alpha}{\alpha}}$

$\theta = \alpha$, $p = -\frac{\rho a^2 \pi^2}{2} r^{\frac{2\pi}{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha^2 r}\cos^2\frac{\pi\alpha}{2} + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\pi\alpha}{2}\right)$

9-11 $m = 32\pi$

9-13 $\psi = \frac{M}{2\pi r}\sin\theta$

9-15 $16\pi a b^2$

9-17 $\frac{\rho\Gamma^2}{4\pi h} + \rho u_0 \Gamma$, $\rho u_0 \Gamma$

9-19 1）$\Gamma = 3.5\pi$ m^2/s；2）$F = 293.38$N；3）$\theta = 30°$和$150°$

10-3 1）0.523m；2）3.64mm, 0.127N/m^2；3）266mm, 0.282N/m^2

10-5 3.75kW

10-7 0.49

10-9 217N

10-11 0.20m/s

10-13 0.48m/s<0.6m/s

10-15 0.543mm

11-1 0.66m, 0.75m^3/s, 4.96m/s, 2.58m/s

11-3 0.665m^3/s

11-5 5.58m^3/s

11-7 3.64m^3/s, 2.74m/s, 3.95m/s, $2y = 0.72$m

11-9 $2b_0 = 0.2$m, $s = 1.36$m

11-11 $2b_0 = 0.134$m, $c_m = 0.0685$mg/L

11-13 $2.1026 \times 10^{-3} \exp\left[-\frac{(x-1080)^2}{288000}\right]$

12-1 0.802, 0.714

12-3 22.2°

12-5 343.1m/s, 323m/s, 258.4m/s, 321.8kN/m²

12-7 245.5m/s

12-9 14.26kg/s, 298.8kN/m²

12-11 253.2m/s, 236.7m/s

12-13 1.775kg/s, 320.9m/s

12-15 151.8kN/m²

12-17 41.7kg/s, 150.7m

13-1 260.5Pa

13-2 36m

13-3 8级

13-4 622Pa

13-5 18.23m, 反转时54.16m

13-6 后弯式4.59m, 13.64m; 前弯式40.51m, 13.65m

14-3 6.81kW, 8.21kW, 83%, 94%

14-4 23.4m, 90%

14-5 8300m³/h, 51.5mmH_2O, 1.304kW, 72

14-6 8387m³/h, 78.8mmH_2O, 72

14-7 74.6L/s, 16.6m, 16.2kW

14-10 68, 100

14-11 128, 100

14-12 3 m

14-13 2 m

14-14 －3 m

15-1 13m, 104.6mmH_2O

15-2 3.25L/s, 16.3m, 57%, 0.91kW

15-3 2.6L/s, 14.8m, 51%, 0.74kW

15-4 并联2400m³/h, 140Pa

串联3700m³/h, 200Pa

15-5 1）2.6L/s, 18.2m, 0.9kW, 3.4m

2）2.6L/s, 14.8m, 0.67kW, 2645r/min

15-6 1）240L/s, 28m

2）8.7%

15-7 1000mm, 830r/min

15-8 268mmH_2O, 1337m³/h

15-9 No.5, 2250r/min

15-10 一台14sh13, 两台12sh13

16-1 10.34m

16-2 542Pa

高等学校试用教材

流体力学与流体机械

中国建筑工业出版社

